BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

ACD4263
UL FMT S RT a BL s T/C DT 07/18/88 R/DT 09/21/99 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG24928-S
035/2: : |a (CaOTULAS)160242844
040: : |a WMaUCS |c WMaUCS |d MUL |d MiU
245:00: |a Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik.
260: : |a Leipzig, |b B. G. Teubner, |c 1877-99.
300/1: : |a 9 v. |b ill., plates, ports. |c 24 cm.
362/1:0 : |a 1.-9. Heft.
580/1: : |a Published as a supplement to Zeitschrift für Mathematik und Physik.
650/1: 0: |a Mathematics |x Periodicals.
650/2: 0: |a Mathematics |x History.
730/1:0 : |a Zeitschrift für Mathematik und Physik.
772/1:1 : |t Zeitschrift für Mathematik und Physik
785/1:00: |t Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
998/1: : |c RGS |s 9121

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik.

Supplement

zur

historisch-literarischen Abtheilung

des XXVII. Jahrgangs.



Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1882.

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

Viertes Heft.

I. Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden. Von Dr. SIEGMUND GÜNTHER. (Mit einer lithogr. Tafel.)

II. Der Traktat Franco's von Luettich: „de quadratura circuli.“ Herausgegeben von Dr. WINTERBERG.

III. Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des Marino Ghetaldi Patrizier Ragusaer. Aus dem Jahre 1630. Von EUGEN GELCICH, Direktor der nautischen Schule in Lussinpiccolo.

IV. Descartes und das Brechungsgesetz des Lichtes. Von Dr. P. KRAMER in Halle a. d. S.



Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1882.

DIE

QUADRATISCHEN IRRATIONALITÄTEN

DER ALTEN

UND DEREN ENTWICKELUNGSMETHODEN.

VON

Dr. Siegmund Günther.

Einleitung.

Die lange Zeit fast vollständig ausser Acht gelassene Frage, mit welchen Hülfsmitteln die Mathematiker des Alterthums die mancherlei exakten und angenäherten Werthe von Quadratwurzeln aufgefunden haben mögen, welche sich in ihren Schriften da und dort nachweisen lassen, ist in jüngster Zeit in ein ganz neues Stadium getreten und, wie man wohl sagen darf, eine brennende geworden. In rascher Folge erschienen und erscheinen noch Schriften und Abhandlungen in den verschiedensten Sprachen, welche die Lösung dieser Streitfrage anstreben, und über welche sich zu orientiren ebenso ein unabweisbares Bedürfniss des Forschers ist, als es auf der anderen Seite durch die in der Natur der Sache liegenden Schwierigkeiten erschwert wird. Dieser Aufgabe nun soll die nachfolgende Arbeit gerecht zu werden suchen; sie will das gesammte, beträchtliche Material dem Leser vorführen und durch eine sorgfältige, kritische Musterung den Leser in den Stand setzen, sich selbst darüber ein Urtheil zu bilden, welche Art und Weise der Ausziehung von Quadratwurzeln als die für das Alterthum natürlichste und damit wahrscheinlichste betrachtet werden könne. Es gewinnt so diese Untersuchung mehrfache Berührungspunkte mit einer anderen ähnlichen, welche vom Verf. bereits vor einigen Jahren veröffentlicht worden ist 1), allein Tendenz und Inhalt weisen nichtsdestoweniger auch sehr erhebliche Verschiedenheiten auf. Damals sollte in keiner Weise divinatorisch zu Werke gegangen werden, vielmehr ward mit den eben zur Verfügung stehenden Mitteln nach Möglichkeit blos das Problem zu lösen versucht 2): „Es soll nachgewiesen werden, dass und wie sämmtliche approximative Werthe, welche im Alterthum an den verschiedensten Stellen ohne irgendwelche nähere Bezeichnung ihrer Entstehungsweise sich vorfinden, lediglich mit Hülfe der in der Mathematik der Jetztzeit heimisch gewordenen Kettenbruch-Algorithmen einfach und sicher berechnet werden können.“ Nun werden selbstverständlich im Folgenden auch die mit den Kettenbrüchen in Verbindung stehenden Methoden keineswegs vernachlässigt werden, wie diess schon aus der Kapitel-Eintheilung hervorgeht, allein die Berücksichtigung wird keine exklusive sein dürfen, und im Gegentheile sollen nun-

mehr die früher ausdrücklich von der Betrachtung ausgeschlossenen Kettenreihen (aufsteigenden Kettenbrüche) diessmal zu ihrem vollen Rechte gelangen. Wenn aber sonach die gegenwärtige Tendenz in der einen Richtung eine ungleich allgemeinere ist, als diess ehedem der Fall war, so tritt auf der anderen Seite eine sehr wesentliche Inhalts-Beschränkung doch wieder dadurch ein, dass in jener älteren Schrift sämmtliche Näherungsmethoden zur Sprache gelangten, sowohl diejenigen, welche sich auf die möglichst genaue Wiedergabe eines rationalen Zahlenverhältnisses in kleineren Zahlen beziehen, als auch diejenigen, deren man sich zur angenäherten Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln bediente, während jetzt eben nur von den quadratischen Irrationalitäten die Rede sein soll. Was den Zeitraum anbelangt, innerhalb dessen unsere Untersuchung sich zu bewegen hat, so darf wohl das Wort „Alterthum" nicht in einem zu engen Sinne gemeint sein; dass Alles, was etwa von byzantinischer Mathematik für unsere Zwecke Interesse bieten könnte, herbeigezogen werden muss, versteht sich ganz von selbst, allein auch andere Kulturvölker des Mittelalters werden wir in Betracht nehmen müssen, wenn wir zu wirklich abschliessenden Ergebnissen zu gelangen hoffen. Wir wissen, dass Inder und Araber ihre Bildung grossentheils aus griechischen, die christlichen Abendländer die ihrige fast einzig und allein aus römischen Quellen schöpften, und wenn sie die überkommenen Wissenselemente auch durchweg mit Zuthaten von eigener Erfindung zu versetzen pflegten, so tritt in der Mehrzahl der Fälle doch der wahre Ursprung — wenn auch erst bei genauerem Zusehen — zu Tage, und jedenfalls muss, wer von mathematischen Dingen bei Griechen und Römern handelt, auch auf deren wissenschaftliche Epigonen Rücksicht nehmen. Die untere Grenze ist für den Occident wenigstens von selbst mit Leonardo Pisano gegeben, der nicht blos in dieser Angelegenheit die Neuzeit einleitet und seinen sämmtlichen Leistungen auf arithmetischem Gebiete einen wahrhaft modernen Geist einzuflössen verstanden hat. — Unserem Programme gemäss wird unsere Darlegung sich nach drei grossen Unterabtheilungen zu gliedern haben. Die erste derselben begreift in sich alles wirklich vorhandene Material, alle Angaben, die sich aus den zeitgenössischen Schriftstellern über angenäherte Werthe quadratischer Irrationalzahlen und deren Entwickelungsmethoden entnehmen lassen. Auf dieser sozusagen empirischen Grundlage fusst zunächst der zweite Abschnitt, in welchem sämmtliche ältere und neuere Versuche Platz finden sollen, die uns verborgenen Näherungsmethoden der Alten irgendwie mit den uns bekannten Darstellungen einer Quadratwurzel durch einen absteigenden Kettenbruch in Beziehung zu setzen. Die dritte und letzte Abtheilung endlich soll jener Klasse von Divinationsversuchen gewidmet sein, welche darauf

abzielen, das Verfahren der Alten als ein nicht eben wesentlich von dem heutzutage noch in unseren Schulen gelehrten Berechnungsmodus verschiedenes hinzustellen. Die Gesammtliteratur, welche allmählich über diesen Gegenstand angewachsen ist, soll in diesen letzten beiden Abschnitten zur Besprechung gelangen, und wenn es auch vermessen wäre, zu sagen, dass nichts Hierhergehöriges vergessen worden sei, so darf vielleicht doch der Vermuthung Ausdruck gegeben werden, es treffe diese unbeabsichtigte Vernachlässigung wenigstens keine literarische Erscheinung von grossem Belang. Dass in dem zweiten und dritten Theile auch manche geschichtlich gleichgültige, wohl aber für Zahlentheorie und algebraische Analysis wichtige Nebenfragen eine Erörterung finden, wird wohl keiner besonderen Rechtfertigung bedürfen.

Kapitel I.

Unmittelbare Zeugnisse des Alterthums.

§. 1. *Das Irrationale bei den Griechen.* Dass schon in den ältesten Zeiten ein gewisses Bedürfniss sich geltend machte, die Zahl kennen zu lernen, welche mit sich selbst multiplicirt eine andere gegebene Zahl ergiebt, diess möchte wohl aus der Thatsache hervorgehen, dass Rawlinson auf einer assyrischen Thonplatte eine zum Theil im decimalen, zum Theil im sexagesimalen System gehaltene Tafel der sechzig ersten Quadratzahlen entdeckte 3). Derartige Tabellen mochten wohl auch noch für die Griechen des vorpythagoräischen Zeitalters dem Bedürfnisse vollkommen genügen; man war zufrieden, zu wissen, dass, wenn m zwischen a^2 und $(a+1)^2$ lag, nun auch $\sqrt{m}$ zwischen a und $(a+1)$ enthalten sein müsse, und hatte zunächst keine Veranlassung, eine Einschliessung zwischen näher an einander liegenden Grenzen anzustreben. Die Entdeckung — dieser Ausdruck dürfte in einer Angelegenheit von so hervorragender Wichtigkeit wohl am Platze sein — des Irrationalen denkt sich Cantor 4) in der Weise, dass man*) die Erfahrungswahrheit, wonach die drei Seiten 3, 4, 5 ein rechtwinkliges Dreieck liefern, zu verallgemeinern suchte: man hatte erkannt, dass für die Seiten dieses rechtwinkligen Dreiecks die Relation $3^2 + 4^2 = 5^2$ bestehe, und verfiel nun darauf, zu untersuchen, ob etwas Aehnliches auch bei anderen rechtwinkligen Dreiecken statthabe. Zunächst nahm man wohl das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck vor, prüfte mit dem Maassstab dessen Seitenlängen und überzeugte sich so, dass ein ge-

*) In ähnlicher Weise ward schon früher vom Verf. 4) die Auffindung des pythagoräischen Lehrsatzes auf ein Experimentiren mit rechtwinkligen Dreiecken von bestimmter Form zurückgeführt.

meinschaftliches Maass für Hypotenuse und Katheten wenigstens nicht ohne Weiteres zu finden sei. „Man erhielt", so spricht sich Cantor (a. a. O.) aus, „wahrscheinlich Zahlen, die dem gesuchten Maasse der Hypotenuse nahe kamen, Näherungswerthe von $\sqrt{2}$ würden wir heute sagen, aber es war noch ein Riesenschritt, von der Fruchtlosigkeit der angestellten Versuche auf die aller Versuche überhaupt zu schliessen, und diesen Schritt vollzog Pythagoras. Er fand, dass die Hypotenuse des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit messbaren Katheten selbst unmessbar sei, dass sie durch keine Zahl benennbar, durch keine aussprechbar sei; er entdeckte das Irrationale, worauf das alte Mathematikerverzeichniss*) ein so sehr berechtigtes Gewicht legt." $\sqrt{2}$ ward demgemäss als die irrationale Zahl erkannt, und zwar offenbar von dem Meister selbst, denn im Gegensatz hierzu wird in Platon's „Theaetet" dem Pythagoräer Theodoros von Cyrene nachgerühmt, er habe auch die Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ und $\sqrt{17}$ nachgewiesen 6). Indess gingen die griechischen Tendenzen schon damals viel weniger dahin, diesen Irrationalitäten eine rechnerisch brauchbare Seite abzugewinnen — das Irrationale war ja noch nicht dem eigentlichen Zahlbegriffe untergeordnet —, als vielmehr dahin, solche Grössen nach Möglichkeit bei der Rechnung zu vermeiden. Aus diesem Streben gingen die pythagoräische und die platonische Methode der ganzzahligen Auflösung der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ hervor. In wieweit die unmittelbaren Nachfolger des Pythagoras, mochten sie nun zu seiner Schule gehören oder nicht, die Theorie des Irrationalen förderten, wissen wir nicht. Von dem bekannten Philosophen Demokrit wird eine Schrift „περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν" in zwei Büchern angeführt 7), von deren Inhalt der alte Berichterstatter wohl selbst nicht näher unterrichtet war; ein neuerer, sehr gründlicher Kenner der griechischen Geometrie, Allman, glaubt bei Demokrit bereits ganz zutreffende Anschauungen über das Mathematisch-Unendliche vorzufinden 8), und es würde dann die Annahme naheliegen, dass in der genannten Schrift zuerst eine über die Erfahrungsthatsachen hinausgehende, mehr wissenschaftliche Behandlung des Irrationalen enthalten gewesen sei.

Völlig klar über den tiefgreifenden Gegensatz zwischen Rational und Irrational, der nur in der Zahlenlehre, ganz und gar nicht aber in der Raumlehre hervortritt, war sich jedenfalls Platon, der ja überhaupt mit

*) So nennen wir mit Cantor 5) jene leider nur bruchstückweise auf uns gekommene Liste altgriechischer Mathematiker, die ursprünglich dem Werke des Eudemos über die Geschichte der Geometrie entstammt, uns aber lediglich durch die von dem Neuplatoniker Proklos in seinen Euklid-Commentar aufgenommenen Bestandtheile bekannt ist.

Vorliebe die philosophische Basis der Mathematik zum Gegenstande seines Studiums machte. Wir erwähnen als für uns bemerkenswerth nur der Stellen im „Theaetet" (s. o.) und in der „Epinomis", welche Rothlauf sogar zu der Ueberzeugung brachte 9), dass Platon auch vom Kubisch-Irrationalen Kenntniss gehabt habe, und sodann der merkwürdigen Betrachtung im „Timaeos", durch welche die Wurzel eines Produktes aus sechs Faktoren als irrational dargethan wird, sofern nicht etwa je zwei dieser Faktoren einander gleich werden 10). Allein Platon ging anscheinend noch einen gewissen Schritt weiter, indem er sich nicht mit dieser allgemeinen Erkenntniss begnügte, sondern in einem Spezialfall wenigstens die Möglichkeit einer approximativen Ersetzung irrationaler durch rationale Zahlen in's Auge fasste. Im achten Buche seiner berühmten politischen Abhandlung „vom Staate" erörtert er die Beschaffenheit einer gewissen ganzen Zahl, der er eine übersinnliche Einwirkung auf das staatsbürgerliche Leben zuschreibt, und die unter dem Namen „platonische Heirathszahl" eine Menge der verschiedenartigsten Deutungen hervorgerufen hat*). Der bezügliche Text ist eben ein verderbter und schwer lesbarer, doch sind alle Ausleger über einen bestimmten Passus desselben einig, und dieser Passus ist es allein, mit welchem wir hier uns zu beschäftigen haben. Wird in einem Quadrate von der Seite 5 die Diagonale gezogen, so ist dieselbe $= \sqrt{50}$, also irrational; wird von dieser Zahl 50 eine Einheit abgezogen, so erhält man die Rationalzahl $\sqrt{49} = 7$, werden dagegen zwei Einheiten in Abzug gebracht, so ergiebt sich wiederum eine Irrationalzahl, nämlich $\sqrt{48}$. Diess ungefähr ist der Sinn der platonischen Stelle, an welche dann Cantor 13) noch die folgenden Ausführungen knüpft: „Platon hat, wie wir sehen, unzweifelhaft gewusst, dass $\sqrt{50}$ oder $5\sqrt{2}$ nur wenig von 7 sich unterscheidet. Ist er so weit gegangen, in der Praxis des Rechnens $\sqrt{2}$ annähernd gleich $\frac{7}{5}$ zu setzen? Darüber fehlt uns die Sicherheit, aber das steht fest, dass jenes Bewusstsein bei Platonikern und deren Schülern sich fortwährend erhalten hat." Ein Ausspruch des Proklos, auf welchen wir eben von Cantor hingewiesen werden, scheint zu Gunsten dieser Annahme zu sprechen: dieser gelehrte Scholiast sagt nämlich, es gäbe keine dem Doppelten irgend einer Quadratzahl genau gleiche Quadratzahl, wohl aber sei $2 \,.\, 5^2$ nur um 1

*) Man kann hierzu die erst vor Kurzem erschienene Monographie von Dupuis 11) oder auch einen Aufsatz 12) des Schreibers dieser Zeilen vergleichen. Dupuis giebt ausser einer neuen, sehr geistreichen Hypothese über den wahren Werth der mystischen Zahl auch eine umfassende Uebersicht über die zahlreicheu früheren Erklärungsversuche, und diese Uebersicht ist in der zweitgenannten Arbeit bis auf die neueste Zeit ausgedehnt und zugleich mit einer Aufzählung der durch Dupuis' Interpretation veranlassten Kritiken verbunden worden.

von 7 verschieden 14). Da nun Proklos, der mit $\frac{7}{5}$ als mit einem Näherungswerthe von $\sqrt{2}$ zu rechnen gewohnt ist, gleichwohl einer ganz an diejenige Platon's anklingenden Ausdrucksweise sich bedient, so mag man wohl vermuthen, der letztere sei sich ebenfalls völlig des Sachverhaltes bewusst gewesen.

Jedenfalls aber ist für den nächsten Zeitraum von irgendwelchen Bemühungen, Irrationalzahlen wirklich nach Thunlichkeit auszurechnen, nichts zu verzeichnen. Wohl aber machte die Theorie und begriffliche Durchbildung anerkennenswerthe Fortschritte, Aristoteles gab einen sinnreichen Beweis für die Thatsache, dass α^2 nicht gleich $2\beta^2$ sein kann 15), dabei vielleicht auf einen bereits vorgefundenen Gedankengang Bezug nehmend. Eudoxos, der universellste Denker unter den älteren hellenischen Geometern, begründete die Proportionenlehre in systematischer Form, und zwar wird uns in dem sogenannten „Scholion des Adelos" ausdrücklich berichtet, dass er darauf gesehen habe, seinen Beweisen für rationale und irrationale Grössen gleiche Schärfe zu verleihen 16). Auf den Schultern dieser seiner sämmtlichen Vorgänger stehend, errichtete endlich Euklides sein berühmtes Lehrgebäude, in welchem auch die Lehre von den irrationalen Strecken resp. Zahlen eine vollkommen entsprechende Unterkunft fand. Das zehnte Buch der „Elemente", obwohl gewiss das wenigst gelesene von allen, trägt trotzdem vielleicht am Meisten den Stempel euklidischer Originalität. Was wir „irrational" nennen, führt bei Euklid allerdings den Namen „incommensurabel", und sein ἄλογος hat einen etwas anderen Sinn, als bei den späteren Arithmetikern des Alterthums, indess dürfen wir doch das bezügliche Buch als das Organon der antiken Lehre vom Irrationalen mit Recht bezeichnen. Nesselmann, auf dessen treffliche Inhalts-Analyse 17) wir hier verweisen müssen, bemerkt am Schlusse derselben 18): „Diese Formeln, welche wir meistens aus sehr complicirten und in einander geschobenen Quadratwurzeln gebildet in unserer Darstellung vor Augen gestellt haben, behandelt Euklid, ohne auch nur einer Quadratwurzel zu erwähnen." Darin jedoch hat Nesselmann (a. a. O.) Unrecht, dass er annimmt, die abstrakte Behandlung des Irrationalen habe nach Euklid vollständig brach gelegen und im Alterthum selbst gar keine Förderung mehr erfahren. Im Jahre 1853, also elf Jahre nach Veröffentlichung des Nesselmann'schen Buches, machte Woepcke, wie aus dem Berichte der zur Prüfung der Einsendung niedergesetzten Mitglieder Lamé und Chasles hervorgeht 19), der Pariser Akademie die Mittheilung, dass er in der arabischen Uebersetzung eines gewissen Abû Othmân von Damaskus einen Commentar zum zehnten Buche des Euklides aufgefunden habe, der von einem gewissen Valens (griechisch Βάλης), vermuthlich dem bekannten Astronomen Vettius Valens im II. nachchristlichen

Jahrhundert, herrühre. Darin sei auch von einer bis dahin unbekannten Arbeit des Apollonius Pergaeus über irrationale Grössen die Rede, und zwar stelle derselbe den ἄλογοι des Euklides als etwas Neues seine ἄλογοι ἄτακτοι gegenüber. Es scheine die betreffende Verallgemeinerung eine zwiefache zu sein, indem Apollonius nicht mehr blos, wie sein Vorgänger, Binome von der Form $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, sondern auch Binome $(\sqrt[m]{a} + \sqrt[n]{b})$ und weiterhin willkürliche Polynome aus Wurzelgrössen der Betrachtung unterzogen habe. Unter dem Titel „Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles, d'après des indications tirées d'un manuscrit arabe" reichte dann Woepcke seine tief durchdachte Divination der Akademie ein, die beiden früheren Ausschussmitglieder statteten ihren Auftraggebern einen äusserst günstig lautenden Bericht darüber ab 20) und veranlassten den Abdruck im „Recueil des savants étrangers." Cantor meint 21), aller Scharfsinn des Bearbeiters habe der ursprünglichen und höchst mangelhaften Darlegung des Valens nicht zu dem wünschenswerthen Grade der Sicherheit verhelfen können, und das ist gewiss wahr, indessen hat der Fund Woepcke's doch soviel unter allen Umständen bewiesen, dass Nesselmann's Ansicht (s. o.), zwischen Euklides und Pacioli habe sich Niemand mehr unter principiellen Gesichtspunkten mit der Lehre vom Irrationalen beschäftigt, nicht haltbar ist. —

Immerhin ist soviel wahr, dass die sechste Rechnungsoperation, die inverse des Potenzirens, von den griechischen Mathematikern der grossen Mehrzahl nach wesentlich anders aufgefasst ward, als von den zwei abstraktesten Denkern Euklides und Apollonius. Zwei verschiedene Richtungen sind hier deutlich zu unterscheiden. Da mit den Wurzelgrössen auch im besten Falle nur schwer und unbequem zu rechnen war, so suchten die mehr theoretisch angelegten Geister nach Rechnungsmethoden, durch welche ein für allemal und grundsätzlich das Irrationale überhaupt ausgeschlossen werden sollte, und diesen Bestrebungen, als deren Anfänge des Pythagoras und Platon Vorschläge zur Bildung rationaler Dreiecke anzusehen sind, dankte eine neue, schöne Disciplin, die unbestimmte Analytik, ihre Entstehung und Ausbildung.*) Andere Gelehrte wieder, die nicht sowohl

*) Xylander, der im Jahre 1575 zuerst in Deutschland eine Diophant-Uebersetzung herausgab, schildert in sehr bezeichnender Weise seine Verwunderung über die eigenartigen Betrachtungen des Arithmetikers. Er habe, nachdem er das zehnte euklidische Buch und alle neueren Arbeiten über „surdische" Zahlen sorgfältig studirt hatte, sich nunmehr im Besitze aller Kenntnisse geglaubt, deren man zum Lesen der alten mathematischen Klassiker bedürfe, und nun müsse er sich überzeugen, dass ihm das Alles beim Diophant gar nichts helfe, da derselbe alle irrationalen Zahlen zu vermeiden lehre. Diese seine Wahrnehmung habe ihn sehr unangenehm enttäuscht 22).

Arithmetik als vielmehr Logistik (Rechenkunst) treiben und arithmetische Anwendungen auf Geometrie, Geodäsie, Astronomie oder Mechanik machen wollten, mussten darauf ausgehen, das Irrationale nicht sowohl zu eliminiren, weil diess in der Praxis doch nur ganz ausnahmsweise anging, als vielmehr es durch rationale Näherungswerthe mit möglichst geringem Fehler zu ersetzen. Alles das nun, was auf diesem Gebiete einer annähernden thatsächlichen Berechnung quadratischer Irrationalitäten während des ganzen Alterthums geleistet worden ist, suchen wir in den folgenden Paragraphen zusammenzustellen.

§. 2. *Die Quadratwurzeln des Archimedes.* Der erste griechische Mathematiker, der, was keiner vor ihm gethan, mit irrationalen Grössen rechnen musste und sich nicht damit begnügen konnte, über dieselben zu spekuliren, war Archimedes. Wie man weiss, hat sich derselbe in seiner *κύκλου μέτρησις* die Aufgabe gestellt, die Seiten gewisser um und in einen Kreis beschriebener regelmässiger Vielecke in Theilen des Kreishalbmessers auszudrücken. Bekanntlich ist, wenn AC (Fig. 1) diesen Radius r, BC die halbe Seite $\frac{a}{2}$ des umbeschriebenen regelmässigen Sechseckes bedeutet,

$$r : \frac{a}{2} = \sqrt{3} : 1.$$

Archimedes kann hier also nicht umhin, die Quadratwurzel durch eine rechnerischer Behandlung zugänglichere Zahl zu ersetzen 24), und da er durch einen für uns vorläufig noch ganz verborgenen Gedankengang gefunden hat, dass $r : \frac{a}{2}$ ein wenig grösser als $265 : 153$ ist, so substituirt er obiger Proportion die mit einer Gleichung sehr nahe zusammentreffende Ungleichung

$$\text{I. } r : \frac{a}{2} > 265 : 153.$$

Da ferner $a : \frac{a}{2} = 306 : 153$, so findet er durch die den Griechen sehr geläufige Zusammensetzung der Verhältnisse

$$(r + a) : \frac{a}{2} > 571 : 153.$$

Wird dann D auf BC so gewählt, dass $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$ wird, so ist nach einem bekannten Elementarsatze

$$\text{II. } r : CD = (r + a) : \frac{a}{2} > 571 : 153.$$

Um den nämlichen Satz ein zweitesmal anwenden zu können, nachdem $\sphericalangle CAD$ durch die Gerade AE halbirt ist, berechnet Archimedes zunächst

$$r^2 : \overline{CD}^2 > 571^2 : 153^2,$$

$$(r^2 + \overline{CD}^2) : \overline{CD}^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2,$$

und, mit Zuziehung des pythagoräischen Lehrsatzes,

$$\overline{AD}^2 : \overline{CD}^2 > 349450 : 153^2.$$

Jetzt müsste sonach $\sqrt{349450}$ ermittelt werden; Archimed weiss, dass diese Irrationalzahl nur wenig grösser als $\left(591 + \frac{1}{8}\right)$ ist, und hat mithin

$$AD : CD > 591\,\frac{1}{8} : 153$$

erhalten. Durch seine Proportionen erhält er aber auch

$$(r + AD) : CD = r : CE$$

und durch erneute Zusammensetzung, mit Rücksicht auf II.,

$$\text{III}\,.\, r : CE = 1162\,\frac{1}{8} : 153.$$

Mit Hülfe dieser 3 Proportionen I, II, III . . . lassen sich die Seiten des umbeschriebenen regulären Sechseckes, Zwölfeckes, Vierundzwanzigeckes u. s. w. lediglich durch den Radius r ausdrücken, und identificirt man etwa den Umfang des $3 \,.\, 2^n$-Eckes mit der Kreisperipherie selbst, so findet man — modern gesprochen — durch Division mit $2r$ die Zahl π selbst, resp. eine obere Grenze derselben. Der grosse Syrakusaner ging bis zum Sechsundneunzigeck und erhielt so $\pi < 3\,\frac{10}{70}$; dabei hatte er noch mehrere Quadratwurzeln auszuziehen. Nachdem die obere Grenze gewonnen war, fand Archimedes durch eine Reihe analoger Schlüsse und analoger Wurzelausziehungen 24) auch die untere Grenze, indem er $\pi > 3\,\frac{10}{71}$ setzte; im Ganzen musste er auf diese Weise acht Quadratwurzeln durch approximirte Werthe ersetzen, und zwar fand er — das Zeichen $\sim$ soll nach Cantor's Vorgang 25) für „annähernd gleich" gebraucht werden — nachstehende Werthe:

$$\sqrt{3} \sim \frac{265}{153}; \; \sqrt{349450} \sim 591\,\frac{1}{8}; \; \sqrt{1373943\,\frac{33}{64}} \sim 1172\,\frac{1}{8};$$

$$\sqrt{5472132\,\frac{1}{16}} \sim 2339\,\frac{1}{4}, \; \sqrt{9082321} \sim 3013\,\frac{3}{4}, \; \sqrt{3380929} \sim 1838\,\frac{9}{11};$$

$$\sqrt{1018405} \sim 1009\,\frac{1}{6}, \; \sqrt{4069284\,\frac{1}{36}} \sim 2017\,\frac{1}{4}.$$

Ausserdem giebt er auch für $\sqrt{3}$ noch einen zweiten Näherungswerth, indem er

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

setzt. Was die Genauigkeit dieser verschiedenen Zahlen anlangt, so ist dieselbe eine sehr verschiedene 26). So ist z. B. $2339\,\frac{1}{4}$ ein sehr guter

Werth, dagegen wäre $591\frac{1}{7}$ weit exakter als $591\frac{1}{8}$ und doch auch, wie gefordert wird, $< \sqrt{349450}$. Wir enthalten uns, an dieser Stelle schon näher auf diesen Punkt einzugehen, da wir sonst kaum vermeiden könnten, auch die erst später zu diskutirende Frage, wie denn wohl Archimedes zu seinen Zahlwerthen gelangt sei, vorgreifend mit zu behandeln. Nur dessen sei noch gedacht, dass aus antiken Quellen gerade über jene Frage nicht der allermindeste Aufschluss zu erholen ist. Der Commentator Eutokios begnügt sich nämlich, die ungefähre Richtigkeit dieser Näherungswerthe dadurch in sehr hausbackener Weise nachzuweisen 27), dass er dieselben sämmtlich direkt in's Quadrat erhebt und so seinen Lesern zwar die nothwendigste Beruhigung, gewiss aber nicht wissenschaftliche Befriedigung verschafft. Zu seiner Rechtfertigung dient ihm eine kurze Erklärung, welche wir nach Nesselmann 28) hier wiedergeben wollen: „Wie man aber eine Wurzel findet, deren Quadrat einer gegebenen Zahl sehr nahe gleichkommt, ist von Heron in den *μετρικοῖς* und von Pappos, Theon und Anderen, welche die *μεγάλη σύνταξις* von Claudius Ptolemaeus commentirt haben, gelehrt worden. Daher haben wir nicht nöthig, Untersuchungen hierüber anzustellen, die Freunde der Wissenschaft bei Jenen nachsehen können." Leider ist dieser Trost für uns nutzlos, denn die bezüglichen Arbeiten von Heron und Pappos — wenn sie anders wirklich in dem von Eutokios angegebenen Sinne vorhanden waren — sind uns verloren gegangen, und wie wenig des Theon allerdings auf uns gekommene Schrift gerade die vorwürfige Frage zu fördern vermag, wird uns später klar werden. Auch eine andere Notiz des Commentators kann höchstens unser Bedauern erregen, so wichtige Dinge wahrscheinlich für immer verloren geben zu müssen. Er sagt nämlich später noch 29), ein gewisser Poros von Nicaea habe dem Archimedes dessen mangelhafte Bestimmung der Zahl π zum Vorwurfe gemacht und dem gegenüber seinen Lehrer Philon Gadarensis gerühmt, welcher in seinem Buche *κηρία* verfeinerte Rechnungsmethoden auf diess Problem anzuwenden gelehrt habe. Von all' dem wissen wir leider gar nichts Genaueres, und nicht besser steht es mit unserer Kenntniss von den Leistungen eines gewissen Magnus, der ebenfalls auf diesem Felde thätig gewesen sein soll 30).

§. 3. *Aristarch von Samos.* Ein Zeitgenosse des Archimedes war der bekannte Astronom Aristarch, dessen Blüthezeit jedenfalls in die erste Hälfte des dritten vorchristlichen Jahrhunderts fällt. Von seinen beiden Schriften ist die eine, in welcher er die übliche geometrische Planetentheorie angriff, nicht auf uns gekommen, denn was Roberval unter dem Namen „Aristarchi Samii de mundi systemate libellus" als ein griechisches Originalwerk herausgab, ist zu verschiedenen Zeiten von Torricelli, Weidler und Henri Martin

als eine untergeschobene Arbeit erkannt worden 31). Dagegen besitzen wir das unzweifelhaft ächte Werk *περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης* des Aristarchos, welches im Alterthum ein Hauptstück in der unter dem Namen *ὁ μικρὸς ἀστρονομούμενος* bekannten Lehrbüchersammlung ausmachte, und zwar ward dieses Buch zuerst von Wallis in der Ursprache herausgegeben*). Die siebente Proposition 33) ist es, mit welcher wir hier es zu thun haben. Aristarch erörtert alldort sein bekanntes schönes Verfahren, die Entfernung der Erde von der Sonne gerade in dem Momente zu bestimmen, wenn der Mond halb erleuchtet und das Dreieck Erde-Mond-Sonne im Mond rechtwinklig ist. Durch direkte Beobachtung glaubt Aristarch den Dreieckswinkel an der Erde gleich 87^0 — freilich sehr viel zu klein — gefunden zu haben und berechnet dann weiter den gesuchten Abstand der Erde von der Sonne

$$a = b \sec 87^0 = b \operatorname{cosec} 3^0,$$

wenn a die Distanz ♁☉, b die Distanz ♁☾ bedeutet.**) Fig. 2 stellt uns das bezügliche Verfahren vor Augen, welches eben auch für die Geschichte des Irrationalen eine hohe Bedeutung besitzt; A bedeutet die ☉, C die ♁ B den ☾. Über AC wird das Quadrat $ADEC$ beschrieben und ausser der Diagonale CD noch die Halbirungslinie CF des $\sphericalangle DCE = 45^0$ gezogen. Die verlängerte CB schneidet die Quadratseite DE in G, $\sphericalangle GCE$ ist der Voraussetzung gemäss $= 3^0$. Die ähnlichen Dreiecke ABC und CGE ergeben

$$\sec 87^0 = \frac{AC}{BC} = \left(\frac{GC}{GE} > \frac{HC}{GE}\right),$$

indem unter H der Durchschnittspunkt von CG mit einem dem Quadrate einbeschriebenen Quadranten verstanden wird. Des Ferneren ist

$$\frac{HC}{GE} = \frac{DE}{GE} = \frac{DE}{FE} \cdot \frac{FE}{GE}.$$

Nunmehr kommt die Bestimmung dieser letzten beiden Verhältnisse an die Reihe. Bezüglich des zweiten Verhältnisses wendet Aristarch — natürlich in geometrischer Einkleidung — den Satz an, dass für kleine Winkel die trigonometrischen Tangenten sich wie die Bögen verhalten; demgemäss ist

$$\frac{FE}{GE} \sim \left(\frac{22\frac{1}{2}}{3} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}\right).$$

*) Nach R. Wolf, dessen Darstellung wir bei dieser Sache überhaupt in erster Linie folgen, ist neuerdings auch eine französische Ausgabe des aristarchischen Traktates von Fortia d'Urban und eine deutsche Ausgabe von Nokk besorgt worden 32).

**) Vgl. hierzu einen das aristarchische Problem mit den Mitteln der neueren Analysis behandelnden Aufsatz von Grunert 34).

An Stelle des Zeichens $\sim$ wäre eigentlich $>$ zu setzen, wie es ja auch sein muss, weil es zunächst auf die Angabe einer oberen Grenze für sec 87^0 ankommt. Zur Bestimmung von $DE : FE$ dient dagegen, ganz wie bei Archimedes (§. 2) das Theorem, dass, wenn in einem Dreieck ein Winkel halbirt wird, die auf der Gegenseite entstehenden Abschnitte sich wie die anstossenden Seiten verhalten. Man hat nämlich

$$\frac{DE}{FE} = \frac{FE + DF}{FE} = 1 + \frac{DF}{FE} = 1 + \frac{CD}{CE},$$

oder, da $\overline{CD}^2 = 2 \cdot \overline{CE}^2$ ist,

$$\frac{DE}{FE} = 1 + \sqrt{2}.$$

Der praktische Astronom sieht sich nun in die Nothwendigkeit versetzt, mit dieser Irrationalzahl zu rechnen, und setzt demzufolge

$$\frac{DE}{FE} \sim \left(1 + \frac{7}{5} = \frac{36}{15}\right).$$

Durch Zusammensetzen der beiden Verhältnisse ergiebt sich

$$\frac{HC}{GE} > \left(\frac{15}{2} \cdot \frac{36}{15} = \frac{36}{2} = 18\right),$$

und sec $87^0 > 18$. Da Aristarch ferner durch ein noch ungleich einfacheres Verfahren sec $87^0 < 20$ ermittelt hat, so kann er mit völlig genügender Genauigkeit sec $87^0 = 19$ und die Entfernung der Erde von der Sonne gleich dem Neunzehnfachen der Entfernung der Erde vom Monde annehmen.

Wir haben in §. 1 gesehen, dass möglicherweise schon Platon eine Ahnung davon besass, der unechte Bruch $\frac{7}{5}$ lasse sich ohne erheblichen Fehler der Irrationalzahl $\sqrt{2}$ substituiren. Nunmehr erhalten wir die volle Gewissheit, dass ziemlich zu derselben Zeit, in welcher Archimedes $\sqrt{3}$ in rationale Grenzen einzuschliessen lehrte, ein anderer griechischer Mathematiker einen ähnlichen Fortschritt betreffs $\sqrt{2}$ vollzog und auf seine Wahrnehmung eine äusserst elegante Construktion begründete, an welcher nur lebhaft zu bedauern ist, dass sie, auf unrichtiger thatsächlicher Basis beruhend, der astronomischen Wissenschaft selbst keinen eigentlichen Vortheil bringen konnte.

§. 4. *Heron Alexandrinus.* Ganz ebenso wie Archimed für eine geometrische, Aristarch für eine astronomische Frage bedurfte Heron als Geodät bei den verschiedensten Gelegenheiten quadratischer Irrationalitäten; wir wollen dabei gleich erklären, dass wir im Anschluss an die für diesen Autor maassgebenden Forschungen Cantor's alle die verschiedenen Mathematiker, deren unter diesem Namen Erwähnung geschieht, in der Person des älteren Heron (um 100 v. Chr.) vereinigt annehmen 35). Obwohl auch er dem geometrischen Geiste seines Volkes, welches bei der Lösung einer Aufgabe

das plastische Bild des Gesuchten in Form einer construirten Linie oder Fläche mehr befriedigte, als eine herausgerechnete Zahl, nach Möglichkeit Rechnung trug, so z. B. bei seiner geometrischen Darstellung von $\sqrt[3]{2}$ im delischen Problem 36), so nahm er doch auch nicht den mindesten Anstand, mit irrationalen Zahlen im eigentlichsten Wortsinne zu rechnen. Heron's Arbeiten führten ihn auf Quadratwurzeln in allen möglichen Gestalten, sogar das Imaginäre liess ihn einmal ein fehlerhafter Diorismus streifen 37), und schon die nach ihm benannte Dreiecksformel 38)

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

kann beweisen, dass ihm Ausdrücke dieser Art durchaus vertraut waren, obgleich er allerdings für die gewöhnlichen Feldmesser nicht ungerne auch Näherungsformeln ohne Wurzeln an die Hand gab, mochte er auch persönlich von deren unzureichender Genauigkeit voll überzeugt sein 39). Ja Paul Tannery, ein Gelehrter, der neben Cantor und Hultsch neuerdings wohl am Meisten zur Vervollkommnung unserer Kenntnisse vom Wesen griechischer Mathematik beitrug, hebt sogar hervor, dass Heron so wenig vor den Wurzeln sich scheute, dass er sogar Formeln, die sich ohne grosse Schwierigkeit rational hätten herstellen lassen, mit irrationalen Bestandtheilen verbunden lässt. Tannery hat dabei den Umstand 40) im Auge, dass aus der von Heron für die Fläche F eines Kreissegmentes gegebenen Formel (s Sehne, h Sagitte)

$$F = \frac{(s+h)\,h}{2} + \frac{1}{14}\cdot\frac{s^2}{4}$$

nicht die völlig genügende rationale Näherungsformel

$$b = s + h + \frac{h\left(1 - \frac{5}{28}\cdot\frac{s^2}{h^2}\right)}{1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{s^2}{h^2}}$$

für den Kreisbogen b hergeleitet wird; vielmehr setzt Heron entweder

$$b = \frac{h}{4} + \sqrt{s^2 + 4\,h^2}$$

oder

$$b = \sqrt{s^2 + 4\,h^2} + \frac{h}{s}\left(\sqrt{s^2 + 4\,h^2} - s\right).$$

Wie nun freilich der alexandrinische Geometer im einzelnen Falle seine Wurzeln ausgerechnet habe, darüber können wir aus Quellenschriften nichts mittheilen. „Wenn wir", sagt Cantor 41) „über die Methode der Quadratwurzelausziehung, über welche Heron, wie wir wissen, schrieb, nichts berichten, so unterbleibt es nur aus bedauernswerther Nothwendigkeit, weil diese zu Eutokios' Zeiten allgemein zugänglichen Kapitel aus dem geo-

metrischen Werke des Heron, als dessen Bestandtheile sie von Eutokios ausdrücklich bezeichnet werden, heute durchaus verschwunden sind. Es muss jedenfalls eine gute Methode gewesen sein, über welche Heron verfügte, da die bei ihm massenhaft auftretenden Quadratwurzelausziehungen sehr nahe richtig sind." Wir hoffen, im dritten Kapitel doch einigen Ersatz für den fehlenden Urtext beibringen zu können, doch ist es, wenn unsere spätere Darlegung eine übersichtliche werden soll, erforderlich, gleich hier das vorhandene Material von Thatsachen zusammenzubringen. Wir schliessen uns zu dem Ende an Tannery's Abhandlung an, in welcher alle bei Heron vorkommenden Quadratwurzeln in zwei Gruppen eingetheilt werden, deren erste wir etwa die geometrische, deren zweite 42) wir die goniometrische nennen wollen. Der französische Historiker theilt dann wieder aus gewissen sachlichen Gründen jede dieser Gruppen in gewisse Unterabtheilungen, und wir wollen ihm auch in dieser den Überblick wesentlich erleichternden Anordnung folgen, obwohl die Zweckmässigkeit der Klassifikation uns erst später einleuchten wird. Die uns interessirenden Stellen finden sich theils in der sogenannten Geometrie, theils in der sogenannten Stereometrie, theils endlich im Buche vom Landbau (liber geeponicus). Alle geometrischen Schriften Heron's sind von Hultsch in seiner bekannten trefflichen Ausgabe 43) vereinigt worden, auf welche im Folgenden stets Bezug genommen wird.

Geometrische Gruppe. Abtheilung I. Es ist 44)

$$\sqrt{63} \sim 8 - \frac{1}{16}.$$

Es ist 45)

$$\sqrt{1125} \sim 33 + \frac{1}{2} + \frac{1}{22}.$$

Es ist 46)

$$\sqrt{1081} \sim 32 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}.$$

Es ist 47)

$$\sqrt{50} \sim 7 + \frac{1}{14}.$$

Es ist 48)

$$\sqrt{75} \sim 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

Abtheilung II. Es ist 49)

$$\sqrt{58 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \sim 7 + \frac{2}{3}.$$

Es ist 50)

$$\sqrt{444 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}} \sim 21 + \frac{1}{12}.$$

Es ist 51)

$$\sqrt{3400} \sim 58 + \frac{1}{3}.$$

Es ist 52)

$$\sqrt{54} \sim 7 + \frac{1}{3}.$$

Abtheilung III. Es ist 53)

$$\sqrt{135} \sim 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}.$$

Es ist 54)

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}.$$

Es ist 55)

$$\sqrt{6300} \sim 79 + \frac{1}{3} + \frac{1}{34} + \frac{1}{102}.$$

Es ist 56)

$$\sqrt{1575} \sim 39 + \frac{2}{3} + \frac{1}{51}.$$

Es ist 57)

$$\sqrt{216} \sim 14 + \frac{2}{3} + \frac{1}{33}.$$

Abtheilung IV. Es ist 58)

$$\sqrt{356 + \frac{1}{18}} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}.$$

Es ist 59)

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Abtheilung V. Es ist 60)

$$\sqrt{5000} \sim 70 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Es ist 61)

$$\sqrt{720} \sim 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Es ist 62)

$$\sqrt{208} \sim 14 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}.$$

Es ist 63)

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{9}.$$

Abtheilung VI. Es ist 64)

$$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \sim 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}.$$

Es ist 65)

$$\sqrt{886 - \frac{1}{16}} \sim 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68}.$$

Abtheilung VII. Es ist 66)

$$\sqrt{108} \sim 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Es ist 67)

$$\sqrt{2460 + \frac{15}{16}} \sim 49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51}.$$

Es ist 68)

$$\sqrt{615 + \frac{15}{64}} \sim 24 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{51} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}.$$

Goniometrische Gruppe. Heron ist der älteste Geometer, welcher in bewusster Weise trigonometrische Aufgaben in der Ebene auflöste, denn was Hipparch, über welchen der nächste Paragraph zu vergleichen ist, auf diesem Gebiete leistete, gehört ganz der Raumtrigonometrie an. Heron dagegen ging mit Klarheit und Entschiedenheit darauf aus, den Flächeninhalt jedes regulären Vielecks — bis zu einer gewissen Grenze hin — als Funktion der Seite darzustellen, und indem er also den Flächeninhalt $F_n = a_n^2 \cdot \text{Const.}$ setzte, unter a_n die Seite verstanden, musste er diese Constante als eine trigonometrische Funktion darstellen, und in der That ist

$$\text{Const.} = \frac{n}{4} \cdot \text{cotang} \frac{180^0}{n}.$$

Da wenigstens einzelne dieser Formeln in allen drei als echt heronisch anerkannten Büchern vorkommen, so glaubt Cantor 69) diese zur Zeit bekannten ältesten trigonometrischen*) Formeln auch wirklich auf den alexandrinischen Geometer zurückführen zu müssen. Tannery theilt dieselben in vier Unter-Gruppen, je nachdem das obige $n = 3 . 2^m$ oder $= 2 . 2^m$ oder $= 5 . 2^m$ oder gleich einer anderen Zahl ist. Folgendes Schema entspricht Tannery's Eintheilungsprincip, und zwar stehen zur Linken die heronischen Näherungswerthe, zur Rechten dagegen die genauen Werthe, so wie sie mit Hülfe logarithmischer Tafeln berechnet worden sind.

Abtheilung I. $F_3 \sim \frac{13}{30} a_3^2 \sim 0{,}433333\, a_3^2$, $\quad F_3 = 0{,}433013\, a_3^2$;

$F_6 \sim \frac{13}{5} a_6^2 \sim 2{,}6\, a_6^2$, $\quad F_6 = 2{,}598176\, a_6^2$;

$F_{12} \sim \frac{45}{4} a_{12}^2 \sim 11{,}25\, a_{12}^2$, $\quad F_{12} = 11{,}196152\, a_{12}^2$.

Abtheilung II. $F_4 = a_4^2$, $\quad F_4 = a_4^2$;

$F_8 \sim \frac{29}{6} a_8^2 \sim 4{,}833333\, a_8^2$, $\quad F_8 = 4{,}828427\, a_8^2$.

Abtheilung III. $\left\{\begin{array}{l} F_5 \sim \frac{5}{3} a_5^2 \sim 1{,}666666\, a_5^2, \\ F_5 \sim \frac{12}{7} a_5^2 \sim 1{,}714285\, a_5^2, \end{array}\right.$ $\quad F_5 = 1{,}720477\, a_5^2$;

$F_{10} \sim \frac{15}{2} a_{10}^2 \sim 7{,}5\, a_{10}^2$, $\quad F_{10} = 7{,}694208\, a_{10}^2$.

---

*) Man müsste denn als noch ältere Spur trigonometrischer Rechnung jenes

Abtheilung IV. $F_7 \sim \frac{43}{12} a_7^2 \sim 3{,}583333\, a_7^2$, $F_7 = 3{,}633910\, a_7^2$;

$$\begin{cases} F_9 \sim \frac{51}{8} a_9^2 \sim 6{,}375\, a_9^2, \\ F_9 \sim \frac{19}{3} a_9^2 \sim 6{,}333333\, a_9^2, \end{cases} \qquad F_9 = 6{,}181824\, a_9^2;$$

$$F_{11} \sim \frac{66}{7} a_{11}^2 \sim 9{,}421571\, a_{11}^2, \quad F_{11} = 9{,}365502\, a_{11}^2.$$

Auch über diese merkwürdigen Näherungsformeln können wir hier keine thatsächlichen Aufklärungen beibringen, da sie im Alterthum eine ganz isolirte Stellung eingenommen zu haben und von den späteren griechischen Mathematikern nicht weiter beachtet worden zu sein scheinen.

Von diesen Näherungswerthen dürfte besonders jener für

$$\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$$

bemerkenswerth sein, der aus $(F_3 = \frac{1}{4} a_3^2 \sqrt{3}) \sim \frac{13}{30} a_3^2$ hervorgeht. Mit ihm werden wir uns in der Folge sehr eingehend zu befassen haben. Für $\sqrt{2}$ findet sich ein Rationalwerth bei Heron wenigstens nicht unmittelbar, wohl aber hat Cantor 71) mittelst einer sehr scharfsinnigen Ueberlegung es wenigstens sehr wahrscheinlich gemacht, dass Jener die uns von Platon und Aristarch her bekannte Relation $\sqrt{2} \sim \frac{7}{5}$ gekannt hat. Es wird nämlich im liber geeponicus die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes von den Katheten 30 und 40 das einemal richtig 72) $= \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$, das anderemal 73) $= 5 \cdot \frac{1}{7} \cdot (30 + 40)$ gesetzt, was natürlich keinen rechten Sinn hat. Einen gewissen Sinn ergäbe, so meint Cantor (a. a. O.), die Formel nur dann, wenn man annehme, dass eine falsche Verallgemeinerung einer am gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck bemerkten Eigenschaft vorliege. Man habe sich überzeugt, dass wenn zwei Katheten a und b einander gleich sind, die Formel für die Hypotenuse

$$c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = (a + a) \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}$$

sei und habe daraus den falschen Schluss gezogen, es sei für jedes rechtwinklige Dreieck

$$c = 5 \cdot \frac{1}{7} (a + b) \cdot$$

Heron hat natürlich, wenn sich diess wirklich so verhält, den Sach-

---

im mathematischen Handbuch des Aegypters Aahmes 70) vorkommende Verhältniss „Seqt“ gelten lassen wollen, welches allerdings eine Winkelfunktion repräsentirte.

verhalt klar durchschaut, allein wir wissen ja, dass er auch unrichtigen Sätzen einen Platz in seinem offiziellen Lehrbuche der Feldmesskunst gönnte, sei es, weil dieselben bereits allzu eingebürgert waren, sei es, weil er wirklich den Routiniers das Ausziehen von Wurzeln möglichst ersparen wollte. Für $a \sim b$ kann ja auch der Formel ein approximativer Charakter nicht abgesprochen werden.

Einen zweiten Anklang an $\sqrt{2} \sim \frac{7}{5}$ glaubt Cantor 74) darin erblicken zu sollen, dass Heron im „Landbau“ 75) die Seite a_8 des regulären Achteckes durch den Durchmesser d des umbeschriebenen Kreises in folgender Weise ausdrückt:

$$a_8 = \frac{5}{12} d.$$

Berechnet man nämlich streng geometrisch a_8 aus d und setzt in der resultirenden Formel $\sqrt{2} \sim \frac{7}{5}$, so ergiebt sich

$$a_8 \sim \frac{5}{13} d,$$

und hieraus könnte durch ein leicht erklärliches Abschreiber-Versehen der angeblich heronische Werth entstanden sein.

Endlich ist noch anzumerken, dass Heron für die so häufig in seinen Rechnungen auftretende Quadratwurzel aus 3 mit Vorliebe den Werth (s. o.) $\frac{26}{15}$ setzt, wie diess aus verschiedenen Stellen seiner Werke hervorgeht 76). Er drückt diess entweder dadurch aus, dass er sagt, die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck sei gleich

$$1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$$

der Seite, oder dadurch, dass er, unter a diese Seite verstanden, für den Flächeninhalt dieses Dreieckes den Werth

$$a^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right)$$

angiebt. Namentlich an diese letztere Form haben sich Jene gehalten, die später aus Heron schöpften.

§. 5. *Die Sexagesimalbruchrechnung der Astronomen.* Im Anschlusse an die bei den Mesopotamiern herrschend gewordene Sitte 75), jede Zahl durch eine Reihe von der Form

$$\ldots a \,.\, 60^3 + b \,.\, 60^2 + c \,.\, 60 + d + e \,.\, \overset{-1}{60} + f \,.\, \overset{-2}{60} + g \,.\, \overset{-3}{60} + \cdots$$

darzustellen, bildeten sich die griechischen Astronomen, ganz unabhängig von den am Decimalsystem festhaltenden Vertretern der übrigen mathematischen Wissenschaften, einen selbstständigen Calcul der sechzigtheiligen

Brüche aus. Ein sehr hohes Alter kommt demselben gerade nicht zu; von Autolykos, der nicht sehr lange vor Euklid über die Auf- und Untergänge der Sterne schrieb, wissen wir auf's Bestimmteste, dass ihm die Eintheilung des Kreises in 360 Grade ganz ebenso unbekannt war, wie jede Art trigonometrischer Rechnung, und auch der gelehrte Polyhistor Eratosthenes befand sich, wie der genaueste Kenner seiner Werke, H. Berger, sehr wahrscheinlich zu machen gewusst hat, ganz im gleichen Falle 77). Hipparch muss sonach als der eigentliche Erfinder beider Neuerungen, der Trigonometrie und der astronomischen Logistik, betrachtet werden 78); nur bezüglich der letzteren könnte ihm möglicherweise der ungefähr zur gleichen Zeit lebende Hypsikles den Vorrang streitig machen. Erstere erfordert nun freilich auch Quadratwurzelausziehungen, allein die Auflösung rechtwinkliger Kugeldreiecke, über welche Hipparch nicht hinausging, lässt sich auch ohne jene bewerkstelligen, und mit ebener Trigonometrie hat er sich höchstens ganz ausnahmsweise beschäftigt.*) Jedenfalls aber berechnete er zuerst eine Tafel, welche aus einer gegebenen Sehne auf den zugehörigen Centriwinkel und umgekehrt aus dem Centriwinkel auf die Sehne zu schliessen gestattete, und dabei konnten Quadratwurzeln füglich nicht umgangen werden. Arabische Quellen, die Woepcke 81) namhaft macht, wissen auch, dass Hipparch eine Abhandlung über Theilung der Zahlen und eine zweite über Algebra (quadratische Gleichungen) verfasst habe. Derselbe muss also quadratische Irrationalitäten näherungsweise berechnet haben, und es ist nur auf's Tiefste zu bedauern, dass uns jede Kunde über das Wie fehlt. Mollweide freilich ist der Meinung 82), die von Ptolemaeus gelehrte Methode zur Construktion einer Sehnentafel sei völlig auch die des Hipparch gewesen, und ganz besonders dürfe der gleich nachher zu besprechende wichtige Näherungswerth für $\sqrt{3}$ unbedenklich als hipparchisch angesehen werden.

Treten wir jetzt den bei Ptolemaeus vorkommenden Quadratwurzeln etwas näher. Sehr gross ist die Ausbeute nicht, die wir bei ihm machen, da auch für ihn die ebene Trigonometrie nur ganz im Vorbeigehen Gegenstand des Interesses war, doch findet sich immerhin Manches vor. So ist er, um die Grösse der verfinsterten Sonnenscheibe zu bestimmen 83), ge-

---

*) Berger freilich, der mit äusserster Sorgfalt alle Nachrichten über den Astronomen von Nicaea gesammelt hat 79), erwähnt 80) bei den verschiedensten Gelegenheiten auch einer in das letztere Gebiet einschlagenden Arbeit desselben, von welcher wir nur leider gar keine Einzelheiten kennen. Eratosthenes nämlich zerlegte der Übersicht halber die Länder der γῆ οἰκουμένη in geometrische Figuren, die σφραγίδες, und Hipparch soll eben durch trigonometrische Analyse des Umfanges und Inhaltes dieser Figuren den Nachweis geführt haben, dass die Eintheilungsweise des Alexandriners eine willkürliche und unberechtigte sei.

zwungen, in einem Dreieck ABC (Fig. 3), worin $AB = 6$, $BC = 4 + \frac{28}{60}$, $\sphericalangle ACB = 90^0$ ist, die Seite AC zu berechnen und findet demgemäss

$$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{36 - \left(4 + \frac{7}{15}\right)^2}.$$

Hierbei hilft er sich nun freilich ohne grosse Bedenklichkeit, indem er $\frac{7}{15} \sim \frac{1}{2}$ und somit

$$AC \sim (\sqrt{36 - 16 - 4} = 4)$$

setzt, den Bruch $\frac{1}{4}$ obendrein vernachlässigend. Für den angestrebten Zweck war dieser Genauigkeitsgrad freilich wohl hinreichend.

In die Berechnung seiner trigonometrischen Tafel hat uns Ptolemaeus einen klaren Einblick verstattet; Ideler hat 84) diesen Calcul in einer neueren Lesern trefflich entsprechenden Form dargestellt. Da der Grundgedanke der ist, aus den zu den Centriwinkeln α und β gehörigen Sehnen chord α und chord β die Sehne chord γ der Differenz $\alpha - \beta = \gamma$ mittelst des nach Ptolemaeus benannten Satzes vom Kreisviereck zu finden, so musste anhaltend (d Kreisdurchmesser) nach der Formel

$$d \,.\, \text{chord}\, \gamma = \text{chord}\, \alpha \sqrt{d^2 - (\text{chord}\, \beta)^2} - \text{chord}\, \beta \sqrt{d^2 - (\text{chord}\, \gamma)^2}$$

gerechnet werden; Quadratwurzelausziehungen standen also recht eigentlich auf der Tagesordnung. Ausserdem kam auch gleich im Anfange vor, chord 120^0 aus chord $60^0 = r$ zu finden; diess geschieht bekanntlich mittelst der Relation

$$\text{chord}\, 120^0 = r\sqrt{3}.$$

Bei Ptolemaeus wird nun

$$\frac{\text{chord}\, 120^0}{r} = \sqrt{3} \sim \left(103 + \frac{55}{60} + \frac{23}{60^2}\right) : 60$$

gesetzt. Dieser Werth macht auf's Erste einen ganz fremdartigen Eindruck; erwägt man aber, dass die Summe der beiden in der Klammer stehenden Brüche von 1 nur um einen kaum nennenswerthen Betrag abweicht, so erhält man, worauf zuerst von Mollweide 85) aufmerksam gemacht worden zu sein scheint,

$$\sqrt{3} \sim \left(\frac{104}{60} = \frac{26}{15}\right).$$

Gerade dieser Näherungswerth, der uns an dieser Stelle zum zweitenmale begegnet (s. o. § 4), muss aber besondere Beachtung finden.

Ungleich weniger geeignet, diess zu thun, sind die übrigen bei Ptolemaeus vorkommenden Näherungswerthe, und zwar aus dem für den Autor an sich sehr rühmlichen Umstande, dass sie streng methodisch berechnet

worden sind. Und diese Methode kennen wir ganz aussergewöhnlich genau aus einer späteren griechischen Schrift. Ein im vierten Jahrhundert n. Chr. lebender Astronom, Namens Theon, hat in seinem Commentar zum Almagest das Verfahren, dessen man sich beim sechzigtheiligen Calcul zur Ausziehung von Quadratwurzeln zu bedienen pflegte, weitläufig auseinandergesetzt, und prüft man die ptolemaeischen Zahlen auf dieses Verfahren, so stimmt das Ergebniss der Art, dass es keinem Zweifel unterliegen kann, Ptolemaeus habe wirklich in dieser Art und Weise seine Berechnungen angestellt. Ehe wir jedoch zu diesem Commentator Theon uns wenden können, haben wir zuvor noch eines anderen gleichnamigen Mathematikers zu gedenken, der uns über die Quadratwurzeln bei den Alten ebenfalls Eröffnungen macht, und zwar solche, die kaum minder wichtig für den Geschichtschreiber der exakten Wissenschaften sind, als jene seines Namensvetters.

§. 6. *Theon von Smyrna.* Um 130 n. Chr. lebend — die Zeit lässt sich durch von ihm angestellte Himmelsbeobachtungen ziemlich genau festlegen —, hat Theon Smyrnaeus sich die Aufgabe gestellt, in einem besonderen Werke alle mathematischen Vorkenntnisse zu vereinigen, deren man zur Lektüre der platonischen Schriften bedarf. Dieses Werk, von dem früher nur die einzelnen Theile besonders herausgegeben worden waren, hat neuerdings eine Gesammtausgabe erfahren 86). Es besteht aus einer Arithmetik mit musikalischem Anhang und aus einer Astronomie. Im erstgenannten Theile findet sich 87) die Stelle, an welche wir anzuknüpfen haben; ihre Bedeutung speziell für die Lehre vom Irrationalen scheint zuerst von Unger 88) erkannt worden zu sein, allein diese gelegentliche Wahrnehmung war wieder ganz verschollen, und Cantor gebührt das Verdienst, von Neuem an die Bedeutung der Stelle erinnert zu haben 89).

Theon construirt am angeführten Orte gewisse Zahlen, welche er nach griechischer Sitte als „Seitenzahlen" (πλευραί) und „Diametralzahlen" (διάμετροι) kennzeichnet. Er geht aus von zwei Einheiten und bildet resp.

$$1 \cdot 1 + 1 = 2, \qquad 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

als erste Seiten- und Diametralzahl. Damit ist das Bildungsgesetz dieser Zahlen angedeutet; versteht man unter a_n und d_n bezüglich die $n$te Seiten- und Diametralzahl, so ist

$$a_{n+1} = a_n + d_n, \quad d_{n+1} = 2a_n + d_n,$$

so dass mithin $a_1 = 1$, $d_1 = 1$, $a_2 = 2$, $d_2 = 3$, $a_3 = 5$, $d_3 = 7$, $a_4 = 12$, $d_4 = 17$, $a_5 = 29$, $d_5 = 41$ u. s. w. wird. Alsdann gilt der Lehrsatz

$$d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1,$$

den Theon ausdrücklich aufstellt, allerdings ohne ihn mit einem Beweise zu versehen. Indess ist dieser letztere so ungemein einfach, dass man wohl

folgern darf, der griechische Mathematiker habe ihn gekannt und nur seiner Selbstverständlichkeit wegen nicht mitgetheilt. Diess geht aus dem Folgenden unmittelbar hervor. Man hat nämlich

$$d_n^2 - 2a_n^2 = (2a_{n-1} + d_{n-1})^2 - 2(a_{n-1} + d_{n-1})^2$$
$$= 4a_{n-1}^2 + 4a_{n-1}d_{n-1} + d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2 - 4a_{n-1}d_{n-1} - 2d_{n-1}^2$$
$$= -(d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2) = +(d_{n-2}^2 - 2a_{n-2}^2),$$

und da $d_1^2 - 2a_1^2 = -1$ ist, so ist auch die ursprüngliche Gleichung erhärtet. Diess alles wusste man schon früher, allein Cantor hat daraus den schwer anfechtbaren Schluss gezogen, dass Der, dem obiger Lehrsatz geläufig war, doch auch wissen musste, der Quotient $d_n^2 : a_n^2$ unterscheide sich nur wenig von 2, der Quotient $d_n : a_n$ also um noch weniger von $\sqrt{2}$. War dem aber so, dann wusste man auch, dass die unächten Brüche

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29} \ldots$$

eine dem wahren Werthe von $\sqrt{2}$ sich mehr und mehr nähernde Reihe bilden; und unter diesen befindet sich, als dritter, jener bequeme Bruch $\frac{7}{5}$, welchem wir bereits dreimal bei Platon, bei Aristarch, bei Heron Alexandrinus begegnet sind. Erst im nächsten Kapitel wird uns die hohe Wichtigkeit dieser eigenartigen und den griechischen Arithmetikern im Uebrigen fremden Gedankenreihe zum vollen Bewusstsein kommen. Nesselmann, dem diese Seite der Sache offenbar nicht aufgefallen ist, und der auf die Stelle deshalb auch kein so hohes Gewicht legt, in ihr sogar ursprünglich nur einen gelegentlichen Einfall Theons erblickt, kann trotzdem nicht umhin, zuzugestehen 90): „Diese Spielerei mit (geometrischen) Analogieen wird wichtiger, wenn wir sie von ihrer wissenschaftlichen Seite in's Auge fassen, und sie wird dann eine Methode, alle Auflösungen in ganzen rationalen Zahlen zu finden, deren die beiden Gleichungen

$$2t^2 + 1 = u^2 \text{ und } 2x^2 - 1 = y^2$$

fähig sind.“ Unter allen Umständen also hat die Geschichte der unbestimmten Analytik von Theon's Betrachtung Notiz zu nehmen.

Freilich macht uns dieser Mann so wenig den Eindruck eines selbstdenkenden Geistes, dass man halb und halb genöthigt ist, ihm die eigentliche Autorschaft abzusprechen. Darauf deutet auch Cantor (a. a. O) sehr bestimmt hin, ohne eine weitere Vermuthung auszusprechen; was er unterliess, hat Paul Tannery géthan, der den Keim dieser Untersuchung eben in jenen platonischen Schriften zu finden glaubt, deren Erläuterung Theon seine Schrift gewidmet hatte. In seiner eingehenden Schilderung

der platonischen Unterrichtsmethoden hebt der französische Forscher 91) die hohe Wahrscheinlichkeit der Annahme hervor, dafs man bereits zu Lebzeiten des Meisters innerhalb der Akademie mit dem Studium der unbestimmten Gleichung

$$2x^2 - y^2 = \pm 1.$$

begonnen habe und wohl auch zu einzelnen Lösungen gelangt sei, wenn auch vielleicht die Auffindung der „vollständigen" Lösung dem Theon vorbehalten bleiben müsse. „Cette solution, qui donne une série de valeurs rationelles et de plus en plus approchées pour l'incommensurable $\sqrt{2}$, était au reste très-facile à obtenir pour les anciens, en poursuivant, d'après leur procédé, l'extraction de cette racine."

§. 7. *Spätere Hinweise auf die Theon'sche Methode.* Auch der Neuplatoniker Jamblichos kennt die Seiten- und Diametralzahlen und deren Berechnung 92), indess geht das, was er darüber mittheilt, in keiner Weise über die Angaben des Theon hinaus. Ebenso scheint Proklos, für den als einen Anhänger der gleichen philosophischen Richtung diese altplatonische Theorie besonderes Interesse gehabt haben müsste, wenigstens einige Kenntniss von der Sache besessen zu haben. Wir reproduciren die Stelle, welche wir im Auge haben 93), wörtlich nach der Nesselmann'schen Uebertragung: „Es giebt zwei Arten rechtwinkliger Dreiecke, gleichschenklige und ungleichseitige; in dem gleichschenkligen ist es nicht möglich, Zahlen zu finden, welche den Seiten entsprechen; denn es giebt keine Quadratzahl, welche das Doppelte einer Quadratzahl wäre, es sei denn, dass Jemand um 1 verschiedene Zahlen meinte; so ist z. B. das Quadrat von 7 das Doppelte des Quadrats von 5 weniger 1." Es bedarf wohl kaum ausdrücklicher Hinweisung auf den Umstand, dass diess eben jene Stelle des Proklos ist, auf welche in §. 1 Bezug genommen ward, und die eben auch mit Erfolg für die Theorie Tannery's vom platonischen Ursprung der Seiten- und Diametralzahlen verwerthet werden könnte.

Es läge gewiss nahe, zu erwarten, dass in dem umfassenden Werke des Diophant, das doch eine wahrhaft erdrückende Masse von Aufgaben aus der unbestimmten Analytik enthält, auch der obige Spezialfall der jetzt — irrthümlich — so genannten Pell'schen Gleichung zur Behandlung gelangte. Dem ist jedoch nicht so*); diese originelle und elegante Lehre tritt im griechischen Alterthum nur ganz vereinzelt auf.

---

*) Beiläufig wollen wir bemerken, dass, wie schon aus den Ausführungen in §. 1 zu schliessen, die ἀριθμητικά des Diophant für uns gar keine Ausbeute gewähren. Nicht, als ob derselbe den Quadratwurzeln als solchen aus dem Wege gegangen wäre, im Gegentheile. In seiner Schrift über die Polygonalzahlen

§. 8. *Theon Alexandrinus.* Die chronologische Entwickelung führt uns nunmehr wieder zu jenem anderen Theon zurück, von welchem bereits in §. 5 in Verbindung mit den bei Ptolemaeus vorkommenden Quadratwurzeln die Rede war. Als bekannt dürfen wir also voraussetzen, dass Theon die den griechischen Astronomen eigenthümliche Methode schilderte, die zweite Wurzel aus solchen Zahlen auszuziehen, welche durch eine nach absteigenden Potenzen von 60 geordnete Reihe dargestellt sind. Ob freilich nicht bereits vor ihm, der unter Theodosius I. lebte, entsprechende Erläuterungen zum Almagest niedergeschrieben wurden, ist fraglich, denn wie wir uns aus §. 2 entsinnen, soll ja Pappos, aus dessen hochwichtiger „mathematischer Sammlung“ die arithmetischen Bestandtheile fast gänzlich ausgefallen sind, über die Ausziehung von Quadratwurzeln gehandelt haben, wahrscheinlich also auch über die des Almagestes 98). Man glaubte sogar in einem von dem Pariser Bibliothekar C. Henry herausgegebenen Bruchstück 99) den Commentar zum I. Buche der *μεγάλη σύνταξις* zu erkennen, doch selbst, wenn sich diess bestätigen sollte, vermögen wir an dieser Stelle keinen Nutzen daraus zu ziehen, denn das Fragment geht nicht über die Division hinaus. Für uns bleibt somit Theon nicht allein die Hauptquelle, sondern — von noch weit späteren Schriften abgesehen — sogar die einzige Quelle.

Theon geht, ganz wie wir, von der euklidischen Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

aus. Um $\sqrt{4500^0}$ zu erhalten, denkt er sich — wir halten uns hier an die von Nesselmann reconstruirte Figur (Fig. 4), wie auch an dessen Text 100) — ein Quadrat $ABCD$ vom Inhalt 4500 gezeichnet, sucht dann die zunächst an 4500 gelegene Quadratzahl $4489 = 67^2$, macht $AE = 67$

---

kommen sehr complicirte Wurzelausdrücke vor 94); er wusste sehr wohl die Gleichung $ax^2 + c = bx$ mittelst der Relation

$$ax - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}$$

aufzulösen 95), und Rodet hat auch 96) die früher von den Meisten acceptirte Thatsache angefochten, dass man aus Diophant's zufälliger Nichterwähnung der Zweideutigkeit einer Quadratwurzel sofort darauf schliessen könne, diese Thatsache sei ihm und den Griechen überhaupt unbekannt gewesen. Allein er wusste es durch Kunstgriffe aller Art so einzurichten, dass die Quadratwurzel unter allen Umständen rational ausfiel, sei es nun, dass er unbestimmte oder bestimmte Aufgaben vor sich hatte. Für ihn, der sonst so unbefangen war, Flächen und Strecken als reine Zahlgrössen zu addiren und zu subtrahiren, hatte, wie Cantor betont 97), das Irrationale noch nicht den Charakter einer Zahl.

und vervollständigt das Quadrat $AEFG = 4489$. Denkt man sich also $4500 = (67 + x)^2$ gesetzt, so hat man jetzt

$$\text{Gnomon } EFGDCB = 134\,x + x^2 = 11.$$

Diese 11 Grade sind gleich 660 Minuten. Indem x^2 als eine kleine Grösse vorerst vernachlässigt wird, setzt man

$$134\,x \sim 660,\ x \sim 4.$$

Jetzt trägt Theon von E und G aus die Strecken $EH = GK = 4$ ab und ergänzt das so angedeutete Quadrat $AHLK$. Der Inhalt desselben besteht aus dem Quadrat 4489, den beiden Parallelogrammen HF und KF, deren jedes den Inhalt $67 . 4 = 268$ Minuten hat*), und endlich dem Quadrat $FL = 4^2 = 16$ Sekunden. Da $2 \cdot 268 = 536$ Minuten den Werth $8^0\,56'$ ergeben, so ist

$$\text{Quadrat } AHLK = 4497^0\,56'\,16''.$$

Zieht man dieses vom ganzen Quadrat $ABCD$ ab, so bleibt

$$\text{Gnomon } HLKDCB = 2^0\,3'\,44''.$$

Diese Zahl ist gleichwerthig mit 7424 Sekunden. Abermals werde, wie oben,

$$\text{Gnomon } HLKDCB = 7424'' = [2 \cdot (67^0 + 4')]\,y + y^2$$

gesetzt; mit Beiseitelassung von y^2 folgt hieraus

$$(134^0 + 8')\,y \sim 7424,\ y \sim 55.$$

Es ist einleuchtend, wie jetzt fortzufahren wäre: von H und K aus wären auf den betreffenden Quadratseiten zwei Strecken $= 55$ abzutragen, das neue Quadrat ist zu ergänzen, der restirende Gnomon in Tertien zu verwandeln, in den Inhalt mit $2\,(67^0 + 4' + 55'')$ zu dividiren, u. s. f. Theon hält es nicht für nöthig, unter Sekunden herabzugehen, und setzt demnach mit genügender Annäherung

$$4500^0 \sim 67^0\,4'\,55'',$$

wie diess auch Ptolemaeus gethan hatte. Nicht im Mindesten anders gestaltet sich die Procedur, wenn etwa $\sqrt{a^0\,b'\,c''}$ zu suchen wäre, wie diess Theon selber an dem Beispiele von $\sqrt{2^0\,28'}$ nachweist 102).

Man überzeugt sich sofort, dass es sehr leicht ist, diese Einzelvorschriften zu einer allgemeinen Regel zusammenzufassen. Auch kann man

*) Vorher schon hat Theon 101) gezeigt, wie sich zwei Grössen verschiedener Rangordnungen durch Multiplikation oder Division mit einander verbinden; wir können seine sehr wortreiche Regel bequem mittelst der Relation

$$60^{-m} \cdot 60^{-n} = 60^{-(m+n)}$$

abgekürzt darstellen.

das Verfahren unschwer durch eine independente Formel darstellen, wie diess vom Verf. dieses bei einer früheren Gelegenheit geschehen ist 103). Von unserem modernen Verfahren weicht das theonische offenbar nur insoferne ab, als in der Entwickelung

$$\sqrt{A} = a + \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2} + \frac{d}{m^3} + \cdots$$

die bei uns gebräuchliche Zahl $m = 10$ durch $m = 60$ ersetzt ist. Man möchte also auch vermuthen, dass diejenigen griechischen Mathematiker, welche weniger unter dem Banne des astronomischen Brauches standen, ein ähnliches Verfahren auf Decimalzahlen anwandten. Nesselmann freilich will hiervon nichts wissen; „dass diese Methode", schreibt er 104), „von den Griechen bei Decimalzahlen nicht gebraucht worden ist, beweist Eutokios, der die Ausziehung von Quadratwurzeln geflissentlich vermeidet." Vielleicht gelingt es, im dritten Kapitel diesem doch keineswegs zwingenden Grunde kräftigere Argumente für die zuerst genannte Ansicht zur Seite zu stellen.

§. 9. *Die Byzantiner.* Auch wenn wir des Theon Anmerkungen zum Almagest nicht mehr besässen, so wäre uns trotzdem Gelegenheit geboten, die griechische Methode der Quadratwurzelausziehung aus Sexagesimalbrüchen kennen zu lernen, nämlich durch Vermittelung der oströmischen Mathematiker. Eigenen Erfindungsgeistes fast völlig baar und deshalb auch für den Fortschritt der Wissenschaften ohne jede Bedeutung, haben die Byzantiner immerhin durch ihre Aufbewahrung altgriechischer Leistungen sich ein gewisses Verdienst erworben; so kennt z. B. Pediasimus neben vielem anderen Heronischen auch den Werth $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$ 105). Für die griechische Logistik kommen zwei Männer besonders in Frage, beide Mönche, beide vollständig mit den Nachtheilen damaliger gelehrter Thätigkeit behaftet, im Uebrigen Zeitgenossen. Der eine derselben ist Barlaam, freilich aus Unteritalien gebürtig, das damals jedoch noch sehr viele griechische Elemente umschloss, später aber in Thessalien wohnhaft. Für die Lebenszeit dieses Mannes hat mit ziemlicher Sicherheit als untere Grenze das Jahr 1348 festgestellt werden können; seine Blüthezeit dürfte etwa in's Jahr 1330 fallen 106). Sein Lehrbuch der astronomischen Rechnungsweisen ist trotz mehrfacher Bearbeitungen sehr selten und so auch dem Verf. niemals zu Gesicht gekommen; derselbe muss sich also mit Dem begnügen, was C. v. Wolf in seiner Anleitung zur mathematischen Bücherkenntniss über dasselbe sagt 107): „Eine gründliche Theorie, welche zureichet, alle Regeln der ausübenden Rechenkunst, sowohl in ganzen Zahlen, als in gemeinen und sechzigtheiligen Brüchen zu erweisen, hat Barlaam der Mönch in seiner Logistica gegeben, welche ein Engelländer Joannes Chamberus aus dem Griechischen in das Lateinische übersetzet und mit Anmerkungen zu Paris A. 1600. in

4. (1. Alph. 3. Bogen) drucken lassen. Das Buch ist für Anfänger zu hoch geschrieben: welchen lächerlich vorkommet, was gar zu gründlich ausgeführet wird.“ Aus dieser Schlussbemerkung scheint hervorzugehen, das Barlaam's Schrift*) in der den Verfall wahrer Wissenschaft charakterisirenden Pedanterie Grosses leistet.

Der College des calabrischen Theologen und Mathematikers scheint in jeder Hinsicht Maximus Planudes gewesen zu sein, der den Ersteren um mehrere Jahre überlebte. Er verfasste unter dem Titel *ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς* eine Anleitung zum Rechnen, die jedoch, wenn wir von der Erwähnung der allerdings aus Indien stammenden Null absehen, sehr wenig Neues bietet, vielmehr einzig und allein die elementaren Rechnungsoperationen mit ganzen und mit Sexagesimal-Zahlen nach älteren Vorbildern abhandelt. Gerhardt hat diese Schrift erstmalig in der Ursprache herausgegeben 109), Uebersichten ihres Inhaltes haben Friedlein 110) und neuerdings Cantor 111) gegeben, und ausserdem giebt es von derselben eine sehr brauchbare Uebersetzung von Wäschke 112), auf welche wir uns im Folgenden mehrfach beziehen werden. Es wird sich herausstellen, dass uns Planudes, grösserer Weitschweifigkeit unerachtet, über die Radicirungsmethode der griechischen Astronomen keine bessern Aufschlüsse giebt, als wir sie bereits dem Theon Alexandrinus zu entnehmen in der Lage waren.

Maximus Planudes beginnt den betreffenden Abschnitt seiner Schrift mit einer allgemeinen Regel zur näherungsweisen Ausziehung der Wurzel aus irgend einer Zahl; allgemein ausgedrückt, sucht er die Quadratzahl a, welche zunächst kleiner ist als die gegebene Zahl A, bestimmt dann $A - a^2 = b$ und setzt endlich 113)

$$\sqrt{A} = a + \frac{b}{2a}.$$

So wäre z. B.

$$\sqrt{18} = \sqrt{4^2 + 2} = 4 + \frac{2}{8} = 4 + \frac{1}{4}.$$

Zum Beweise solle man die herausgekommene Zahl mit sich selbst multipliciren, wobei sich dann freilich hier der Ueberschuss $\frac{1}{16}$ — allgemein $\frac{b^2}{4a^2}$ — einstelle. Dieses rohe Näherungsverfahren, welches einfach darauf hinausläuft, in der Gleichung

$$a^2 + b = (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

das letzte Glied grundsätzlich zu vernachlässigen, scheint nun — darauf

*) In der bekannten anonymen Geschichte der Astronomie wird auch eine von Dasypodius Anno 1572 besorgte Ausgabe des Barlaam'schen Werkes unter dem Titel „Astronomia logistica“ namhaft gemacht 108).

hat zuerst Cantor (a. a. O.) aufmerksam gemacht — der byzantinische Schriftsteller für indisch zu halten. Allein man überzeugt sich ohne Weiteres, dass es nichts weiter ist, als das bereits beim ersten Annäherungsgrade unterbrochene Verfahren Theon's, von welchem überdiess, wie wir später zu zeigen hoffen, so ziemlich alle antiken und neueren Mathematiker Kenntniss hatten, die sich überhaupt mit Quadratwurzeln beschäftigten. Jedenfalls hat kein Zweiter so übergründlich dasselbe abgehandelt, wie diess unser Planudes thut; besondere Mühe wendet er daran, die Ungleichung $a^2 < A < (a + 1)^2$ festzustellen. Wer sich für diese für den Geschichtschreiber der Rechenkunst immerhin nicht ganz belanglosen Untersuchungen interessirt, muss besonders das letzte Beispiel sich ansehen, bestehend in dem Nachweise, dass

$$\sqrt{1690196789} \sim 41112 + \frac{245}{82224}$$

zu setzen sei 114).

Nachdem die, wie der Autor glaubt, indische Methode mehr als genügend breitgetreten ist, wendet er sich endlich zu jener, welche er nicht ohne Selbstgefälligkeit als seine eigene bezeichnet — mit welchem Rechte, werden wir nachher sehen. Wie breitspurig er dabei zu Werke geht, mag wohl die eine Thatsache beweisen, dass die Berechnung der Quadratwurzel aus 6 in der Form

$$\sqrt{6} \sim a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \frac{d}{60^3}$$

in der Wäschke'schen Uebersetzung nicht weniger als sieben enggedruckte Seiten einnimmt, den Beweis *a* posteriori allerdings mit einbegriffen 115). Planudes verwandelt die Zahl 6, die er als astronomischer Logistiker nur als Grad-Anzahl auffassen kann, durch Multiplikation mit 60^2 in 21600 Sekunden, berechnet $146^2 < 21600 < 147^2$ und hat somit als erste Annäherung $146' = 2^0\,26'$. Dann zeichnet er über der Strecke 2 ein Quadrat (Fig. 5), legt an zwei zusammenstossenden Seiten je ein Reckteck vom Inhalt $52'$ an und ergänzt das so entstandene Sechseck durch Zusetzung des Quadrates $26^2 = 676''$ zu einem neuen grösseren Quadrat. Der Inhalt des letzteren beträgt

$$146^2 = 21316 = (21600 - 284) \text{ Sekunden;}$$

der übrig bleibende Gnomon 284 wird in $284 \cdot 60 = 17040$ Tertien umgewandelt und in dieses der Regel gemäss mit $2\ (2 \cdot 60 + 26) = 292$ Minuten dividirt; die grösste dabei herauskommende Zahl ist 58 Sekunden. Ueber der Strecke $(2^0 + 26' + 58'')$ wird jetzt ein neues Quadrat construirt, dessen Inhalt sich aus dem Quadrat 4^0, dem Quadrat $676''$, dem Quadrat $58^2 = 3364$ Quarten, den beiden congruenten Rechtecken $52'$, den

beiden congruenten Rechtecken $116''$ und den beiden congruenten Rechtecken $26 \cdot 58 = 1568$ Tertien zusammensetzt. Eine neue Division in der vorbezeichneten Weise liefert noch ein Zusatzglied von $9'''$, und dabei lässt unser Gewährsmann es bewenden. Wie Fig. 5 ersehen lässt, ist jetzt in unser ursprüngliches Quadrat von $21600'' = 279936000000^{VI}$ ein neues Quadrat gezeichnet, dessen Inhalt Maximus Planudes in seiner Weise zu berechnen lehrt. Wir kürzen seine Methode durch folgendes Schema wesentlich ab, indem wir von vornherein jedes einzelne Quadrat und Rechteck, durch deren Zusammensetzung das Quadrat von der Seite $(2^0\, 26'\, 58''\, 9''')$ entstand, in Sexten ausdrücken. So erhalten wir:

Quadrat 4^0	=	186624000000	Sexten,
2. Rechteck $52'$	=	80870400000	„ ,
Quadrat $676''$	=	8760960000	„ ,
2. Rechteck $116''$	=	3006720000	„ ,
2. Rechteck $1508'''$	=	651456000	„ ,
2. Rechteck $18'''$	=	7776000	„ ,
Quadrat 3364^{IV}	=	12110400	„ ,
2. Rechteck 234^{IV}	=	1684800	„ ,
2. Rechteck 522^{V}	=	62640	„ ,
Quadrat 81^{VI}	=	81	„ ,

Durch Addition erhalten wir 279935169921 Sexten, und dieser Werth ist um $(279936000000 - 279935169921 = 830079)$ Sexten zu klein. Dieser Werth kann mit Vernachlässigung von Brüchen gleich 13835^{V} $= 230^{IV} = 4\,\frac{5'''}{6} = \frac{1''}{12}$ gesetzt werden, die Annäherung ist also wirklich eine sehr grosse.

Allein darüber wird Jedem, der des Planudes „neues“ Verfahren mit dem Theon'schen, Fig. 5 mit Fig. 4 vergleicht, auch kein Zweifel mehr obwalten können, dass von irgend welcher Originalität gar nichts zu verspüren ist. Freilich, wenn der „Erfinder“ seinem ursprünglichen Gedanken treu geblieben und nicht gleich nach dem ersten Anlauf wieder in die ausgetretenen Spuren seines Vorläufers zurückgefallen wäre, so hätte er immerhin etwas Selbstständiges geschaffen, wenn es auch vor dem bereits Bekannten keinen sonderlichen Vorzug hatte. Er musste nämlich von vorn herein (s. o.) $6^0 = 279936000000$ setzen und nun die nächst kleinere ganze Quadratzahl aufsuchen; entweder eine Tabelle dieser Zahlen, oder, falls eine soweit reichende nicht in seinem Besitze war, sein eigenes, in Vergleichung der Stellenanzahl bestehendes Verfahren musste ihn so zu den Ungleichungen

$$529080^2 < 279936000000 < 529081^2$$

führen, und indem er aus der Relation

$$x \cdot 60^3 + y \cdot 60^2 + z \cdot 60 + u = 529080$$

durch successive Divisionen die ganzzahligen Werthe x, y, z, u berechnete, fand er dieselben resp. gleich 2, 26, 58, 9, also, wie oben,

$$\sqrt{6^0} = \sqrt{279936000000^{VI}} = 2^0\, 26'\, 58''\, 9'''.$$

So aber, wie Planudes wirklich zu Werke ging, macht seine Methode blos den Eindruck stümperhafter Halbheit.

Das mag er wohl selbst gefühlt haben, und zu dem Zwecke, schliesslich noch einen günstigeren Eindruck beim Leser hervorzurufen, bringt er noch einen dritten Weg in Vorschlag 116): „Es giebt noch eine andere, aus der indischen, der des Theon und der meinigen gemischte Methode. Die vorhin auseinandergesetzte nämlich, welche sogleich von Anfang an die Einer in Sekunden auflöst und davon ausgehend die Wurzel der nächst niedrigen Quadratzahl nimmt, ist sehr schwer bei grossen Zahlen, z. B. bei derjenigen, welche Theon als Beispiel gebraucht, bei 4500; denn wenn das in 16200000 Sekunden aufgelöst wird, ist es sehr schwierig, die Wurzel daraus zu ziehen, wie wir uns versuchsweise davon überzeugt haben.“ Da ist nun der Ausweg der, zunächst $4500 - 67^2 = 11$ zu bilden und diese 11 Grade in 660 Minuten zu verwandeln! Im Uebrigen bleibt Alles so, wie wir es im vorigen Paragraphen kennen lernten, und der krampfhafte Versuch, Neues zu bieten, ist womöglich noch kläglicher gescheitert.*) Und damit können wir denn auch von den Leistungen der Byzantiner auf dem Gebiete der quadratischen Irrationalitäten Abschied nehmen.

§. 10. *Römische Mathematiker.* Ganz ebenso abhängig wie sich die Oströmer von dem Alexandriner Theon erweisen, haben sich ihre westlichen Collegen dem Alexandriner Heron gegenüber gezeigt. Auffallend ist diese Erscheinung keineswegs. Eigentliche Mathematiker im griechischen Sinne sind auf römischem Boden überhaupt nicht entstanden; wer sich dort mit mathematischen Dingen beschäftigte, that es zu einem ausgesprochen praktischen

---

*) Der Vollständigkeit halber möchten wir noch erwähnen, dass Friedlein (a. a. O.) aus der Darstellung des Maximus Planudes noch eine vierte Methode der Wurzelberechnung herauslesen zu können glaubt, allein, wie es uns scheinen will, mit Unrecht. Denn die Wurzeln, auf welche er anspielt, nämlich

$$\sqrt{235} \sim \left(15\,\frac{10}{30} = 15\,\frac{1}{3}\right),\ \sqrt{421354} \sim 649\,\frac{153}{1298},\ \sqrt{16900963} \sim 4111\,\frac{642}{8222} \cdots,$$

sind doch sämmtlich nach der Formel $\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}$ berechnet, und wenn auch der Autor selbst 117) seine Methode bei mehrstelligen Zahlen eine andere nennt als bei zweistelligen, so hätte sich doch Friedlein durch diese falsche Behauptung nicht irre führen lassen sollen.

Zwecke. Die Geschäftsrechnungen des täglichen Verkehrs und allenfalls ein wenig Mathesis forensis, feldmesserische Verrichtungen und elementare Sternkunde waren für den Römer wichtig, allein, um solche Dinge zu betreiben, bedurfte es keiner tiefer gehenden Untersuchung, sondern lediglich der fertigen Resultate. Aus keinem anderen Werke aber waren dergleichen so bequem und leicht zu beziehen, als aus dem geometrischen Compendium des Heron, und so erklärt sich auf's Einfachste der gewaltige Einfluss, welchen dieser Codex der angewandten Geometrie auf das Römerthum und dessen Ausläufer, bis tief ins spätere Mittelalter hinein, ausgeübt hat. Ganz besonders deutlich tritt diese Einwirkung dann hervor, wenn einmal ein Römer mit irrationalen Zahlen zu thun hatte.

An erster Stelle ist hier der agronomische Schriftsteller Lucius Junius Moderatus Columella zu nennen, dessen mathematischen Ausführungen im zweiten Kapitel seines fünften Buches „vom Landbau" bereits Mollweide zu der den mathematisch-philologischen Studien einverleibten Monographie 118) „De formulis ad absolvendam dimensionem trianguli aequilateri et segmenti circularis a Columella lib. V. cap. 2 praescriptis" angeregt hat. Cantor hat durch unmittelbare Nebeneinanderstellung von nicht weniger als neun Stellen erwiesen 119), dass Heron's „Geometria" der Rathgeber war, an den sich Columella eigenem Eingeständniss zufolge in geometrischen Dingen gehalten hat. $\sqrt{3}$ setzt er mit Heron $= \frac{4}{3} + \frac{4}{10} = \frac{52}{30} = \frac{26}{15}$, er entnimmt seinem Meister also gerade jenen Näherungswerth, welcher für uns aus mannigfachen Gründen ein besonderes Interesse besitzt. Nicht minder finden sich bei dem Römer die uns aus §. 4 wohlbekannten Vorschriften zur Berechnung eines regelmässigen Fünfeckes und Sechseckes aus der Seite vor. Da derselbe jedoch durchgängig mit anderen Zahlenbeispielen rechnet, als diess seine Quelle thut, und da man ihm kaum soviel Initiative zutrauen darf, den vorgefundenen Exempeln aus eigenem Antriebe neue unterlegt zu haben, so muss man wohl zu der Ansicht kommen, dass sich die Römer einer besonderen und mit der uns bekannten nicht immer übereinstimmenden Redaktion des heronischen Textes bedient haben möchten 120). In Cantor's „Agrimensoren" ist durch die Methode der Parallelstellen exakt dargethan, dass alle römischen Gromatiker, Frontinus, Hyginus, Balbus, Nipsus, Epaphroditus und wie sie alle hiessen, auf Heron zurückgegangen sind. Für die Geschichte des Irrationalen allerdings enthalten die dürftigen Schriften dieser Feldmesser keine weiteren Nachweise, denn wenn auch Nipsus eine reine quadratische Gleichung ganz elegant auflöst — er berechnet aus der Fläche F und der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreieckes die Katheten a und b mittelst der Gleichungen $a \pm b$

$=\sqrt{c^2+4F}$ —, so weiss er seine Werthe doch so zu wählen, dass beidemale die Werthe rational ausfallen.*) Gleicherweise nur für Rationalzahlen ist ein Wurzelausdruck eingerichtet, der in den Untersuchungen des Epaphroditus über figurirte Zahlen auftritt 122). Aus Boethius, dessen Geometrie wir trotz mancher nicht verächtlicher Gegnerschaft für ächt halten, darf wohl die Berechnung des Inhaltes des gleichseitigen Dreieckes angeführt werden, welches, wie bei Heron, über der Seite 30 beschrieben ist. Die nicht weiter erläuterte Regel ist diese 123): „Summa unius lateris per se multiplicata DCCCC numerum complet. Cui si quingenta et X subtrahantur, relinquuntur CCCXC. Tot pedes hujus trigoni isopleuri embadum colligit.“ Hiernach wäre also die Fläche

$$F = 900 - 510 = 30 \cdot 30 - 30 \cdot 17 = 30^2 \left(1 - \frac{17}{30}\right) = 30^2 \cdot \frac{13}{30},$$

und da nach der wahren Formel

$$F = \frac{1}{4} \cdot 30^2 \cdot \sqrt{3}$$

ist, so hätte Boethius

$$\frac{1}{4}\sqrt{3} \sim \frac{13}{30}, \quad \sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$$

gesetzt, wie ihm diess durch sein heronisches Muster vorgeschrieben war. Denselben Werth kennt auch der sogenannte Anonymus von Chartres, doch schreibt er 124), anderen und zwar häufig wiederkehrenden Formulirungen Heron's (§. 4) Folge gebend, F in der Gestalt

$$\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10},$$

wenn a die Dreiecksseite bedeutet.

Ganz auf demselben Boden steht jener andere römische Geometer unbekannten Namens, von dem eine Schrift „Ueber die Ausmessung der Jucharte“ auf uns gekommen ist. Derselbe begeht viele und zum Theil sehr abenteuerliche Fehler, nur die Berechnung der Fläche eines regulären Sechseckes von der traditionellen Seitenzahl 30 leistet er mit Zugrundelegung des heronischen Werthes $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$ ganz sachgemäss, indem er

---

*) So wenig für die Logistik, so sehr erscheint uns diese Stelle bei Nipsus bemerkenswerth für die Zahlentheorie. Wir erkennen in ihr den Keim zu jener schönen Unterabtheilung in der unbestimmten Analytik, welche Woepcke als die Lehre von den „congruenten“ Zahlen bezeichnet hat. Es handelt sich hier um die ganzzahlige Auflösung der beiden simultanen Gleichungen

$$x^2 + a = y^2, \; x^2 - a = z^2;$$

dass Nipsus eine Einzellösung derselben kannte, haben wir oben gesehen.

fragliche Fläche durch Eckradien in sechs congruente reguläre Dreiecke zerlegt und durch deren Addition

$$6\left(\frac{30^2}{3}+\frac{30^2}{10}\right)=2340$$

findet 125).

§. 11. *Gerbert und seine Zeit.* Wohl der einzige christliche Abendländer, der vor Leonardo Fibonacci eine Stelle in der Geschichte des Irrationalen verdient, ist der Auvergnate Gerbert, als Papst Sylvester II. zu den höchsten Ehren emporgestiegen (gest. 1002). Wie wenig derselbe vor Wurzelgrössen sich scheute, geht schon daraus hervor, dass er eine auf diesen letzteren beruhende Methode zur Messung der Höhe eines zu erstürmenden Bollwerkes angab, die ihres römisch-gromatischen Charakters unbeschadet eben doch noch nirgendwo in einer römischen Schrift nachgewiesen werden konnte 126) und vielleicht also doch geistiges Eigenthum des gewandten Mannes sein kann, dem ja Feldzüge und Belagerungen nichts ungewohntes waren. Gerbert denkt sich aus ein und demselben Punkt des Grabens zwei an Schnüren befestigte Pfeile nach dem Fusse und nach der Krone der Mauer abgeschossen und die Geschosse sofort zurückgezogen, um die Längen b und c der abgewickelten Schnüre messen zu können. Ist diess geschehen, so liefert ihm der pythagoräische Lehrsatz jene Höhe

$$a=\sqrt{(c+b)(c-b)},$$

und es muss sonach eine Quadratwurzel ausgezogen werden.

Dass Heron, wenn auch nicht direkt, von Gerbert benutzt ward, liess sich von Anfang an erwarten, und in der That lassen sich dafür mehrere Belege beibringen. So trägt er in seiner Geometrie ohne Beweis die dem Heron eigenthümliche Construktion des regelmässigen Achteckes vor 127). Ebenso erscheint im 49. Kapitel jenes Werkes der uns wohl bekannte Näherungswerth für $\sqrt{3}$. Es wird nämlich die Fläche F eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite natürlich wieder 30 Längeneinheiten hat, gleich 390 gesetzt, und man hat sonach

$$F=390=\frac{1}{4}\cdot 900\cdot\sqrt{3},\ \sqrt{3}=\frac{156}{90}=\frac{26}{15}.$$

Wahrscheinlich war diese Angabe übrigens der Schrift des Epaphroditus entnommen, nach welcher sich Gerbert mit Vorliebe richtete.

Höchst merkwürdig ist nun aber weiter der Umstand, dass er sich nicht mit dieser überkommenen Zahl beruhigte, sondern — allem Vermuthen nach durch eigene Kraft — noch eine zweite dazu fand. Wie aus dem in mehr als einer Beziehung denkwürdigen Briefwechsel Gerbert's mit seinem Schüler Adelbold hervorgeht, hatte Letzterer, damals Bischoff in Lüttich,

an den bereits die Tiara tragenden Lehrer die Frage gerichtet, wie denn eigentlich der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks zu berechnen sei, und dieser ertheilte gerne den gewünschten Aufschluss in einem ausführlichen Briefe, in welchem, wie Cantor sagt, eine Meinungsänderung des Schreibers ganz deutlich hervortritt. „Während er", so fährt Cantor fort 128), „in dem aus Epaphroditus entnommenen Kapitel der Geometrie noch $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ rechnete, sagt er jetzt im Verlaufe des Briefes, die Höhe des gleichseitigen Dreieckes sei immer um $\frac{1}{7}$ kleiner als dessen Seite, und darin steckt der Näherungswerth $\sqrt{3} = \frac{12}{7}$, dessen Vorkommen bei irgend einem früheren Schriftsteller wir nicht zu bestätigen im Stande sind, und welcher, wenn auch bequemerer Rechnung als der heronische Näherungswerth, weniger genau als jener ist." Die Betrachtungen unseres zweiten Kapitels werden einiges Licht auf die Art der Entstehung dieser neu auftretenden Approximativzahl werfen.

Von den Abacisten, welche zu Gerbert's Zeiten tonangebend in der Geschichte unserer Wissenschaft sind, hat keiner weiter bis zum Irrationalen sich verstiegen. Man müsste denn zu demselben jene eigenthümliche falsche Regel für die Inhaltsbestimmung regulärer Vielecke rechnen wollen, bei deren Anwendung nach Chasles' Ansicht 129) die Auflösung von quadratischen Gleichungen nicht umgangen werden konnte. Die Algorithmiker aber und vor Allem deren grosser Vorkämpfer Leonardo Pisano stehen jenseits der Grenze, welche wir uns selbst für diese Untersuchung gesteckt haben.

§. 12. *Die Quadratwurzel aus 2 bei den Rabbinen.* Die alten und mittelalterlichen Juden standen der Mathematik ziemlich ebenso gegenüber wie die Römer und deren Nachfolger: sie betrieben diese Wissenschaft durchaus nicht um ihrer selbst willen, allein sie bedurften derselben viel zu dringend, um nicht das Nothwendigste aus derselben sich anzueignen. Jene Römer, in deren Schriften wir mathematischen Dingen begegnen, waren Landwirthe, Rechtsgelehrte, Feldmesser, Techniker; die Hebräer dagegen mussten hauptsächlich bei ihren strengen Religionsverrichtungen arithmetische und geometrische Sätze verwenden, und so waren folgerichtig denn auch ihre Priester, die Rabbinen, Träger und Bewahrer eines gewissen Schulsackes in mathematischer Hinsicht. Sehr umfangreich war dieser letztere allerdings gerade nicht, wie wir am Besten aus der trefflichen Monographie Zuckermann's 130) ersehen können, allein am Wenigsten dürfte der, welcher sich mit dem Irrationalen im Alterthum beschäftigt, achtlos an diesem interessanten Ausläufer antiker Wissenschaft vorübergehen. Denn

dass gewisse Beziehungen zwischen den Talmudisten und den griechischen Mathematikern bestanden, hat Cantor 131) unmittelbar nach dem Erscheinen der Zuckermann'schen Schrift sehr wahrscheinlich gemacht. Der vorliegende Paragraph ist also schon durch den Gesammtplan dieser Arbeit als nothwendig bedingt, indessen kann auch für den Mathematiker als solchen eine Gruppe gelehrter Männer nicht gleichgültig sein, welcher ein Maimonides angehört, also ein universeller Denker, dessen Namen die Geschichte der Kosmographie mit hoher Achtung nennt 132), der ein Maximum-Problem in ganz zutreffender Weise auflöst 133), der endlich auch gerade mit irrationalen Wurzeln sehr gut umzugehen weiss. Eben dieser letztere Punkt ist freilich noch kaum hervorgehoben worden, und wir hoffen deshalb auch nach dieser Seite hin einiges Neue beibringen zu können.

Der pythagoräische Lehrsatz scheint sämmtlichen Commentatoren des jüdischen Religionsbuches bekannt gewesen zu sein; ja sogar quadratische Gleichungen dürften nicht ganz jenseits des Verständnisses jener Leute gelegen haben, wie denn solche bei der Berechnung der um jede Levitenstadt sich herumziehenden Weideplätze („Migrasch") nicht vermieden werden konnten 134). Bei der Anlegung der Begräbnissplätze war eine kreuzförmige Erdaushebung vorgeschrieben, in deren Gänge die verschiedenen Nischen der Särge einzumünden hatten. Betreffs dieser Nischen, die man ja auch aus den christlichen Katakomben kennt, entstanden nun Meinungsverschiedenheiten zwischen den Gelehrten; um zu verhüten, dass die Höhlungen in einander übergriffen, musste eine gewisse Länge l kleiner als die Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieckes von der Seite $\frac{1}{2}$ angenommen werden, also war

$$l < \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

zu wählen 135). Da auch der Ackerbau durch gewisse Kultusvorschriften geregelt war, so wurden in der Mischna Betrachtungen über die durch Fig. 6 gekennzeichnete Bepflanzungsart des Bodens angestellt. Die vier schraffirten Rhomben sollten bebaut sein, und zwischen ihnen sollte ein Rhombus $ABCD$ derart frei bleiben, dass die parallelen Seiten AB und CD zweier Ackerstücke mindestens einen Abstand von $1\frac{1}{2}$ Maasseinheiten besässen. Maimonides glaubte nun zeigen zu können, dass diess eintreffe, wenn die längere Diagonale AC des inneren Rhombus $= 3$, die kürzere $BD = 2$ genommen würde, denn dann wäre, unter E den Diagonalschnittpunkt verstanden,

$$AB = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

Maimonides setzt 136) $AB = 1\frac{4}{5}$ *); er muss also

$$\sqrt{13} \sim \frac{18}{5}$$

gesetzt haben, und gerade dieser Näherungswerth macht uns, worüber im II. Kapitel Näheres, geradezu einen überraschenden Eindruck.

Abgesehen von diesem Einen merkwürdigen Falle kommt im Talmud und in dessen Auslegungen lediglich $\sqrt{2}$ vor. In der ältesten Zeit scheint man dieser Zahlgrösse etwas rathlos gegenübergestanden zu sein, wenigstens heisst es in der Mischna, die Seite eines Quadrates von 5000 Quadratellen Flächeninhalt sei gleich 70 „und etwas darüber" 137). Zunächst identificirte man dieses „Etwas" mit $\frac{2}{3}$, und im jerusalemitanischen Talmud heisst es (a. a. O.), dieser Zusatz sei freilich etwas zu klein, allein die Weisen wüssten ihn nicht genauer anzugeben; im babylonischen Talmud dagegen heisst es blos, der Zusatz sei noch nicht näher bestimmt worden. Zuckermann ist geneigt 138), in der ersteren Angabe einen gewissen Fortschritt der letzteren gegenüber zu erkennen, indem er annimmt, dass durch jene die Erkenntniss der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ausgesprochen sein sollte. Wenn man nicht dafür eintreten will, dass $\sqrt{5000}$ auch auf eine andere Weise gefunden sein konnte, was immerhin möglich ist, so berechnet sich im vorliegenden Falle

$$\sqrt{2} \sim \left(\frac{1}{50} \cdot 70\frac{2}{3} = 1\frac{31}{75} = 1,4133 \ldots\right)$$

Von diesem Näherungswerthe ist aber nur ein Schritt zu einem anderen, der für uns eine weit grössere Bedeutung besitzt. Man konnte nämlich, mit Vernachlässigung eines einzigen Fünfundsiebzigstels,

$$\sqrt{2} \sim \left(1\frac{30}{75} = 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1,4142 \ldots\right)$$

setzen, und mit diesem Werthe haben uns Platon, Aristarch, Heron bekannt genug gemacht. Diesen kleinen und doch wichtigen Schritt haben denn nun auch die Rabbinen gemacht, denn im Traktat „Erubin" (57a) des

---

*) Maimonides' Methode ist freilich nicht ganz richtig, denn nicht die Seite, sondern die Höhe des Rhombus würde die wahre Entfernung der parallelen Seiten angeben. Indess hat Zuckermann (a. a. O.) gezeigt, dass auch, wenn man für AB den wahren Werth

$$AB \,.\, \sin \sphericalangle DAB = AB \,.\, \sin 67^0\ 22'\ 48''$$

und für AB die obige Zahl $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ setzt, auch dann noch die Entfernung $< 1\frac{1}{2}$ bleibt, wie es der Bedingung gemäss sein sollte.

Talmud lautet eine Stelle nach Zuckermann's Verdeutschung in der That folgendermassen 139): „Jedes Quadrat, dessen Seite eine Elle lang ist, hat eine Diagonale von $1^2/_5$ Ellen Länge.“ An dieser Ueberlieferung haben die mittelalterlichen Juden offenbar sehr zähe festgehalten, denn, wie wir in Ergänzung der Zuckermann'schen Nachweise noch berichten können, wird noch im späteren Mittelalter, wie Zunz meldet 140), der Wissensstand eines Mathematikers an diesem Satze gemessen: „Rabbi Simon in Sens war nicht weiter gekommen, als zu wissen, dass die Diagonale grösser als $\frac{7}{5}$ der Seite sein müsse.“ Ein dritter Näherungswerth für $\sqrt{2}$ ist $\frac{4}{3}$; er kommt in dem sehr alten „Seder Tohorot“ vor und verdankt seine Entstehung vielleicht blos roher Empirie, nicht mathematischer Ueberlegung, so dass wir ihn auch blos zur Vollständigkeit als geschichtliches Curiosum aufführen. Alles, was die Rabbinen von $\sqrt{2}$ wussten, fasst Zuckermann in einem Schlusssatz zusammen, der auch diesen Paragraph beendigen soll. Er sagt 141): „Der älteste in der Mischna vorkommende Werth der Quadratwurzel aus Zwei ist der aus Mischna Oholot hergeleitete $= 1{,}33\ldots$ Der späteren Mischna Erubin war der genauere Werth $= 1{,}4133\ldots$ bekannt. Schon die Mischna kannte die Irrationalität einer gewissen Quadratwurzel. Dem noch späteren Talmud genügte für die Praxis der Werth 1,4. Von dem genaueren Werthe der $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ weichen die drei genannten Werthe resp. um $0{,}08088\ldots$, $0{,}00088\ldots$, $0{,}01421\ldots$ ab.“

§. 13. *Die quadratischen Irrationalitäten bei den Indern.* Dem Hindu-Mathematiker lagen die Skrupel ferne, welche dem Griechen so lange Zeit hindurch den bequemen Zugang zum Irrationalen versperrten; für ihn war Alles, was existirte, von Haus aus mit dem Zahlbegriffe behaftet, und diesem wurden denn auch ohne Weiteres die neuen Formen untergeordnet, auf welche man sich bei der Umkehrung der Operation des Potenzirens geführt sah. Wie früh man sich mit den Wurzeln vertraut machte, geht u. a. schon aus der Thatsache hervor, dass man bereits vor Âryabhatta, der davon wie von einer altbekannten Sache spricht, das Verhältniss der Kreisperipherie zum Durchmesser mit $\sqrt{10}$ identificirte — eine Zahl, deren Entstehung Cantor 142) noch für räthselhaft erklärt, für welche jedoch unseres Erachtens Rodet 143) eine ganz annehmbare Erklärung gegeben hat (vgl. Kap. II). Die indische Trigonometrie, die ersichtlich auch auf ein ziemlich hohes Alter Anspruch machen kann, bediente sich hauptsächlich der Formel 144)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1719\,(3438 - \cos\alpha)},$$

welche im Allgemeinen nur irrationale Werthe ergiebt. Die späteren Mathematiker, deren Schriften auf uns gekommen sind, haben auch die Eigenthümlichkeit des Irrationalen richtig erkannt und für die irrationale Quadratwurzel in dem Worte karaṇa sogar eine eigene Bezeichnung geschaffen 145). Schon Âryabhatta muss die Auflösung einer unreinen quadratischen Gleichung gekannt haben; Brahmagupta, Çrîdhara und Bhâshara Acharya tragen diese Auflösung mit Variationen vor, und der letztere kennt sogar 146) die Doppeldeutigkeit und allfallsige Irrealität der Quadratwurzel, sowie die in der Formel

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

ausgesprochene sogenannte Transformation des surdischen Binomes. Nur nebenher sei erwähnt, dass die Inder auch zur Auflösung der uns aus §. 6 erinnerlichen unbestimmten Gleichung $ax^2 + 1 = b^2$ in ihrer „Zerstäubungsregel" eine Methode besassen, welche sich nach Hankel's Untersuchungen völlig mit jener deckt, die später Lagrange auf seine berühmte Kettenbruchentwickelung von $\sqrt{a}$ begründete 147).*) Die theoretische Wurzellehre war sonach bei den Mathematikern Hindostans völlig entwickelt, allein, was gerade uns hier am Meisten interessiren würde, die praktische Näherungsberechnung der karaṇa's tritt in den Lehrbüchern weniger deutlich hervor. Zum Glücke hat uns ein gütiges Geschick neuerdings auch mit diesem Theile indischer Mathematik Bekanntschaft schliessen lassen.

§. 14. *Die Näherungsformeln der Çulvasûtra's.* Ein in Indien lebender deutscher Gelehrter, Thibaut in Benares, hat die sogenannten Çulvasûtra's herausgegeben 148), welche sich mit der Anwendung der Geometrie auf die rituellen Verrichtungen des Gottesdienstes beschäftigen, und Cantor hat zuerst 149) auf die hohe geschichtliche Wichtigkeit dieser Publikation hingewiesen.**) In diesen Schriften kehrt nun häufig die an das delische Problem erinnernde, beim Altarbau unentbehrliche, Aufgabe wieder, ein Quadrat mit einer ganzen Zahl n so zu multipliciren, dass die entstehende Figur abermals ein Quadrat werde. Arithmetisch aufgefasst, muss diess zur Berechnung von $\sqrt{n}$ führen, und in der That treten uns denn auch

*) Eine Kettenbruchmethode im eigentlichen Sinne ist jedoch dieses „cyklische" Verfahren schon deshalb nicht, weil auch Lagrange dasselbe erst in seiner zweiten dem Gegenstande gewidmeten Abhandlung mit einem Kettenbruch-Algorithmus in Beziehung setzte.

**) Eine Uebersicht über das von Thibaut neu erschlossene Material und die von Cantor daraus gezogenen Folgerungen ist, verbunden mit einigen anderen Betrachtungen vergleichender Natur, auch in einem Aufsatze 150) des Verf. zu finden.

Näherungswerthe für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}\ldots$, also gerade für die uns zumeist am Herzen liegenden Irrationalzahlen entgegen. Das Sanskrit hat sogar eigene Kunstwörter für jede einzelne dieser Wurzeln gebildet.

Die Çulvasûtra-Autoren, deren hervorragendster Baudhâyana heisst, kennen zwei Werthe für $\sqrt{2}$. Der eine derselben wird direkt angegeben; es soll sein 151)

$$\sqrt{2} \sim 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \, . \, 4} - \frac{1}{3 \, . \, 4 \, . \, 34};$$

die Genesis dieses Werthes wird sich im II. Kapitel unschwer klarstellen lassen. Einen zweiten Werth muss man aus einer geometrischen Construktion erst mit einiger Mühe herauslesen. Um ein Quadrat $ABCD$ (Fig. 7) in einen flächengleichen Kreis zu verwandeln, suchen die Inder den Durchschnittspunkt E der Diagonalen auf und fällen von ihm auf AB das Loth EJ, welches von einem um E als Mittelpunkt mit EA als Halbmesser beschriebenen Kreise in F getroffen wird. Nimmt man nun $JH = \frac{1}{3} JF$, und beschreibt um E mit EH als neuem Radius einen zweiten Kreis, so ist dieser annähernd gleich dem Quadrate $ABCD$. Hieraus sind nun offenbar zwei unbekannte Werthe zu entnehmen, und da nur eine einzige Gleichung zur Verfügung steht, so muss bezüglich der einen die Hypothese aushelfen. Diese besteht nun bei Cantor darin, FJ*) gleich 3 anzunehmen. Unter dieser Voraussetzung ist

$$EA = EF = EJ + JF = EJ + 3$$
$$EJ \, . \sqrt{2} = EJ + 3 \, .$$

Wird beiderseits quadrirt, so erhält man die quadratische Gleichung

$$\overline{EJ}^2 - 6 \, . \, EJ = 9 \, ,$$
$$EJ = 3 + 3 \sqrt{2} \, .$$

Wenn nun auch EJ eine ganze Zahl sein soll, so müsste $3\sqrt{2} \sim 4$ und $EJ \sim 7$, sodann aber wieder

$$\sqrt{2} \sim \frac{10}{7}$$

gesetzt werden, „ein in der That gar nicht übler Werth, wenn es auch noch nicht gelungen ist, ihn bei irgend einer anderen Gelegenheit, sei es bei Indern, sei es bei Griechen, nachweisen oder auch nur muthmassen zu können“ (a. a. O.). Wir haben gegen diese Schlusskette, so sehr sie auch die Bezeichnung einer scharfsinnigen verdient, hauptsächlich das einzuwenden,

*) Im Cantor'schen Werke steht 152) (S. 10 und 11 v. u.) zweimal durch Druckfehler EJ statt FJ.

dass dem indischen Geometer die Willkürlichkeit zugemuthet wird, $\sqrt{2}$ zuerst annähernd gleich $\frac{4}{3}$ und dann annähernd gleich $\frac{10}{7}$ zu setzen. Wir behalten uns vor, in Kap. II eine, wenn unser Vermuthen richtig ist, einfachere Deutung dieser „Cirkulatur des Quadrates“ unseren Lesern vorzulegen. Wir dürfen aber nicht verhehlen, dass der mit Hülfe der Cantor'schen Annahme errechnete Werth für π auch anderweit sich bestätigt, und dass somit gewiss Gründe für jene sprechen. Es ergiebt sich nämlich, wenn die zuerst erörterte Muthmassung das Richtige trifft, der Satz, dass den Indern die Seite eines dem Kreise vom Durchmesser d gleichen Quadrates gleich $\frac{7d}{8}$ galt, und in der That behauptet Baudhâyana 153), man müsse, um die Seite des dem Kreise gleichflächigen Quadrates zu erhalten, den Durchmesser mit

$$\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\frac{1}{8.29.6}+\frac{1}{8.29.6.8}$$

multipliciren, ein Faktor, dessen Erklärung mit Zuhülfenahme des zuerst für $\sqrt{2}$ angegebenen Werthes ohne Schwierigkeit gelingt. Wir erkennen diesen Vorzug der Cantor'schen Hypothese bereitwillig an, können jedoch auch die bereits geschilderten Bedenken nicht ganz unterdrücken und überlassen gerne competenten Beurtheilern die Entscheidung. Wir machen jedoch gleich jetzt darauf aufmerksam, dass das unmittelbar Folgende einiges Gewicht für unsere Meinung in die Wagschaale legt.

Die Quadratwurzel aus 3 kommt, wie erwähnt, ebenfalls in dem indischen Ritual vor. Drei Bearbeiter desselben, darunter auch der uns bereits bekannte Baudhâyana, geben für die Kreisquadratur folgende Regel 154), es sei

$$\left(\frac{13\,d}{15}\right)^2=\frac{1}{4}\,d^2\pi.$$

Hier ist ein Zweifel nicht möglich, es ist $\pi=3$ gesetzt, wie bei allen alten orientalischen Völkern 155), und wir haben die neuen Relationen

$$3\sim\frac{13^2}{15^2}\cdot 4,\ \sqrt{3}\sim\frac{26}{15},$$

ganz ebenso wie bei Heron und den römischen Agrimensoren. Andererseits freilich kennt Baudhâyana auch den weit genaueren Werth

$$\sqrt{3}\sim 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3.5}-\frac{1}{3.5.52},$$

über welchen in Kap. II, §. 4 weitere Aufschlüsse zu finden sind.

Rodet huldigt der Ansicht, die ältesten Çulvasûtraregeln entstammten ungefähr dem IV. vorchristlichen Jahrhundert 155). Cantor dagegen legt mit Recht den mannigfachen Beziehungen grosses Gewicht bei, welche ihm

in seinen „Gräko-indischen Studien“ zwischen alexandrinischer und indischer Geometrie zu ermitteln gelungen ist; er denkt an eine bereits in die christliche Zeit fallende Uebertragung vom Westen in den Osten. Gewiss ist es auffallend, dass die älteren Inder bereits mit zwei so genauen Näherungswerthen, wie

$$\sqrt{2} \sim \frac{17}{12}, \sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$$

bekannt sind, die wir bei Theon und Heron angetroffen haben. Eine spontane Doppel-Entdeckung ist freilich nicht ausgeschlossen, Bethätigung griechischer Einflüsse aber viel wahrscheinlicher.

§. 15. *Die Araber.* Das mathematische Wissen der muhammedanischen Eroberer, welche in verhältnissmässig so kurzer Zeit ihr Reich von Korassan bis an die Grenze Frankreichs ausdehnten, ist zu ziemlich gleichen Theilen aus griechischen und indischen Quellen zusammengeflossen; man kann in vielen Fällen mit Bestimmtheit angeben, ob ein bestimmter Gelehrter mehr der indischen oder mehr der griechischen Schule angehörte 156). Schon Muhammed ben Mûsâ, der mehr der ersteren zuzuzählen sein dürfte, kennt die Auflösung der quadratischen Gleichungen und deren Doppelwurzel 157) und die Annäherung $\pi \sim \sqrt{10}$ 158). Alkarkhî, der im Beginne des XI. Säkulums lebte, steht dagegen mehr auf griechischem Boden; er hat seinen Bezugsquellen z. B. die hellenischen Benennungen für rational und irrational entlehnt und zieht die Quadratwurzeln aus Sexagesimalbrüchen genau ebenso aus, wie Theon von Alexandrien (§. 8) 159). Wie kaltblütig er mit Wurzelgrössen operirt, geht u. a. aus seiner völlig richtigen Anweisung zur Berechnung eines Pyramidenstumpfes hervor 160): „Du missest die Grundfläche und das Dach, multiplicirst den Inhalt der Grundfläche in den des Daches und ziehst aus dem Produkte die Wurzel aus. Diese Wurzel addirst du zu der Summe der Inhalte der Grundfläche und des Daches und multiplicirst ein Drittel des Resultates in die Höhe des Körpers.“ Man erkennt, dass, wenn h diese Höhe, G die Grundfläche, g das Dach bedeutet, die aus obiger Worteinkleidung entspringende Formel

$$\frac{1}{3} h \left(G + \sqrt{Gg} + g\right)$$

zum Inventar unserer elementaren Stereometrie gehört. In Alkarkhî's algebraischen Versuchen, die zum Theil über die gewohnten Grenzen hinausgehen, kommen allerdings nur rationale Quadrat- und vierte Wurzeln vor. Dagegen erforderte natürlich wieder die Trigonometrie Kenntniss und Behandlung des Irrationalen, denn wenn es auch Abûl Wafâ gelungen war 161), durch sein elegantes, auf die Relation

$$2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \sin \frac{\beta}{2} < 2 \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \sin \frac{\beta}{2}$$

gebautes, Verfahren sich von dem etwas schleppenden Gange der Inder zu befreien, so musste er doch auch sin 36^0, sin 60^0 und viele andere durch Quadratwurzelausziehung bestimmen. Und Albategnius bedurfte derselben nicht minder, um mittelst der Formel

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

vom Sinus zur Tangente überzugehen 162). Kurz, es musste Methoden geben, um quadratische Irrationalitäten mit grösserer oder geringerer Genauigkeit auszurechnen. Einer derselben, die sich aber nur im astronomischen Bruchcalcul verwerthen liess, ist oben bereits gedacht worden; was sich sonst noch darüber in Erfahrung bringen liess, ist im Folgenden zusammengestellt.

Im Allgemeinen scheint die bereits den Alten bekannte und von Maximus Planudes so eingehend behandelte Formel

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}$$

maassgebend gewesen zu sein. Da man sich jedoch überzeugt hatte, dass dieser Näherungswerth zu gross sei, so verfiel man etwas in das entgegengesetzte Extrem und nahm

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a + 1}.$$

So verfuhr Alkharkhî bei Decimalzahlen 163), so Al-Moruzi aus dem östlichen Merw, auf dessen um 1216 erschienene Schrift unlängst von Rodet aufmerksam gemacht ward 164), so auch der Spätling Behâ-Eddin 165), der bereits dem XVI. Jahrhundert angehört.*) Al-Moruzi setzt beispielsweise

$$\sqrt{12} \sim 3\frac{3}{7}, \; \sqrt{145} \sim 12\frac{1}{25}.$$

Genauer geht der Marokkaner Ibn Albannâ in seinem „Talkhys“ zu Werke 168). Er unterscheidet die beiden Fälle

$$b \leqq a, \quad b > a.$$

---

*) Kästner 166) und Peacock 167) haben die nicht uninteressante Wahrnehmung gemacht, dass diese den Werth der Wurzel zu klein ergebende Näherungsformel in dem 1537 erschienenen „tratado subtilissimo de Arismetica y de Geometria“ des Juan de Ortega vorkommt. Bei ihm ist z. B.

$$\sqrt{55702} = \sqrt{236^2 + 6} \sim \left(236 + \frac{6}{2 \cdot 236 + 1} = 236\frac{6}{473}\right).$$

Von diesem Einen Falle abgesehen, scheint das arabische Verfahren im Abendlande keine Propaganda gemacht zu haben.

Je nachdem der erste oder zweite vorliegt, setzt er

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}, \quad \sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a + 1}.$$

Für gewöhnlich wird freilich nur der erste Fall eintreten. Am weitesten in der Vervollkommnung der durch Obiges gekennzeichneten Methode ist jedoch der Spanier Alkalsâdî (XV. Jahrhundert) gegangen, ein tüchtiger Arithmetiker, der auch die Rationalmachung der Bruchnenner mittelst der Formel

$$\frac{m}{p + \sqrt{q}} = \frac{m(p - \sqrt{q})}{p^2 - q}$$

kennt und sich sogar zu einem eigenen Wurzelzeichen — das erste Vorkommniss dieser Art in der Geschichte — aufgeschwungen hat 169). Woepke hat uns über die Bemühungen dieses Arabers, die Behandlung der quadratischen Irrationalzahlen zu verbessern, einen sehr klaren Bericht gegeben 170). Aehnlich wie Ibn Albannâ, unterscheidet auch Alkalsâdî, ob $b \leqq a$ sei — dann hat die Relation

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}$$

statt — oder ob $b > a$ sei. Im letzteren Falle aber ersetzt er die wenig genaue Formel der anderen Araber durch die folgende:

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b + 1}{2(a + 1)},$$

indem er der allzugrossen Vermehrung des Nenners durch eine entsprechende Vermehrung des Zählers ein Gegengewicht zu bieten beabsichtigt. Allein damit nicht zufrieden giebt er auch noch die ungleich genauere Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a} - \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{b}{2a}\right)}.$$

Ausgerechnet nimmt diese Näherungsgleichung die nachstehende Form an:

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{4a^2 b + b^2}{8a^3 + 4ab}.$$

Wir werden im Beginne des nächsten Kapitels auf die naheliegende Schlussfolgerung wieder zurückzukommen haben, welche Woepcke an diese letzte Formel knüpft.

Den arabischen Mathematikern muss füglich noch ein Mann angereiht werden, der durchaus zu ihnen gehört, wenn auch nicht in seiner Nationalität, so doch seinen sonstigen Existenzbedingungen nach. Diess ist Johannes Hispalensis (um 1150 n. Chr.), ein jüdischer Gelehrter, der sich mit arabischer

und indischer Wissenschaft gründlich vertraut gemacht hatte. In manchen Beziehungen geht derselbe allerdings über seine Vorlagen nicht hinaus, so giebt er für die ersten Annäherungen nur die arabische Formel, z. B.

$$\sqrt{40} \sim 6\frac{1}{3}, \quad \sqrt{91345} \sim 302\frac{141}{604},$$

und auch die Quadratwurzelausziehung aus sechzigtheiligen Zahlen unterscheidet sich bei Johannes dem Planudes gegenüber nur insoferne, als Ersterer principiell den Radikanden auf die kleinste Benennung bringt. Dagegen finden sich bei dem Sevillaner zwei einschneidende Neuerungen 171): Derselbe ändert erstlich gemischte Zahlen unter der Wurzel so um, dass aus dem Nenner dieselbe ausgezogen werden kann, wie das Beispiel

$$\sqrt{2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{13}} = \sqrt{\frac{94}{39}} = \sqrt{\frac{94 \,.\, 39}{39 \,.\, 39}} = \frac{1}{39}\sqrt{94 \,.\, 39}$$

lehren mag, und zweitens hat er die vermuthlich aus Indien 172) stammende Methode sich angeeignet, an den Radikanden Nullen anzuhängen und so bis zu beliebigem Genauigkeitsgrade fortzuschreiten. Wir gehen jedoch auf den hierdurch angebahnten Fortschritt hier nicht näher ein, da wir uns sonst aus dem Rahmen antik-mittelalterlicher Mathematik losmachen und in die Besprechung der Neuzeit eintreten müssten. Dem steht aber unser ausdrücklich formulirtes Programm entgegen.

§. 16. *Ungeschriebene Zeugnisse des Alterthums.* Soweit wir bis jetzt in unserem Studium der dem Alterthum eigenthümlichen Näherungwerthe gediehen sind, waren wir stets im Stande, uns auf geschriebene resp. gedruckte Nachweisungen zu beziehen. Dem feinen Spürsinn eines hervorragenden Archäologen der Neuzeit verdanken wir aber die Möglichkeit, uns auch auf ungeschriebene Zeugnisse des Alterthums berufen zu können. Es ist Hultsch gewesen, der die von Anderen wohl gelegentlich gemachte, nicht aber fest begründete Bemerkung, dass in den antiken Bauten gewisse Zahlengesetze zum Ausdruck gelangten, ihres hypothetischen Charakters zu entkleiden und darauf ein wissenschaftliches System zu begründen wusste, mit welchem die Wissenschaft von nun an zu rechnen hat. Mit kurzen Worten lässt sich der Inhalt dieses Systemes dahin bezeichnen, dass die griechischen Architekten die Verhältnisse gewisser Hauptabmessungen principiell gleich gewissen rationalen Brüchen setzten. Wie gesagt, waren auf diese Thatsache schon früher Bautechniker und Aesthetiker aufmerksam geworden, allein was sie darüber mittheilten, beruhte einerseits auf nicht hinlänglich genauen Messungen, andererseits zogen sie aus ihren Beobachtungen so weittragende und gewagte Schlüsse, dass sie dadurch gegen sich und gegen

den gesunden Kern ihrer Lehre berechtigtes Misstrauen hervorriefen. Wir haben damit vorzüglich die Arbeiten von Roeber 173) und Zeising*) im Auge. Dass Hultsch sich von jeder Ausschweifung ferne gehalten, brauchen wir wohl nicht erst zu sagen; überdiess ist das Erfahrungsmaterial, von welchem er ausgeht, ein ganz unverhältnissmässig umfassenderes, als jenes, welches seinen Vorgängern zu Gebote stand. An und für sich würden uns nun freilich diese Studien an diesem Orte nicht näher berühren, wenn nicht Hultsch zugleich die Entdeckung gemacht hätte, dass gerade die am häufigsten vorkommenden rationalen Brüche nichts anderes sind, als Näherungswerthe für gewisse einfache Irrationalzahlen, für $\sqrt{2}$, für $\sqrt{3}$, für $\sqrt{5}$. Wir führen nachstehend, ohne es irgendwie auf Vollständigkeit abzusehen, einige der wichtigsten Ergebnisse aus dem Gesammtbereiche der Hultsch'schen Arbeiten vor.

Beim perikleischen Parthenon verhält sich ganz ähnlich wie auch beim älteren — durch die Perser zerstörten — Parthenon der Stylobat zur Länge 180) wie 4 : 9, beim Heraion zu Samos ist das Verhältniss zwischen Breite und Länge gleich 29 : 60. Beim Parthenon haben wir u. a. folgende Verhältnisszahlen 181): Durchmesser einer gewissen Gruppe von Säulentrommeln zum Durchmesser der anderen Gruppe = 10 : 9, Stylobatbreite zur Gesammthöhe des Tempels = 12 : 7, ebenso Gesammthöhe zur Säulenhöhe, Stylobatbreite sonach zur Säulenhöhe $= 12^2 : 7^2 \sim 3 : 1$. Ausgezeichnet durch seine bestimmten Abmessungen ist besonders auch der Hera-Tempel auf der Insel Samos. Bezeichnet man mit A die Länge einer Unterstufe in der Flanke, mit F eine der beiden kleineren, mit G

---

*) Wir verweisen behufs einer gerechten Würdigung der Arbeiten dieses geistreichen Forschers auf unseren früheren Bericht 174), in welchem besonders auch der Ansichten desselben über das Zutagetreten des goldenen Schnittes bei architektonischen Verhältnissen gedacht ist. Es gilt hier freilich, die Spreu vom Weizen zu sondern, allein so höchst bequem darf man es sich nicht machen, wie es kürzlich Sonnenburg 175) gethan, der alle Angaben über die Erscheinung jener merkwürdigen Gesetzmässigkeit in Kunst und Natur mit dem einfachen Satze erledigt 176): „Alle Messungen an Bildsäulen und Gruppen, an Tempeln und Palästen, an Skeletten und Präparaten sind werthlos, weil sie mit der Voreingenommenheit für ein solches naturwidriges Gesetz enge verbunden sind.“ Es gehört viel Muth dazu, solches zu schreiben, nachdem Schwendener — vgl. hierzu einen Aufsatz des Verf. 177) — mit sachgemässer Correktur der von A. Braun gehegten Meinungen seine mechanische Theorie des Pflanzenwuchses geschaffen, Langer 178) die statische Bedeutung des Gesetzes vom goldenen Schnitte aufgeklärt und neuerdings noch G. Hauck 179) den Nachweis geführt hat, dass in jenem Gesetze thatsächlich der eigenartige für geometrische Symmetrie und schöne Form gleich empfängliche Charakter des älteren Griechenthums sich in natürlichster Weise praktisch bethätigt habe!

eine der vier grösseren Säulenweiten, so hat man 182) folgende Proportionen:

$$F : A = 27 : 400 = 3^3 : 2^4 . 5^2, \quad G : A = 49 : 600 = 7^2 : 2^3 . 3 . 5^2.$$

Bedeuten weiter J und K die Durchmesser der Säulenbasen, L und M diejenigen der Säulenschäfte, so gilt 183)

$$L : A = 9 : 500 = 2^3 : 2^3 . 5^2, \; M : A = 2 : 125 = 2 : 5^3, \; L : M = 9 : 8 = 3^2 : 2^3.$$

Endlich ist als Beispiel eines sich wiederholenden Verhältnisses das merkwürdige Faktum 184) zu erwähnen, dass beim Hera-Tempel der Bruch 17 : 1000 mit dem Verhältniss des Durchschnittes von $(L + M) : A$, bei dem berühmten Diana-Tempel von Ephesus dagegen mit dem Verhältnisse des Säulendurchmessers zu der dortigen Hauptdimension A sich deckt. Eine Zusammenstellung der Einzelforschungen findet sich in der schönen Monographie, welche Hultsch den zwei zuletzt erwähnten Tempelbauten gewidmet hat; alldort wird auch als ein bemerkenswerther Umstand der hervorgehoben 185), dass allen Anzeichen nach der Bau des Artemisions aus ägyptischen und vorderasiatischen Wurzeln herausgewachsen sei.

Die Verhältnisse 7 : 5 und 12 : 7 spielen unter der Menge ihrer Genossen gewissermassen eine hervorragende Rolle. Hultsch ist der Meinung, dass diess daher kommt, weil, wie wir im Verlaufe der bisherigen Darstellung uns zur Genüge überzeugen konnten,

$$\frac{7^2}{5^2} \sim 2, \quad \frac{12^2}{7^2} \sim 3 \text{ (vgl. §. 11)}$$

angenommen war. Derselbe zeigt auch, wie die griechischen Baumeister, die wohl nur unbewusst und der „Continuität handwerksmässiger Ueberlieferung" gemäss nach diesen Regeln arbeiteten, diese Näherungswerthe bequem aus dem bekannten pythagoräischen Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 ableiten konnten. Wir verweisen zu dem Ende auf Fig. 8, in welcher $AB = 3$, $AC = 4$ die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes darstellen, dessen Hypotenuse $BC = 5$ ist. Errichtet man in C auf CD ein Loth und macht auf diesem $CD = BC = 5$, so wird

$$BD = 5\sqrt{2} \sim \left(5 \cdot \frac{7}{5} = 7\right).$$

Endlich mache man auf der verlängerten BD noch $BE = 2 . BD$ und construire über BE das gleichseitige Dreieck BEF. Zieht man die Höhe DF desselben, so wird

$$DF = \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{7^2 . 4 - 7^2} = 7\sqrt{3} \sim \left(7 \cdot \frac{12}{7} = 12 = 3 . 2^2\right).$$

Hultsch knüpft an dieses in Wirklichkeit elegante Verfahren noch die

folgende Betrachtung an 186): „Wir haben also in einer ganz elementaren Construktion vereinigt die theils genauen, theils angenäherten Verhältnisse der Primzahlen 2, 3, 5, 7, ferner die Verhältnisse der Quadrate derselben, endlich die angenäherte Darstellung der Wurzeln aus den beiden ersten Primzahlen. Dieselben Elemente sind es aber auch, auf welchen hauptsächlich die Verhältnisse der ältesten griechischen Tempelbauten beruhen: eine gewiss nicht zufällige Uebereinstimmung."

Von $\sqrt{5}$ ward bis jetzt nicht gesprochen, und doch hat, wie schon Eingangs angedeutet ward, diese Irrationalzahl eine entschiedene Bedeutung für die Kunst, obschon uns im Uebrigen die alten Schriftsteller keine Veranlassung gegeben haben, uns gerade mit ihr zu beschäftigen. $\sqrt{5}$ tritt beim sogenannten goldenen Schnitte auf, der wahrscheinlich bereits auf die pythagoräische Schule sich zurückführt. Soll eine Strecke a nach dem äusseren und mittleren Verhältnisse getheilt werden, so gelten für den „Major" x und den „Minor" y die beiden Gleichungen

$$x + y = a, \quad ay = x^2,$$

und löst man dieselben auf, so ergiebt sich

$$x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right), \; y = \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right).$$

Die Griechen verwendeten nun für den Major nach Hultsch (a. a. O.) den Näherungswerth

$$x \sim \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{21}{17} = \frac{a}{2}\left[\frac{38}{17} - 1\right]\right),$$

so dass sie mithin

$$\sqrt{5} \sim \frac{38}{17}$$

gesetzt haben müssen. Ab und zu scheint auch die durch eine leichte Abänderung aus der vorigen hervorgehende Annäherung

$$x \sim \left(a \cdot \frac{22}{34} = a \cdot \frac{11}{17}\right)$$

gebraucht worden zu sein. Hultsch stellt eine Zahlenreihe her, die durch stetiges Multipliciren der Glieder mit diesen Näherungszahlen entstanden ist, nämlich die folgende:

$$90, 56, 34, 21, 13, 8, 5, 3, 2, \frac{6}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}.$$

In der That hat man

$$90 \cdot \frac{21}{34} = \frac{1890}{34} \sim 56, \; 56 \cdot \frac{21}{34} = \frac{588}{17} \sim 34, \; 34 \cdot \frac{21}{34} = 21,$$

$$21 \cdot \frac{11}{17} = \frac{231}{17} \sim 13,\ 13 \cdot \frac{21}{34} = \frac{273}{34} \sim 8,\ 8 \cdot \frac{21}{34} = \frac{84}{17} \sim 5,$$

$$5 \cdot \frac{21}{34} = \frac{105}{34} \sim 3,\ 3 \cdot \frac{21}{34} = \frac{63}{34} \sim 2,\ 2 \cdot \frac{21}{34} = \frac{21}{17} \sim \frac{6}{5},$$

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{21}{34} = \frac{63}{85} \sim \frac{3}{4},\ \frac{3}{4} \cdot \frac{21}{34} = \frac{63}{136} \sim \frac{1}{2}.$$

Man sieht, dass die Näherung theilweise eine sehr grosse ist, an einem Orte sogar eine absolute.

Diese Zahlen 34, 17, 11 ... erscheinen nun aber häufig in den Proportionen der Tempel, nicht minder, wie wir bereits erfuhren, die ebenfalls der Reihe zu entnehmenden Primzahlen 2, 3, 5 und deren Multipla. Beim Artemision z. B. war die Hauptdimension = 240, daneben tritt aber auch die Zahl 150 hervor. Beide Zahlen hängen durch den goldenen Schnitt mit einander zusammen; es ist

$$240 \cdot \frac{21}{34} = \frac{2520}{17} = 148\frac{4}{17} \sim 150.$$

Jene Zahl 90 aber, die eben ihrer architektonischen Bedeutung halber zum Ausgangspunkt der obigen Reihe genommen wurde, ist gleich dem Minor $y = 240 - 150$. Sämmtliche Verhältnisse des Artemis-Tempels beruhen auf den Grundzahlen 2, 3, 5, 17. Die Zahl 29 erscheint nur einmal als eine bestimmte Modifikation von 60 : 30, 17 tritt ein einzigesmal auf. „Der Tempel des Apollon Epikurios bei Phigalia zeigt in seinen Hauptverhältnissen die Grundzahlen 2 und 3, nächstdem 5 und 7. Vereinzelt sind 13 und 29 nachgewiesen“ 187).

Durch die Untersuchungen von Hultsch, dem es übrigens entgangen zu sein scheint, dass seine Zahlenreihe wesentlich mit der berühmten Lamé'schen Reihe übereinstimmt, dürfte der Zusammenhang der griechischen Architektur mit gewissen Irrationalzahlen und mit der Theilung einer Geraden nach stetiger Proportion ausser Zweifel gesetzt sein. Ihm pflichtet Cantor bei mit folgenden Worten 188): „Der goldene Schnitt spielte in der griechischen Baukunst der perikleischen Zeit eine nicht zu verkennende Rolle. Das ästhetisch wirksamste Verhältniss, und das ist das stetige, ist in den athenischen Bauten aus den Jahren 450—430 aufs Schönste verwerthet.“ Wir wollen betreffs der strengen Regelmässigkeit, mit welcher — vielleicht nur instinktiv — von den alten Architekten bei grossen und wichtigen Unternehmungen zu Werke gegangen wurde, auch auf das Zeugniss eines hervorragenden Sachkenners, G. Hauck's, verweisen 189).

Hiermit ist der erste Theil unserer Aufgabe abgeschlossen. Die Kritik hat bisher geschwiegen, Erklärungsversuche wurden nicht gemacht, es wurden lediglich alle Daten gesammelt, an welchen sich spätere Erklärungsversuche

erproben können. Es ist somit an der Zeit, der geschichtlichen Abtheilung dieser unserer Untersuchung nunmehr den kritisch-mathematischen Theil nachfolgen zu lassen.

Kapitel II.

Ableitung der antiken Quadratwurzeln durch offene oder versteckte Kettenbruch-Algorithmen.

§. 1. *Geschah die Wurzelausziehung blos versuchsweise?* Es hat nicht an Stimmen gefehlt, welche sich für diese Auffassung erhoben. In seiner Rathlosigkeit, sich über die bei Archimedes vorkommenden Wurzeln ein Urtheil zu bilden, sah sich zuerst Nesselmann zu dem pessimistischen Ausspruche gedrängt 190): „Es bleibt nur die Vermuthung übrig, dass die Alten ihre Wurzeln durch Versuche und Errathen gefunden haben, worauf namentlich die Multiplikationsproben bei Eutokius hindeuten. Die zunächst kleinere Zahl, welche der gesuchten Wurzel entsprach, konnten sie leicht aus einer Tabelle der Quadratzahlen entnehmen; und dass ähnliche Tafeln, die ihnen ihre mühsamen Rechnungen erleichterten, ihnen nicht fremd waren, beweist die Multiplikationstafel des Nikomachus.“ Friedlein billigt diese für den Geschichtsforscher freilich etwas trostlose Ansicht, ausdrücklich dabei betonend, dass die Theon'sche Methode allem Anscheine nach niemals auf Decimalzahlen, sondern ausschliesslich nur auf Sexagesimalzahlen angewandt worden sei 191). Er hätte sich, um die von Nesselmann beigebrachten Gründe noch zu verstärken, auch auf den sogenannten Calculus Victorii berufen können, der recht eigentlich als Rechenknecht zur bequemeren Ausführung weitläufiger Multiplikationen gedient haben muss 192). Nicht viel anders verhält es sich, wenn man den Alten eine „divinatorische“ Thätigkeit, ein unerklärbares Geschick in der Auffindung der richtigen Wurzelwerthe beimessen will. Es ist wahr, eine Autorität wie Hultsch hat sich einmal eines solchen Ausdruckes bedient, indem er von einem gewissen Pheidon, der die allerdings sehr merkwürdige Näherung

$$\sqrt[3]{\frac{25}{18}} \sim \frac{10}{9}$$

angab, Folgendes sagte 193): „Diese dritte Wurzel hat er nun schwerlich ausgerechnet, wohl aber fast divinatorisch, wie so viele andere Männer des Alterthums noch viel schwierigere mathematische Probleme gelöst haben, gefunden, dass nach dem festgesetzten Verhältniss zwischen babylonischem und ägyptischem Hohlmaass, also aus dem System heraus, sich für das babylonische und griechische Ellenmaass der Werth 10 : 9 ergebe.“ Wir

halten uns jedoch überzeugt, dass gerade Hultsch nicht geneigt sein würde, diese gelegentliche Bemerkung in dem Sinne zu verallgemeinern, wie diess Nesselmann und Friedlein thaten.

Wir möchten nicht den Glauben erwecken, als seien wir der Ansicht, dass von den Alten niemals Rechnungsresultate durch Probiren gefunden worden seien. Im Gegentheil, gar manche uns bekannte Zahl mag diesem bequemen Verfahren ihre Entstehung zu danken haben. In Friedlein's Werk 194) ist sogar an einem recht hübschen Beispiele gezeigt worden, wie man wohl bei solchen empirischen Wurzelausziehungen verfahren sein könnte. Der Hydrotechniker Frontinus sah sich mehrfach in der Lage, aus dem bekannten, d. h. durch hindurchgeflossene Wassermengen bestimmten, Querschnitte einer kreisrunden Röhre auf deren Durchmesser schliessen zu müssen; unter anderen giebt er an, wenn die Kreisfläche 1 Digitus im Quadrat halte, so betrage der Durchmesser $\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{72}\right)$ Digiti. Mit Benützung des archimedischen Verhältnisses hatte man, unter F die Fläche, unter d den Durchmesser verstanden,

$$F = \frac{1}{4} d^2 \pi, \quad d^2 = \frac{4F}{\pi} = 4F \cdot \frac{7}{22} = \frac{14F}{11}, \quad d = \sqrt{1^2 \cdot \frac{14}{11}} = \sqrt{\frac{14}{11}}.$$

Machte man im Nenner rational, so ergab der Bruch $154 : 11^2$ doch noch einen von den nächsten Quadratzahlen 144 und 169 allzuweit abliegenden Zähler; man multiplicirte also Zähler und Nenner abermals mit 4 und konnte jetzt

$$\frac{14}{11} = \frac{154 \,.\, 4}{22^2} = \frac{616}{22^2} \sim \frac{625}{22^2}, \quad \sqrt{\frac{14}{11}} \sim \frac{25}{22}$$

setzen. Des Ferneren ist

$$\frac{25}{22} = 1 + \frac{3}{22} = 1 + \frac{24}{22 \,.\, 8} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{88}.$$

Das römische Bruchsystem hatte für $\frac{1}{88}$ keine Bezeichnung; der ihm nächste Einheitsbruch, für den es ein Zeichen gab, war $\frac{1}{72}$, und so ward denn näherungsweise letzterer eingesetzt. Ob Frontinus es wirklich so machte, kann niemals entschieden werden, indess lässt sich kaum etwas Besseres geben, wenn man nicht überhaupt von der für den Verf. maassgebenden Ueberzeugung ausgeht, dass auch hier ein methodisches Verfahren vorliegt. Der nächste Paragraph soll diess bestätigen.

Allein auch wer nicht so weit geht, muss doch zugestehen, dass hier von einem reinen Herumtasten keine Rede ist. Eine wenn auch noch rohe Methodik tritt sogar in den von Friedlein dem römischen Praktiker unter-

legten Tastversuchen noch hervor. Dagegen geben wir bereitwillig zu, dass zur Ermittelung der ganzen in einer Irrationalität steckenden Zahl hauptsächlich Tabellen der Quadratzahlen verwandt worden sind, wie wir deren (§. 1) bereits bei den Babyloniern kennen gelernt haben. Hiefür spricht sich auch Rodet aus 195): „En ce qui concerne particulièrement les tables de carrées destinées à alléger les calculs pénibles, l'hypothèse de Nesselmann*) a reçu, depuis l'époque, où il écrivait (1842), une confirmation éclatante par la découverte de semblables tables de carrés et de cubes sur les briques de la bibliothèque de Sardanapale IV à Babylon. Si les Chaldéens possédaient ces tables, a fortiori les Grecs, leurs disciples et leurs héritiers en plus d'un cas, devaient-ils les avoir imitées et étendues." Sowie jedoch $E(\sqrt{A})$**) ermittelt war, traten, wie auch Rodet (Kap. III) annimmt, bestimmte Methoden in Kraft, und deren möglichster Wiederherstellung wollen wir uns jetzt widmen, freilich zunächst nur nach einer ganz bestimmten Richtung hin.

§. 2. *Die Näherungsformel* $a \pm \frac{b}{2a}$. Geht man von der Relation

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm x$$

aus, so ergiebt sich

$$\pm b = \pm 2ax + x^2,$$

und hieraus die wohlbekannte Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a \pm \frac{b}{2a \pm \frac{b}{2a \pm \cdots}}}$$

Wird dieser Kettenbruch nur bis zum zweiten Näherungswerth berechnet, so erhält man

$$\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}.$$

*) Vgl. hierzu die diesen Paragraphen einleitende Stelle aus Nesselmann's Geschichtswerk.

**) Wir glaubten uns berechtigt, dieses in der gesammten zahlentheoretischen Literatur gebräuchliche Zeichen auch auf unseren Fall zu übertragen. $E\left(\frac{m}{n}\right)$ bedeutet die ganze Zahl, welche die Division von m durch n als erste Annäherung ergiebt, und ein gleiches soll $E(\sqrt{A})$ thun, wenn an die Stelle des Dividirens das Radiciren tritt. Wenn also $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 \pm b}$ $\left(b < \begin{cases}(a+1)^2 - a^2 \\ a^2 - (a-1)^2\end{cases}\right)$ gesetzt wird, so ist beim oberen Vorzeichen und beim unteren resp. $E(\sqrt{A})$ gleich a und gleich $(a - 1)$ zu nehmen.

Selbstverständlich braucht nicht überall, wo diese Näherungsgleichung auftritt, darin das Ergebniss einer unvollständigen Kettenbruchentwickelung erblickt zu werden, da ja oben die Vernachlässigung der kleinen Grösse x^2 auf denselben Werth der Wurzel geführt haben würde.

Mit dieser Formel waren die Alten zweifellos vertraut. Heron von Alexandria hat nach ihr alle jene Werthe berechnet, welche in Abtheilung I der von P. Tannery angenommenen ersten Gruppe (Kap. I, §. 4) enthalten sind. Nur hat er, seiner Gewohnheit gemäss, den Bruch $\frac{b}{2a}$, wenn er diese Eigenschaft nicht schon von Haus aus hatte, auf Stammbrüche zurückgeführt. Wir lassen alle 5 Exempel hier folgen:

$$\sqrt{63} = \sqrt{8^2 - 1} \sim 8 - \frac{1}{16},$$

$$\sqrt{1125} = \sqrt{33^2 + 36} \sim \left(33 + \frac{6}{11} = 33 + \frac{1}{2} + \frac{1}{22}\right),$$

$$\sqrt{1081} = \sqrt{32^2 + 57} \sim \left(32 + \frac{57}{64} = 32 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right),$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{7^2 + 1} \sim 7 + \frac{1}{14},$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{8^2 + 11} \sim \left(8 + \frac{11}{16} = 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right).$$

Besonders beachtenswerth dünkt uns der Umstand, dass Heron, wie aus dem ersten Beispiele wohl mit apodiktischer Gewissheit hervorgeht, auch das negative b berücksichtigte.

Maximus Planudes (Kap. I, §. 9) ging, wie wir sahen, stets von der nämlichen Formel aus, b natürlich nur positiv betrachtend. Aber auch Frontinus (vgl. den vorigen §.) dürfte dieselbe aller Wahrscheinlichkeit nach gekannt haben.

Denn es ist ja

$$\sqrt{\frac{14}{11}} = \sqrt{1^2 + \frac{3}{11}} \sim \left(1 + \frac{3}{22} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{88}\right),$$

wie wir oben sahen.

Endlich glauben wir diese Formel auch in jener Stelle der indischen Çulvasûtras wiederzufinden, für welche Cantor, wie wir (Kap. I, §. 14) sahen, eine wesentlich andere Deutung gegeben hat. Unseres Erachtens verhält sich die Sache viel einfacher. Wenn wir die halbe Seite des in einen Kreis zu verwandelnden Quadrates mit a bezeichnen, so ist nach Fig. 7

$$\left[a + \frac{1}{3} a (\sqrt{2} - 1)\right]^2 \cdot \pi \sim 4a^2$$

oder vereinfacht

$$\frac{(2+\sqrt{2})^2}{9}\cdot\pi\sim 4,$$

$$(4+4\sqrt{2}+2)\cdot\pi\sim 36,$$

$$3+2\sqrt{2}\sim\frac{18}{\pi}.$$

Da wir nun sahen, dass die Inder in ihrer kirchlichen Geometrie selbst sich des altorientalischen Werthes $\pi = 3$ in einem anderen Falle bedient haben, so liegt es gewiss nahe, auch hier $\pi = 3$ und somit

$$\sqrt{2}\sim\frac{3}{2}$$

zu setzen. Diese Zahl geht aber auch aus unserer Formel für $a = b = 1$ hervor.

Wie schon in Kap. I, §. 15 angedeutet, ist hierher auch Alkarkhî's und Al-Moruzi's Näherungswerth

$$\sqrt{a^2+b}\sim a+\frac{b}{2a+1}$$

zu rechnen, der nichts weiter als eine ganz am Wege liegende, nicht eben durch Genauigkeit ausgezeichnete, Correktion des ersteren für gewisse Fälle darstellt. Unsere Aufmerksamkeit verdient er besonders deshalb, weil in ihm einem glücklichen Gedanken Rodet's zufolge die einfache Erklärung des mystischen $\sqrt{10}$ der Inder für π begründet liegt 196). Es ist, wenn wir die arabische Formel als bereits den Indern bekannt annehmen dürfen,

$$\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1}\sim\left(3+\frac{1}{2.3+1}=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}\right),$$

und damit haben wir das archimedische Verhältniss gewonnen. Dass aber sogar noch viel genauere Werthe für dieses Verhältniss den alten indischen Mathematikern bekannt waren, steht urkundlich fest 197).

§. 3. *Der dritte Näherungswerth des eingliedrig-periodischen Kettenbruches.* Aus der Quadratwurzel $\sqrt{a^2+b}$ folgt als erster und rohester Näherungswerth $a = E\left(\sqrt{a^2+b}\right)$, als zweiter der uns bereits bekannte

$$a+\frac{b}{2a},$$

als dritter endlich der schon weit genauere Werth

$$a+\frac{b}{2a+\frac{b}{2a}}=a+\frac{2ab}{4a^2+b}=\frac{4a^3+3ab}{4a^2+b}.$$

Gar nicht wenige von den Zahlen, mit welchen uns das erste Kapitel vertraut gemacht hat, entsprechen nun diesem Näherungswerth so voll-

kommen befriedigend, dass wir wohl oder übel auf den Gedanken kommen müssen, jene seien ursprünglich nach demselben berechnet worden. Obwohl ein solcher Schluss keinen zwingenden Charakter haben würde, da — vgl. Kap. III — sehr verschiedene Methoden doch im Einzelfalle zu demselben Zahlenresultate führen können, so wird es sich doch empfehlen, den Beweis obiger Behauptung wirklich anzutreten.

An erster Stelle begegnet uns da der bei Platon wenigstens zu vermuthende, bei Aristarch und Heron, sowie bei den Juden aber direkt nachzuweisende Näherungswerth $\frac{7}{5}$ für $\sqrt{2}$, denn es ist offenbar

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} \sim \left(1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{4+3}{4+1} = \frac{7}{5}\right).$$

Wir glauben sogar, im Gegensatze zu der von Zuckermann ausgesprochenen Meinung, der Ansicht Raum geben zu müssen, dass auch $\sqrt{5000}$ mit Hülfe dieses Näherungswerthes ausgerechnet worden ist (s. o. Kap. I, §. 12). Vielleicht könnte wohl folgender Gedankengang maassgebend gewesen sein. Es ist

$$\sqrt{5000} = \sqrt{70^2 + 100} \sim \left(70 + \frac{100}{140} = 70 + \frac{5}{7}\right).$$

Wird jetzt dieser Bruch als unbeträchtlich vernachlässigt, so ist

$$50\sqrt{2} \sim 70, \ \sqrt{2} \sim \frac{7}{5}.$$

Wir verfielen auf diese Interpretation, weil es uns nicht recht einleuchten wollte, dass die des Rechnens wenig kundigen Rabbinen sich eines so unhandlichen Näherungswerthes wie $1\frac{31}{75}$ sollten bedient haben.

Tritt man mit dieser Methode an die von Heron mitgetheilten Quadratwurzeln heran, so erzielt man häufig eine sehr grosse Uebereinstimmung, völlige Identität dagegen nur in drei Fällen, das obige $\frac{7}{5}$ mit eingeschlossen. Wir wollen zunächst ein Beispiel für Ersteres geben, indem wir die erste Wurzel der VI. Abtheilung von Gruppe I betrachten. Es ist*)

$$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)} \sim 2 + \frac{1}{4} + \cfrac{\frac{27}{8}}{\frac{9}{2} + \cfrac{\frac{27}{8}}{\frac{9}{2}}}.$$

*) Mit dieser Wurzel hatte sich der Verf. dieses bereits früher 198) beschäftigt, die Annäherung damals aber nicht weit genug getrieben, indem er viel-

Rechnet man aus, so findet sich sehr genau

$$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \sim 2 + \frac{1}{4} + \frac{9}{14},$$

und dieser letzte Bruch kann wieder mit einem nur ganz geringen Fehler durch das bei Heron wirklich vorkommende $\frac{2}{3}$ ersetzt werden.

Jene beiden Fälle, in welchen Heron wirklich nach unserer Formel gerechnet zu haben scheint, sind wiederum verschieden, indem der eine bereits der im vorigen Paragraphen abgehandelten Methode sich fügt. Um so wichtiger ist es dagegen, dass der berühmte Näherungswerth für $\sqrt{3}$ durch unser gegenwärtiges Verfahren erhalten wird. Es ist nämlich

$$\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \sim \left(2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4}} = 2 - \frac{4}{15} = \frac{26}{15}\right).$$

Nun ist allerdings nicht in Abrede zu stellen, dass dieser nämliche Werth, wie wir gleich nachher sehen werden, auch durch die Kettenbruchentwickelung von $\sqrt{1^2 + 2}$ gewonnen werden kann, allein während er bei der obigen bereits an dritter Stelle erscheint, erscheint er dort erst als sechster Näherungswerth. Hat also überhaupt die Berechnung nach einer Kettenbruchmethode stattgefunden, so hat jedenfalls die erstere Erklärungsweise den Vorzug grösserer Wahrscheinlichkeit.

In §. 12 des ersten Kapitels ward u. a. auch bemerkt, dass die bei Moses ben Maimon zu findende Relation $\sqrt{13} \sim \frac{18}{5}$ ein gewisses Aufsehen erregen müsse. In der That ist

$$\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 4} \sim \left(3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{2}{3}} = \frac{4 \,.\, 27 + 36}{4 \,.\, 9 + 4} = \frac{18}{5}\right).$$

Genau diesen Werth giebt aber der jüdische Gelehrte an, und man möchte daher wohl vermuthen, er habe ihn mittelst der drei ersten Theilbrüche des eingliedrig-periodischen Kettenbruches errechnet.

§. 4. *Der vierte Näherungswerth und die eingeschalteten Näherungswerthe.* Man möchte obige Vermuthung betreffs des Maimonides um so eher hegen, als man weiss, dass der alles gelehrte Wissen seiner Zeit in sich vereinigende Mann insbesondere auch mit den Arabern in engster

---

mehr $2 + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}$ erhielt. Damals betrug also der Fehler des letzten Gliedes dem Heron'schen gegenüber $+ \frac{1}{12}$, diessmal dagegen, nachdem noch der zweite Theilbruch hinzugenommen ward, nur $- \frac{1}{42}$.

Fühlung stand. Nun sahen wir aber (Kap. I, §. 15), dass Alkasâdi sogar die Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{4a^2b + b^2}{8a^3 + 4ab}$$

gekannt hat. Wie Woepcke (a. a. O.) bemerkte, ist der Ausdruck rechts aber nichts anderes als der aufgewickelte eingliedrig-periodische Kettenbruch, wenn man die Theilbrüche berücksichtigt und somit bis zum vierten Näherungswerthe fortschreitet; es ist, wie eine leichte Rechnung lehrt,.

$$a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}} = a + \frac{4a^2b + b^2}{8a^3 + 4ab}.$$

Freilich gehört der genannte arabische Schriftsteller einer späteren Zeit an, als der jüdische, allein eben deswegen mag vielleicht der Schluss nicht ungerechtfertigt erscheinen: Zu Maimonides' Zeiten hatte man erst drei Näherungswerthe in Rechnung zu ziehen gelernt, und in den zwei Jahrhunderten, die ihn von Alkalsâdî trennen, war man auch bis zum vierten Näherungswerthe fortgeschritten. Denkt man sich den Entwickelungsprozess in dieser Weise verlaufen, so erscheint überhaupt die Entstehung der Kettenbrüche in einem neuen Lichte geschichtlicher Continuität. Denn ungefähr hundert Jahre nach Alkalsâdî lebte und wirkte der italienische Mathematiker Pietro Cataldi, der eigentliche und bewusste Erfinder der unter dem Namen Kettenbruch bekannten Zahlform 199).

Es ist ja — dieser Umstand scheint von den Gegnern der hier vorgetragenen Anschauung nicht genug gewürdigt zu werden — durchaus nicht nöthig, dass jeder Arithmetiker, der Näherungswerthe von Kettenbrüchen berechnete, diess auch ganz und gar in dem Sinne that, welchen wir zur Zeit mit dieser Operation verbinden. Man vergleiche nur die Beschreibung, welche Libri 200) von Cataldi's Methode giebt; dann wird es wahrscheinlich, dass man auch vor Erfindung des Bruchstriches, also vor Leonardo Fibonacci, recht gut einige Eigenschaften der Näherungswerthe ermitteln konnte. Man erkannte, dass, wenn $\frac{P_k}{Q_k}$ einen $k$ten Näherungswerth bedeutete, $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ mittelst der Relation

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{2a\,P_k + b\,P_{k-1}}{2a\,Q_k + b\,Q_{k-1}}$$

als eine bei weitem bessere Annäherung gefunden ward. So fand man zuerst $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a}{1}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2a^2+b}{2a}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{4a^3+3ab}{4a^2+b}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{8a^4+8a^2b+b^2}{8a^3+4ab}$. Weiter ist man vor den Italienern schwerlich gekommen, allein dafür, dass man

im späteren Alterthum und früheren Mittelalter wenigstens soweit gekommen sei, sprechen doch recht viele Anzeichen.*)

Bei unseren bisherigen Untersuchungen hatten wir unser Augenmerk auch zu lenken auf gewisse minder genaue Näherungswerthe, welche, unmittelbar wenigstens, auf keine Kettenbruchentwickelung zurückgeführt werden zu können scheinen. Bei den Rabbinen begegneten wir (Kap. I, §. 12) dem allerdings nur ganz sporadisch vorkommenden Werthe $\sqrt{2} \sim \frac{4}{3}$, bei den Juden (Kap. I, §. 14), wenn wir andererseits der Cantor'schen Erklärung beipflichten wollen, dem Werthe $\sqrt{2} \sim \frac{10}{7}$, und endlich bei Gerbert (Kap. I, §. 11) dem Werthe $\sqrt{3} \sim \frac{12}{7}$. Wir knüpfen, um eine allfallsige Entstehungsmöglichkeit für diese Zahlen zu begründen — mehr können und wollen wir nicht geben — an den obigen Ausdruck für $P_{k+1} : Q_{k+1}$ an. Es lag zu einer Zeit, die im Rechnen nicht weniger als geschickt war und neue Ergebnisse häufig nur versuchsweise zu erhalten wusste, gewiss sehr nahe, aus einer fertigen Reihe von Näherungen

$$\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}, \frac{P_i}{Q_i}, \frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} \dots$$

neue Werthe dadurch herzuleiten, dass man, modern gesprochen,

$$\frac{P'_i}{Q'_i} = \frac{P_{i-1} + P_i}{Q_{i-1} + Q_i}, \frac{P'_{i+1}}{Q'_{i+1}} = \frac{P_i + P_{i+1}}{Q_i + Q_{i+1}} \dots$$

bildete, Zähler und Nenner je zweier aufeinanderfolgender Näherungswerthe durch einfache Addition zu einem neuen Zähler und Nenner vereinigend. Auch später, als man bereits den richtigen Fortgang kannte, liess man

---

*) Der Näherungswerth $\frac{17}{12}$ für $\sqrt{2}$ würde sich ebenfalls hierher rechnen lassen; indem

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} \sim 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$$

gesetzt werden kann. Da uns nun obiger Werth bei Theon Smyrnaeus und bei den Indern begegnet ist, so ziehen wir es vor, von $\frac{17}{12}$ einmal dann zu sprechen, wenn wir später die Theon'sche Methode (§. 5) im Zusammenhange diskutiren; der indische Werth

$$\sqrt{2} \sim \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12}\right)$$

wird dagegen sachgemässer im III. Kapitel zur Behandlung gelangen.

jenes ältere und unvollkommenere Verfahren, als eine immerhin genügende, Näherung noch fortbestehen. Was uns besonders dazu ermuthigt, an dieser Hypothese festzuhalten, ist der Umstand, dass in dem nicht lange nach Alkalsâdî's Zeit erschienenen Rechenbuche des Etienne de la Roche 201) ein dem Principe nach ähnlicher Gang behufs der Ermittelung von Näherungswerthen einer Quadratwurzel eingehalten wird. Wir haben auf diese Methode de la Roche's, als den ersten Keim zu den heute so genannten „Nebennäherungsbrüchen" enthaltend, bereits vor einigen Jahren aufmerksam gemacht 202), jedenfalls früher, als Rodet 203), der sich jedoch über den Lyoneser Mathematiker weit eingehender auslässt. Es gereicht uns zur Befriedigung, mit einem so scharfsinnigen Geschichtsforscher in der Constatirung dieser merkwürdigen Thatsache zusammengetroffen zu sein.

Giebt man Obiges zu, so ist die Erklärung der fraglichen Näherungswerthe eine überaus einfache Sache. Man hat

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}, \quad \sqrt{3} = \sqrt{1^2+2} = 1 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \cdots}}}$$

also im ersteren Falle

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{2}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{7}{5}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{17}{12} \ldots,$$

und im zweiten Falle

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{5}{3}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{7}{4} \ldots$$

Mit Beibehaltung unserer obigen Bezeichnung wäre also im ersten Falle

$$\frac{P'_2}{Q'_2} = \frac{3+1}{2+1} = \frac{4}{3}, \frac{P'_3}{Q'_3} = \frac{7+3}{5+2} = \frac{10}{7}$$

und im zweiten Falle

$$\frac{P'_4}{Q'_4} = \frac{7+5}{4+3} = \frac{12}{7}.$$

Besonders gefällig erscheint die letztere Ableitung bei folgender Ueberlegung. Durch Anwendung des wahrscheinlich schon Cataldi bekannten Satzes, dass man, ohne den Werth eines Kettenbruches zu verändern, zwei Theilzähler und den zwischenliegenden Theilnenner mit der nämlichen Zahl multipliciren oder dividiren darf, kann man die Form

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \cdots}}}}$$

herstellen und hat dann

$$\frac{P_{2i+1}}{Q_{2i+1}} = \frac{2P_{2i} + P_{2i-1}}{2Q_{2i} + Q_{2i-1}}, \quad \frac{P_{2i}}{Q_{2i}} = \frac{P_{2i-1} + P_{2i-2}}{Q_{2i-1} + Q_{2i-2}}.$$

$\frac{P_5}{Q_5}$ gehört in die erstere Kategorie; es bedurfte aber nur einer einfachen irrthümlichen Versetzung desselben in die zweite, um aus $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{7}{4}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{5}{3}$ den irrthümlichen Werth $\frac{7+5}{4+3} = \frac{12}{7}$ hervorgehen zu lassen.

§. 5. *Die Quadratwurzeln bei Archimedes und Theon, causal erklärt.* Wir haben uns in den vorstehenden ersten Paragraphen dieses Kapitels bemüht, jene mehr verstreut vorkommenden Näherungswerthe des Alterthums aus einem allgemeinen Standpunkt zu begreifen. Die Kettenbrüche schienen uns dazu ein brauchbares Mittel abzugeben. Ganz besonders traten dieselben aber von jeher in den Vordergrund, wenn es galt, die bei Archimedes (Kap. I, §. 3) vorkommenden rationalen Brüche für $\sqrt{3}$ u. s. w. zu erklären. Schon über ein Jahrhundert dauern, wie sich im nächsten Paragraphen ausweisen wird, die Versuche, den archimedischen Zahlen mit Hülfe der continuirlichen Brüche beizukommen, und der zurückhaltende Nesselmann selbst kann 204) die Bemerkung nicht unterdrücken, es liesse sich von ferne vermuthen, dass die Griechen etwas unseren Kettenbrüchen Aehnliches gekannt hätten. Heiberg steht 205) dieser Annahme nicht feindlich gegenüber, obwohl er sich der dagegen zu erhebenden Bedenken wohl bewusst ist. Auch Cantor, der — was wichtig — die Unverträglichkeit der archimedischen Näherungswerthe mit der in's Decimale übersetzten Theon'schen Methode nachgewiesen hat 206), glaubt die Möglichkeit der Verwendung irgendwelcher kettenbruchartiger Algorithmen nicht gänzlich in Abrede ziehen zu sollen 207). Einer a. a. O. gemachten Bemerkung wird sich indessen mit Grund entgegentreten lassen. Cantor sagt nämlich mit Recht, die Kettenbruchentwickelung für $\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1}$ führe nur auf Einen der altgriechischen Werthe, nämlich auf $\frac{26}{15}$, nicht auf die Archimed's, thut aber des unseres Erachtens doch noch näher liegenden Kettenbruches für $\sqrt{1^2 + 2}$ gar keine Erwähnung. Die Näherungswerthe dieses letzteren sind aber (vgl. §. 4) die nachstehenden:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780}, \frac{3701}{2131} \ldots$$

Wir sehen, dass beide Werthe des Archimedes, $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$ und $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$ in dieser Folge von Brüchen sich finden, bezüglich als neuntes und zwölftes Reihenglied. An und für sich entspricht somit die Kettenbruchmethode den archimedischen Zahlen, so sehr man es billig nur verlangen kann.

Das einzige, unserer Ansicht nach wirklich schwer wiegende, Gegen-Argument hat mit gewohntem Scharfblicke kein Geringerer als Gauss geltend gemacht, indem er jedoch auch zugleich ein Mittel an die Hand gab, die von ihm angegriffene Theorie durch einen neuen Grund zu stützen. Indem er nämlich die bereits erwähnte philologisch-mathematische Schrift von Mollweide einer eingehenden Besprechung unterzieht 208), sagt er u. a., es sei nicht recht abzusehen, weshalb Archimedes, wenn er wirklich auf irgend einem methodischen Wege zu den von ihm benützten Näherungswerthen gelangt sei, die Werthe $\frac{362}{209}$ und $\frac{989}{571}$ ganz ausser Acht gelassen habe; man möchte schliessen, er habe letztere eben wirklich nicht bemerkt und sei mehr durch einen glücklichen Zufall auf $\frac{1351}{780}$ verfallen. Hiegegen macht er dann aber selbst folgenden Einwurf 209): „Herr Mollweide glaubt, Archimedes habe jenen Bruch deswegen gewählt, weil er der einfachste von denen sei, deren Zähler zur Ordnung der Tausender gehören, allein dieser Grund scheint uns nicht befriedigend. Wir finden es vielmehr wahrscheinlicher, dass er den Bruch $\frac{1351}{780}$ deswegen vorzog, weil er fand, dass derselbe zufälligerweise beim weiteren Fortgange der Rechnung eine bequemere Vereinfachung darbietet, so dass sich beym 24. Eck für dasjenige Verhältniss, welches, nach unserer Art zu reden, $1 : \text{cotang}\ 7^0\ 30'$ ist, eine äusserst nahe Grenze sehr einfach durch $240 : 1823$ vorstellen liess. Diesen Vortheil hätte er entbehren müssen, wäre er ursprünglich vom Bruch $\frac{362}{209}$ ausgegangen.“ Niemand wird dieser Auffassung das Lob eines tiefen Eindringens in den dunklen Sachverhalt absprechen können, doch lässt sich wohl nicht behaupten, es sei damit die Frage, warum der Geometer von Syrakus gerade diese und keine anderen Werthe für seine Zwecke heranzog, nun endgültig erledigt.

Was die anderen archimedischen Quadratwurzeln anlangt, so will die Kettenbruchmethode, wenigstens wenn man sie unmittelbar anwendet, keine ganz genügenden Ergebnisse liefern. So ist beispielsweise von Archimedes (Kap. I, §. 3)

$$\sqrt{349450} \sim 591 + \frac{1}{8}$$

gesetzt worden. Die übliche Kettenbruchentwickelung, resp. die in §. 2 dieses Kapitels besprochene Formel, würde

$$\sqrt{349450} = \sqrt{591^2 + 169} \sim 591 + \frac{169}{1182}$$

ergeben, und dieser letztere Werth ist von $591\frac{1}{7}$ doch nur um einen ganz minimalen Betrag verschieden. Wieso also kommt Archimedes dazu, $\frac{1}{8}$ zu

wählen? Annähernd schmiegt sich diesem Berechnungsverfahren nur noch

$$\sqrt{3380929} \sim 1838 + \frac{9}{11}$$

an, zu welcher Wurzel Nesselmann 210) eine uns interessirende Bemerkung macht: „Es bietet sich uns hier die merkwürdige Erscheinung dar, dass die Methode der Kettenbrüche der Reihe nach folgende Werthe giebt: $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{11}$ u. s. w.; nun ist $\frac{8}{11}$ zunächst zu klein; es hat also fast den Anschein, als sei deshalb von Archimedes $\frac{9}{11}$ gewählt worden.“ Man sieht, dass alle diese Betrachtungen sich rein auf dem Boden der Hypothese bewegen. Die Möglichkeit, dass Archimedes eine wirkliche und dem Princip nach unseren Kettenbrüchen analoge Methode gehabt habe, ist nicht wegzustreiten, allein ganz gewiss ist auch, dass er die heute gewöhnliche staffelförmige Entwickelungsform nicht kannte, und mindestens sehr wahrscheinlich, dass ihm auch die Rekursionsformel für $\frac{P_k}{Q_k}$, an welche wir in §. 4 zu erinnern hatten, nicht geläufig gewesen ist. Er wäre, wenn diess der Fall, ganz gewiss nicht bis zu $\frac{1371}{780}$ vorgegangen.

Einigermassen fester ist schon der Boden, welchen wir bei Prüfung der von Theon Smyrnaeus mitgetheilten Zahlwerthe unter unseren Füssen fühlen. Was an Thatsachen in dieser Beziehung vorliegt, ward in §. 6 des ersten Kapitels zusammengestellt, und es übrigt nur, ein Urtheil auf diese Thatsachen zu begründen. Es ist die Annahme kaum abzuweisen, dass von Theon die Untersuchung über die durch die Gleichung $d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$ unter einander verbundenen Grössen d und a einzig und allein zu dem Zwecke begonnen ward, um brauchbare Näherungswerthe für $\sqrt{2}$ zu erhalten, indem er dabei, wie wir sahen, an die zahlentheoretischen Liebhabereien der altplatonischen Schule anknüpfte. „Berücksichtigt man weiter,“ sagt Cantor 211), „dass die Bildungsgesetze der Seiten- und Diametralzahlen genau dieselben sind, welche die Nenner und Zähler der aufeinanderfolgenden Näherungswerthe für den Kettenbruch

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

entstehen lassen, so wird man wohl zu der oben ausgesprochenen Behauptung genöthigt, die Griechen seien, natürlich nicht der Form nach, wohl aber der Sache nach, mit der Kettenbruchentwickelung von $\sqrt{2}$ und mit dem Gesetze der Näherungswerthe dieses Kettenbruches bekannt gewesen.“

Allein auch von Theon ist es so gut wie sicher, dass ihm, ganz wie dem Archimedes, eigentliche Kettenbrüche vollständig fremd blieben. Es bleibt deshalb stets noch die Frage eine offene: welche Beschaffenheit hatte der Ersatz, durch dessen Anwendung die beiden griechischen Mathematiker eben dasselbe erreichten, was wir heutzutage vermittelst der Kettenbrüche zu erreichen gewohnt sind? Eine sehr grosse Anzahl von Forschern hat sich im Laufe der letzten hundertundfünfzig Jahre mit dieser schwierigen, aber einen lebhaften Anreiz in sich schliessenden, Frage beschäftigt; die folgenden Paragraphen sollen ein treues Bild der von ihnen eingeschlagenen Wege und der auf diesen Wegen erzielten Resultate ergeben, natürlich nur soweit dabei mehr oder minder versteckte Kettenbruch-Algorithmen in's Spiel gekommen sind.

§. 6. *Die Methode von De Lagny.* Im Jahre 1723 trat zuerst der durch zahlreiche arithmetische Arbeiten, insbesondere durch seine schärfere Bestimmung der Zahl π wohlbekannte französische Akademiker De Lagny an diese Aufgabe heran 212), deren Lösung er in dem Sinne bewirken will, dass gezeigt werde, wie man die archimedischen Näherungswerthe „régulièrement et sans aucun tâtonnement" berechnen könne. Er weist zunächst nach, dass man durch die moderne Art und Weise der Quadratwurzelausziehung durch Decimalbrüche nichts erreiche und geht dann dazu über, die „Schritte" aufzuzeigen, welche Archimedes bei seiner Rechnung gemacht habe 213). Diese Schritte haben nach De Lagny's Meinung darin bestanden, dass successive die Relationen

$$2^2 = 3 \,.\, 1^2 + 1,\ 5^2 = 3 \,.\, 3^2 - 2,\ 7^2 = 3 \,.\, 4^2 + 1,\ 19^2 = 3 \,.\, 11^2 - 2,$$
$$26^2 = 3 \,.\, 15^2 + 1,\ 71^2 = 3 \,.\, 41^2 - 2$$

gebildet wurden, aus welchen dann die Annäherungen

$$\sqrt{3} \sim \frac{2}{1} \sim \frac{5}{3} \sim \frac{7}{4} \sim \frac{19}{11} \sim \frac{26}{15} \sim \frac{71}{41} \cdots$$

unmittelbar hervorgiengen. Wenn nun $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b}$ gegeben vorliege, so habe man anzunehmen, dass Archimedes sich folgende Reihe aufeinanderfolgender Brüche gebildet habe:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a}{1},\ \frac{P_2}{Q_2} = \frac{aP_1 + AQ_1}{P_1 + aQ_1},\ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{aP_2 + AQ_2}{P_2 + aQ_2},\ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{aP_3 + AQ_3}{P_3 + aQ_3} \cdots$$

Diese Methode ist nun wirklich eine sehr hübsche und, soviel uns bekannt, von Jenen, welche die Lehre von den Kettenbrüchen bearbeiteten, noch viel zu wenig gewürdigt*), obgleich sie ganz entschiedenes theore-

*) Auch in unserer früheren Schrift über diesen Gegenstand wird dieses nähere Eingehen vermisst. Es wird daselbst 214) einfach ein Beweis a posteriori für die von De Lagny behauptete Thatsache erbracht, die wahre Bedeutung dieser letzteren tritt aber durchaus nicht genügend hervor.

tisches Interesse beanspruchen darf und geradezu in den mathematischen Unterricht übergeführt zu werden verdient. Kürzer, als es von dem Erfinder selbst geschah, kann der eigentliche Kern des Verfahrens durch den folgenden Lehrsatz gekennzeichnet werden:

Entwickelt man $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b}$ in den bekannten eingliedrig-periodischen Kettenbruch

$$a + \frac{b}{2a +} \frac{b}{2a + \cdots},$$

so kann die Berechnung der einzelnen Werthe mittelst der Relation

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{aP_{n-1} + AQ_{n-1}}{P_{n-1} + aQ_{n-1}}, \quad \left(\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a}{1}\right)$$

geleistet werden, man bedarf also, um irgend einen Näherungsbruch zu finden, die Kenntniss blos des zunächst vorangehenden Näherungsbruches, nicht, wie bei der gewöhnlichen rekurrenten Berechnung, der Kenntniss zweier vorhergehender Näherungsbrüche.

Der Beweis dieses Satzes, der für die Rechnungspraxis von entschiedenem Vortheil und in der obigen Form vermuthlich auch neu ist, lässt im Originale an Klarheit und Einfachheit viel zu wünschen übrig. Am Schnellsten führt wohl die folgende Ueberlegung zur Erkenntniss seiner Richtigkeit. Wir setzen den Satz als wahr voraus und haben also

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{aP_{n-1} + (a^2 + b)\,Q_{n-1}}{P_{n-1} + aQ_{n-1}} = \frac{a(P_{n-1} + aQ_{n-1}) + bQ_{n-1}}{P_{n-1} + aQ_{n-1}}$$

oder

$$\frac{P_n}{Q_n} = a + \frac{bQ_{n-1}}{P_{n-1} + aQ_{n-1}} = a + \frac{b}{a + \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}}.$$

Denken wir uns jetzt für $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ seinen entsprechend berechneten Werth eingesetzt, so ergiebt sich

$$\frac{P_n}{Q_n} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{a + \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}}}$$

In dem nämlichen Sinne weiter folgernd, nehmen wir wahr, dass uns die hypothetische Annahme des Lehrsatzes zu der bekannten Relation

$$\frac{P_n}{Q_n} = a + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \cdots + \frac{b}{2a_{(n-1)}}$$

geführt hat, und da unsere Schlüsse augenscheinlich sämmtlich umkehrbar sind, so ist der volle Beweis als erbracht anzusehen.

De Lagny selbst hat nichts davon gemerkt, dass seine Methode durchaus auf Eigenschaften der Kettenbrüche beruhe. Er glaubte also mit guter Zuversicht dem Archimedes einen ähnlichen Gedankengang unterlegen zu können, wie jener war, der ihn selber leitete. Aus den uns sattsam bekannten Gründen müssen wir aber auch gegen dieses abgeänderte Kettenbruchverfahren in geschichtlicher Hinsicht Zweifel erheben. Dagegen verdient De Lagny als der Erste genannt zu werden, der die Pell'sche Gleichung für $A = 3$ ganz ebenso in Beziehung mit der Wurzelausziehung setzte, wie diess von Theon für $A = 2$ geschehen war. Wir werden später sehen, dass in dieser Beziehung P. Tannery und Zeuthen auf De Lagny's Schultern stehen.

§. 7. *Die Methode von Mollweide.* Neunzig Jahre gerade waren nach dem ersten Versuche des französischen Gelehrten verflossen, als der durch seinen regen Sinn für das geschichtliche Element in seiner Wissenschaft ausgezeichnete deutsche Mathematiker Mollweide mit einer neuen Divination betreffs der archimedischen Näherungswerthe für $\sqrt{3}$ hervortrat. Die einer schon mehrfach angeführten Universitätsschrift einverleibte Untersuchung 215) hat in ihren Hauptzügen folgenden Inhalt. In Fig. 9 sei AC ein Kreisradius $= z$, ED ein Kreisdurchmesser, der mit jenem einen $\sphericalangle CAD = 30^0$ bildet, und eine in C an den Kreis gelegte Berührende schneide den verlängerten Durchmesser in B. BD werde $= u$, $BC = p$, endlich $BC - BD = p - u = v$ gesetzt. Aus der Figur fliesst dann zunächst

$$z = 2p - u, \frac{z}{p} = \frac{2p - u}{p} = \frac{\sqrt{3}}{1}.$$

Nach einem bekannten Satz vom Kreise ist

$$BD\,(BD + DE) = \overline{BC}^2,\ u\,(u + DE) = p^2,$$

und da $\frac{1}{2} DE + u = 2p$, $DE = 4p - 2u$ ist, so können wir unsere Gleichung als Proportion so schreiben:

$$\frac{p}{u} = \frac{4p - u}{p}.$$

Indem wir zuerst Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multipliciren und sodann den Satz, aus $a : b = c : d$ folge $(a - c) : (b - d) = c : d$, zur Anwendung bringen, finden wir

$$\frac{2p}{8p - 2u} = \frac{u}{p}, \frac{2p - u}{7p - 2u} = \frac{u}{p} = \frac{p}{4p - u}, \frac{z}{p} = \frac{7p - 2u}{4p - u}.$$

Nun werde wie oben verfahren, nur, statt mit 2, mit 7 multiplicirt;

dann folgt

$$\frac{7p}{28p-7u}=\frac{2u}{2p},\ \frac{7p-2u}{26p-7u}=\frac{u}{p}=\frac{4p}{16p-4u}=\frac{4p-u}{15p-4u},\ \frac{z}{p}=\frac{26p-7u}{15p-4u}.$$

Durch eine ganz entsprechende Proportionenrechnung finden sich die weiteren Werthe

$$\frac{z}{p}=\frac{97p-26u}{56p-15u}=\frac{362p-97u}{209p-56u}=\frac{1351p-362u}{780p-209u}\ldots$$

Aus dieser Kette von Proportionen folgt natürlich

$$\frac{z}{p}<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{26}{15}<\frac{7}{4}<\frac{2}{1}.$$

Analog findet nun Mollweide 216) auch seine unteren Grenzwerthe Er geht aus von der Proportion

$$\frac{z}{p}=\frac{p+v}{p}=\frac{7p-2u}{4p-u}$$

und findet nach und nach

$$\frac{z}{p}=\frac{19p+7v}{11p+4v}=\frac{71p+26v}{41p+15v}=\frac{265p+97v}{153p+56v}=\frac{989p+362v}{571p+209v}=\ldots$$

und demgemäss auch

$$\frac{z}{p}>\frac{989}{571}>\frac{265}{153}>\frac{71}{41}>\frac{19}{11}>\frac{5}{3}>\frac{1}{1}.$$

Hält man beide Reihen von Ungleichungen zusammen, so erhält man, wie Archimedes,

$$\frac{1351}{780}>\sqrt{3}>\frac{265}{153},$$

obwohl $\frac{1351}{780}>\sqrt{3}>\frac{989}{571}$ oder auch $\frac{362}{209}>\sqrt{3}>\frac{265}{153}$ mehr dem Sachverhalt entsprechend erschiene.

Mollweide erwähnt noch 217), dass man sowohl von $\frac{265}{153}$, als auch von $\frac{1351}{780}$ besonders bequem zu dem im Alterthum so weit verbreiteten Näherungswerth $\frac{26}{15}$ übergehen könne. Es sei nämlich

$$\frac{265}{153}\sim\left(\frac{260}{150}=\frac{26}{15}\right)$$

und

$$\frac{1351}{780}\sim\left(\frac{1352}{780}=\frac{26\,.\,52}{15\,.\,52}=\frac{26}{15}\right).$$

Betrachtet man das Verfahren, dessen Schilderung soeben erfolgt ist,

unter dem geschichtlichen Gesichtspunkt, so wird man ihm zugestehen müssen, dass kein Satz und keine Umformung darin vorkommt, welche nicht bereits zu Archimed's Zeit den Griechen bekannt gewesen wären. Man darf sich deshalb nicht wundern, dass auch Gauss in der erwähnten Recension ein sehr günstiges Urtheil abgiebt: „Dass Herr Mollweide, welcher sich mit der bei den alten Geometern üblichen Einkleidung arithmetischer Schlüsse sehr vertraut gemacht hat, Archimed's Ideengang wirklich errathen haben könne, mögen wir gerne zugeben." Abgesehen von Anderem, wovon schon in §. 5 zur Genüge die Rede war, möchten wir gegen Mollweide's Herleitung die Einwendung erheben, dass dieselbe trotz ihrer unbestreitbaren Eleganz — oder gerade wegen ihrer unbestreitbaren Eleganz — gerechte Bedenken des Historikers erregen müsse. Es will uns scheinen, dass die künstlichen Umwandlungen der einzelnen Zahlenverhältnisse nur von dem richtig in's Werk gesetzt werden konnten, der schon wusste, was bei seiner Rechnung herauskommen sollte; a priori aber scheinen uns dergleichen Transformationen, obgleich man rein formell ihrem alterthümlichen Charakter gar nichts anhaben kann, doch jenseits des Gesichtskreises eines alten Mathematikers zu liegen. Dieser Eindruck verstärkt sich noch, wenn man die Methode ihres Gewandes entkeidet und erkennt, dass man es betreffs derselben eben doch nur mit einem — wenn auch noch so gut verdeckten — Kettenbruch-Algorithmus zu thun hat.

§. 8. *Zurückführung der Methode von Mollweide auf ihren wahren Charakter.* Lässt man die Art der Ableitung ausser Acht und hält sich lediglich an die fertigen Ergebnisse, so constatirt man leicht, dass Alles auf zwei Kettenbruchsätze hinauskommt, nämlich auf die folgenden: Es ist

$$\frac{z}{p} = \frac{P_{2k} \cdot p - P_{2k-2} \cdot u}{Q_{2k} \cdot p - Q_{2k-2} \cdot u} = \frac{P_{2k+1} \cdot p + P_{2k} \cdot v}{Q_{2k+1} \cdot p + Q_{2k} \cdot v} \quad (k = 1, 2, 3 \cdots).$$

Drückt man die hier vorkommenden Grössen p, u, v sämmtlich durch den Radius aus, so resultiren folgende beide Theoreme:

$$\text{I.} \quad \frac{\frac{P_{2k}}{\sqrt{3}} - P_{2k-2} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}}{\frac{Q_{2k}}{\sqrt{3}} - Q_{2k-2} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}} = \frac{\frac{P_{2k-2}}{\sqrt{3}} - P_{2k-4} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}}{\frac{Q_{2k-2}}{\sqrt{3}} - Q_{2k-4} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3}},$$

$$\text{II.} \quad \frac{\frac{P_{2k+1}}{\sqrt{3}} + P_{2k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{Q_{2k+1}}{\sqrt{3}} + Q_{2k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{P_{2k-1}}{\sqrt{3}} + P_{2k-2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{Q_{2k-1}}{\sqrt{3}} + Q_{2k-2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}.$$

Es wäre leicht, dieselben induktorisch durch den Schluss von n auf

$(n+1)$ zu erhärten, wir ziehen es aber vor, einen wenn auch etwas weitläufigeren Beweis für sie zu geben, der uns zu einigen nicht uninteressanten Nebenbetrachtungen Anlass geben wird. Bezeichnet wieder $P_k : Q_k$ den $k$ten Näherungswerth des mit $\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2}$ identischen Kettenbruches

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \cdots \qquad = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots,$$

so gelten für diese P und Q Bedingungsgleichungen in reicher Fülle, von denen wir einige für uns wichtige hier namhaft machen wollen:*)

I. Hülfssatz. Es ist

$$\begin{vmatrix} P_{2k} & Q_{2k} \\ P_{2k-2} & Q_{2k-2} \end{vmatrix} = -1.$$

II. Hülfssatz. Es ist

$$\begin{vmatrix} P_{2k} & Q_{2k} \\ P_{2k-4} & Q_{2k-4} \end{vmatrix} = -4.$$

*) Auf die Beweise dieser vorbereitenden Sätze gehen wir hier aus dem Grunde nicht näher ein, weil dieselben an einem anderen Orte (in den Mém. de la soc. des sciences phys. et nat. de Bordeaux) im Zusammenhang gegeben werden. Lediglich, um darzuthun, wie man jeden solchen Einzelsatz, wenn man sich von dessen Existenz vorher irgendwie erfahrungsmässig überzeugt hat, nachträglich zu verificiren vermag, geben wir hier für N. IV. einen einfacheren Beweis, als es am angeführten Orte geschehen ist. Da zur Rechten eine constante Zahl steht, so muss es genügen, die Gleichheit

$$P_{2k+1} Q_{2k-2} - P_{2k-1} Q_{2k} = P_{2k-1} Q_{2k-4} - P_{2k-3} Q_{2k-2}$$

zu erweisen. Man bildet also die Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} P_{2k+1} &= 2P_{2k} + P_{2k-1}, & Q_{2k} &= Q_{2k-1} + Q_{2k-2}, \\ P_{2k} &= P_{2k-1} + P_{2k-2}, & Q_{2k-1} &= 2Q_{2k-2} + Q_{2k-3}, \\ P_{2k-1} &= 2P_{2k-2} + P_{2k-3}, & Q_{2k-2} &= Q_{2k-3} + Q_{2k-4} \end{aligned}$$

und eliminirt aus dem ersten Systeme P_{2k} und P_{2k-2}, aus dem zweiten Systeme Q_{2k-1} und Q_{2k-3}, weil diese P und Q in der zu verificirenden Gleichung gar nicht vorkommen. Wir erhalten so

$$P_{2k+1} = 4P_{2k-1} - P_{2k-3}, \qquad Q_{2k} = 4Q_{2k-2} - Q_{2k-4},$$

und setzen wir diese Werthe ein, so folgt

$$\begin{aligned} P_{2k+1} Q_{2k-2} - P_{2k-1} Q_{2k} &= 4P_{2k-1} Q_{2k-2} - P_{2k-3} Q_{2k-2} \\ - 4P_{2k-1} Q_{2k-2} + P_{2k-1} Q_{2k-4} &= P_{2k-1} Q_{2k-4} - P_{2k-3} Q_{2k-2}, \end{aligned}$$

wie behauptet war. Nun ist $P_5 = 19$, $Q_2 = 1$, $P_3 = 5$, $Q_4 = 4$, sohin $P_5 Q_2 - P_3 Q_4 = 19 - 20 = -1$. Dieser Einzelwerth muss aber, wie wir sahen, allgemein gelten.

III. Hülfssatz. Es ist

$$\begin{vmatrix} P_{2k+1} & Q_{2k+1} \\ P_{2k-1} & Q_{2k-1} \end{vmatrix} = 2.$$

IV. Hülfssatz. Es ist.

$$\begin{vmatrix} P_{2k+1} & Q_{2k} \\ P_{2k-1} & Q_{2k-2} \end{vmatrix} = -1.$$

V. Hülfssatz. Es ist

$$\begin{vmatrix} P_{2k} & Q_{2k+1} \\ P_{2k-2} & Q_{2k-1} \end{vmatrix} = -1.$$

Auf diese Lemmen gestützt, führt man die beiden Hauptbeweise durch einfache Umformung von Identitäten. Die identische Gleichung

$$-1 + 8 - 4\sqrt{3} - 7 + 4\sqrt{3} = 0$$

lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$-1 + 4(2 - \sqrt{3}) - 2(2 - \sqrt{3}) - (3 - 2\sqrt{3}) = 0,$$

und daraus fliesst wieder nach Hülfssatz I und II

$$\begin{aligned} P_{2k-2} Q_{2k-2} - P_{2k-2} Q_{2k} - (2 - \sqrt{3}) \left(P_{2k} Q_{2k-4} - P_{2k-4} Q_{2k}\right) \\ + 2(2 - \sqrt{3}) \left(P_{2k-2} Q_{2k-4} - P_{2k-4} Q_{2k-2}\right) \\ + (3 - 2\sqrt{3}) \left(P_{2k-2} Q_{2k-4} - P_{2k-4} Q_{2k-2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Rechnet man die Klammern aus und addirt beidseitig

$$(\sqrt{3} - 2) P_{2k-2} Q_{2k-2},$$

so erhält man folgende neue Gleichung:

$$\begin{aligned} P_{2k} Q_{2k-2} - (2 - \sqrt{3}) P_{2k-2} Q_{2k-2} - (2 - \sqrt{3}) P_{2k} Q_{2k-4} \\ + (4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3) P_{2k-2} Q_{2k-4} = P_{2k-2} Q_{2k} \\ - (2 - \sqrt{3}) P_{2k-2} Q_{2k-2} - (2 - \sqrt{3}) P_{2k-4} Q_{2k} \\ + (4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3) P_{2k-4} Q_{2k-2}. \end{aligned}$$

Fasst man auf beiden Seiten gehörig zusammen, so erhält man als neue Gleichung

$$\begin{aligned} (P_{2k} - 2P_{2k-2} + \sqrt{3} P_{2k-2}) (Q_{2k-2} - 2Q_{2k-4} + \sqrt{3} Q_{2k-4}) \\ = (P_{2k-2} - 2P_{2k-4} + \sqrt{3} P_{2k-4}) (Q_{2k} - 2Q_{2k-2} + \sqrt{3} Q_{2k-2}). \end{aligned}$$

Durch entsprechende Division geht diese Gleichung über in die erste der obigen Mollweide'schen Relationen:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(P_{2k}-2P_{2k-2}+\sqrt{3}P_{2k-2})}{\frac{1}{\sqrt{3}}(Q_{2k}-2Q_{2k-2}+\sqrt{3}Q_{2k-2})}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(P_{2k-2}-2P_{2k-4}+\sqrt{3}P_{2k-4})}{\frac{1}{\sqrt{3}}(Q_{2k-2}-2Q_{2k-4}+\sqrt{3}Q_{2k-4})}.$$

Im zweiten Falle legen wir die Identität

$$2-(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-1)-(4-2\sqrt{3})=0$$

zu Grunde und schreiben dieselbe, mit Berufung auf Hülfssatz III, IV, V und I in nachstehender Form:

$$\begin{aligned}P_{2k+1}Q_{2k-1}-P_{2k-1}Q_{2k+1}+(\sqrt{3}-1)(P_{2k+1}Q_{2k-2}-P_{2k-1}Q_{2k})\\+(\sqrt{3}-3)(P_{2k}Q_{2k-1}-P_{2k-2}Q_{2k+1})\\+(4-2\sqrt{3})(P_{2k}Q_{2k-2}-P_{2k-2}Q_{2k})=0.\end{aligned}$$

Durch ganz einfache Umformungen ergiebt sich hieraus, ähnlich wie oben,

$$\begin{aligned}&(P_{2k+1}+\sqrt{3}P_{2k}-P_{2k})(Q_{2k-1}+\sqrt{3}Q_{2k-2}-Q_{2k-2})\\&=(P_{2k-1}+\sqrt{3}P_{2k-2}-P_{2k-2})(Q_{2k+1}+\sqrt{3}Q_{2k}-Q_{2k}),\end{aligned}$$

und endlich durch Division

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(P_{2k+1}+\sqrt{3}P_{2k}-P_{2k})}{\frac{1}{\sqrt{3}}(Q_{2k+1}+\sqrt{3}Q_{2k}-Q_{2k})}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(P_{2k-1}+\sqrt{3}P_{2k-2}-P_{2k-2})}{\frac{1}{\sqrt{3}}(Q_{2k-1}+\sqrt{3}Q_{2k-2}-Q_{2k-2})}.$$

Diess ist aber der zweite der von Mollweide dem Archimedes zugeschriebenen Sätze. Wir hoffen, durch die Betrachtungen dieses Paragraphen die Berechtigung dafür nachgewiesen zu haben, dass wir die Mollweide'sche Methode den versteckten Kettenbruch-Algorithmen zurechneten und sie demzufolge in diesem II. Kapitel unterbrachten.

§. 9. *Die Methode von Hauber.* Es ist nicht unmöglich, dass Hauber, zu dessen Methode die chronologische Ordnung nunmehr führt, durch die Lektüre der Mollweide'schen Schrift zu seinem eigenen Versuche angeregt wurde. Auch der würtembergische Mathematiker will sich strenge in den Grenzen dessen halten, was bei einem alten Geometer, zumal bei Archimedes, wirklich vorausgesetzt werden könne, und er war, was genaue Kenntniss der antiken Denkweise anbetrifft, auch gewiss sehr gut zu seinem Unternehmen vorbereitet. Hauber's Arbeit verdient auch aus dem Grunde besondere Beachtung, weil er sich nicht, wie die Mehrzahl seiner Collegen, auf $\sqrt{3}$ beschränkte, sondern auch die anderen in der „Kreismessung" zu findenden Näherungswerthe gleichmässig in Betracht zog.

Wir knüpfen an Hauber's Nachweis der archimedischen Ungleichheit

$$\sqrt{9082321}<3013\tfrac{3}{4}$$

an. Man kann $9082321 = 3013^2 + 4152$ setzen; Hauber aber giebt durch Einführung eines willkürlichen Faktors dem ursprünglichen Probleme die Form $9082321\,B^2 = A^2$ und setzt dann

$$(A - 3013B)(A + 3013B) = 4152B^2,$$

woraus, wenn $A - 3013B = R'$ gemacht wird, die Proportion

$$\frac{B}{R'} = \frac{A + 3013B}{4152B}$$

folgt. Nach dem auch von Mollweide so häufig angewandten Proportionssatze ergiebt sich hieraus

$$\frac{B - R'}{R'} = \frac{A - 1139B}{4152B}$$

oder, durch Umkehrung, $B - R' = R''$ gesetzt,

$$\frac{R'}{R''} = \frac{4152B}{A - 1139B}.$$

Um dieses Restverhältniss weiter umzuformen, wird der Ausdruck

$$3013B^2 - 1139B^2 = (3013B + 1139B)(3013B - 1139B) = 4152.1874B^2$$

mit der ursprünglichen Gleichung

$$A^2 - 3013B^2 = 1 \,.\, 4152B^2$$

in Verbindung gesetzt; addirt man, so wird

$$(A + 1139B)(A - 1139B) = 4152 \,.\, 1875B^2,$$

und führt man für den zweiten Faktor links wieder sein Zeichen R'' ein, so ist die zuletzt angeschriebene Proportion in die folgende übergegangen:

$$\frac{R'}{R''} = \frac{A + 1139B}{1875B}.$$

Das letztere Verhältniss ist < 3, $R' < 3R''$, $R'' > \frac{1}{3}R'$. Da aber $B = R' + R''$ war, so ist $R' < \frac{3}{4}B$ und

$$(A = 3013B + R') < 3013\tfrac{3}{4}B,$$

oder, wenn auf beiden Seiten mit B weggehoben wird,

$$\sqrt{9082321} < 3013\tfrac{3}{4}.$$

Drückt man, wie es Hauber (a. a. O.) gethan, Alles in algebraischen Zeichen aus, so kann man

$$A = \mu B + R,\; B = \mu' R + R',\; R = \mu'' R' + R'' \ldots$$

setzen, und das ganze Verfahren gipfelt ersichtlich in der Bestimmung der

Coëfficienten μ. Oben ward die Rechnung nur soweit fortgeführt, um die Richtigkeit des archimedischen Zahlwerthes zu erhalten; vom Verf. dagegen ward schon früher, besserer Uebersicht halber, noch μ''' und R''' dazu berechnet 219). Es ist in unserem Falle $\mu = 3013$, $\mu' = 1$, $\mu'' = 2$, $\mu''' = 4$.

Uebersieht man diesen Gang des Calculs im Zusammenhang, so kann man nur mit grösstem Erstaunen des Umstandes gedenken, dass Hauber dem De Lagny den Vorwurf macht, dessen Verfahren sei eigentlich nichts anderes als die bekannte Lagrange'sche Kettenbruchentwickelung, laufe daher ganz dem Geiste der Antike zuwider. Und während er so den Splitter in seines Nächsten Auge zu erkennen glaubte, der aber in Wirklichkeit gar nicht vorhanden war, bemerkte er den Balken im eigenen Auge nicht. Während De Lagny's Kettenbruch, wenn man ihn (vgl. §. 6) aus seiner Umhüllung herausschält, der gewöhnliche eingliedrig-periodische ist, bedient sich Hauber eines Algorithmus, der in der That nur in der äusseren Form der Rechnung nicht mit jenem von Lagrange übereinstimmt, und man sollte wirklich meinen, Ersterer habe diess selbst an der Gestalt der von ihm aufgestellten Rekursionsgleichungen erkennen müssen. Der Nachweis der absoluten Identität von Lagrange's und Hauber's Methode ward in der mehrfach genannten Monographie des Verf. mehr nur angedeutet; diessmal gedenken wir diesen Beweis in der einfachsten Weise dadurch zu erbringen, dass wir ganz im Sinne des französischen Analytikers $\sqrt{9082321}$ in einen Kettenbruch vom Theilzähler 1 entwickeln. Man hat bekanntlich nach Lagrange 220) folgendes Schema zu bilden:

$$\sqrt{9082321} = \mathbf{3013} + \frac{\sqrt{9082321} - 3013}{1}, \qquad \frac{A}{A_1} = \frac{3013}{1},$$

$$\frac{1}{1\,.\,\sqrt{9082321} - 3013} = \frac{\sqrt{9082321} + 3013}{4152} = \mathbf{1} + \frac{\sqrt{9082321} - 1139}{4152}, \quad \frac{B}{B_1} = \frac{3014}{1},$$

$$\frac{1\,.\,\sqrt{9082321} - 3013}{3014 - 1\,.\,\sqrt{9082321}} = \frac{\sqrt{9082321} + 1139}{1875} = \mathbf{2} + \frac{\sqrt{9082321} - 2611}{1875}, \quad \frac{C}{C_1} = \frac{9041}{3},$$

$$\frac{3014 - 1\,.\sqrt{9082321}}{3\,.\sqrt{9082321} - 9041} = \frac{(3014 - 1\,.\sqrt{9082321})(3\,.9082321 + 9041)}{9\,.\,9082321 - 9041^2}$$

$$= \frac{\sqrt{9082321} + 2611}{1208} = \mathbf{4} + \cdots, \quad \frac{D}{D_1} = \left(\frac{39178}{13} \sim 3013 + \frac{3}{4}\right).$$

$\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1} \cdots$ stellen hier, wie gewöhnlich, resp. den ersten, zweiten... Näherungswerth des Kettenbruches vor, in welchen die Wurzel aufgelöst wurde; in unserem Falle ist

$$\sqrt{9082321} = 3013 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Die im Schema fettgedruckten ganzen Zahlen sind bekanntlich die Theilnenner des sich ergebenden Kettenbruches und zugleich einerlei mit den von Hauber eingeführten Coëfficienten μ, μ', μ'', μ''' . . ., mit deren Zahlwerthen sie denn auch wirklich der Reihe nach übereinstimmen. Man überzeugt sich, dass unser obiges Entwickelunsgverfahren völlig das Hauber'sche ist, und kann sich kaum des Gedankens entschlagen, dieser Gelehrte habe die Methode von Lagrange einfach antikisirt. Die ganze Einkleidung jedoch und die Persönlichkeit eines so bewährten Mannes bürgen wohl für das Eigenthumsrecht Hauber's, und so bleibt nur übrig, ein sonderbares Zusammentreffen anzunehmen. Daran freilich vermögen wir nicht zu glauben, dass Archimedes seine Näherungswerthe wirklich auf diesem Wege gefunden und jede Mittheilung einer so hervorragenden Erfindung unterdrückt haben sollte, da er doch alle arithmetischen Kunstgriffe, die ihm z. B. bei seinen Untersuchungen über die Schneckenlinie gedient haben, uns nicht vorenthält. Die für die ganze Entwickelung grundlegende Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

wäre freilich dem X. Buche der euklidischen Elemente zu entnehmen gewesen 221), allein wie soll man erklären, dass die Kenntniss dieser bequemen Umformung mit Archimedes verloren gegangen und erst durch die Araber (Kap. I, §. 15) wieder aufgenommen worden wäre? Wir werden übrigens noch später einmal auf die Lagrange'sche Behandlung der Quadratwurzel in Verbindung mit einem anderen geschichtlichen Momente zurückzukommen haben.

§. 10. *Die Methode von Commandin und die erste Methode von Buzengeiger.* Bereits im XVI. Jahrhundert hatte Federigo Commandino, der bekannte Uebersetzer und Bearbeiter alter mathematischer Werke, in seinem Commentar zum Archimedes eine Construktion angegeben 222), mittelst deren die Quadratwurzeln decimaler Zahlen leichter uud bequemer zu finden sein sollte, als durch die allerdings ähnliche Construktion des Theon, welch' letzterer nur die Bedürfnisse der „Astrologen“ — besser gesagt, des Sexagesimalcalculs — berücksichtige. Diese Zeichnung nun hat Buzengeiger 223) in algebraische Formeln umgesetzt, und so kann man wohl mit Grund von einer Commandin-Buzengeiger'schen Methode reden. Da jedoch in dem zuletzt genannten Aufsatze auch noch ein anderes Verfahren zur Ableitung der archimedischen Resultate in Vorschlag gebracht wird, so haben wir für die Titelaufschrift dieses Paragraphen eine dem entsprechende Form gewählt.

ABCD (Fig. 10) sei ein rationales Quadrat, dessen Seite es annähernd in rationalen Zahlen zu ermitteln gelte. Von den beiden ebenfalls

rationalen Quadraten $AEFG$ und $AHJK$, deren Seiten man willkürlich — natürlich möglichst nahe an AB — nehmen kann, sei das erstere kleiner, das andere grösser als das ursprüngliche Quadrat. Jetzt kommt es darauf an, ein neues Quadrat von rationaler Seite x so zu construiren, dass

$$\square\, AEFG < x^2 < \square\, ABCD$$

werde, denn wenn die Verzeichnung eines solchen Einmal gelungen ist, so kann der damit gegebene Annäherungswerth offenbar beliebig weit getrieben werden. Buzengeiger macht auf der über G verlängerten FG eine Strecke $GL = FG$ und vervollständigt das Rechteck $LL'CC'$, dann ist

$$\text{Rechteck } LL'CC' = \text{Gnomon } FEBCDG = \square\, ABCD - \square\, AEFG.$$

FC' wird nun verlängert, bis es die Quadratseite JH in N trifft, und nun an die Strecke LN ein Rechteck so angestreckt, dass

$$\text{Rechteck } LNN'L'' = \text{Rechteck } LL'CC'$$

wird. $NN' = C''C'$ muss mithin $< (CC' = DG)$ sein, und der Punkt F', in welchem $L''N'$ die Diagonale trifft, muss zwischen F und C zu liegen kommen. Das entsprechende Quadrat $AE'F'G'$ kann also für das gesuchte Quadrat x^2 gelten.

Wird $\square\, ABCD$ schlechtweg mit A, Seite AE mit a, Seite AH mit α bezeichnet, so ist Rechteck $LL'CC'$ = Gnomon $FEBCDG = A - a^2$, Rechteck $LNN'L''$ nach Construktion gleich $(a + \alpha)\, NN'$, sonach

$$NN' = \frac{A - a^2}{a + \alpha}.$$

Jetzt ist $AE' = a + EE' = a + NN'$ leicht zu finden; man bekommt nämlich

$$AE' = a' = a + \frac{A - a^2}{a + \alpha} = \alpha - \frac{\alpha^2 - A}{a + \alpha}.$$

Denkt man sich jetzt vom Quadrate $AE'F'G'$, wie vorhin vom Quadrate $AEFG$, ausgegangen und eine neue Quadratseite $a'' > a'$, jedoch $< \sqrt{A}$, ermittelt, so muss sein

$$a'' = \alpha - \frac{\alpha^2 - A}{a' + \alpha} = \alpha - \frac{\alpha^2 - A}{\alpha + a'} = \alpha - \cfrac{\alpha^2 - A}{2\alpha - \cfrac{\alpha^2 - A}{\alpha + a}}.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man den $n$ten Näherungswerth durch den Kettenbruch

$$\alpha - \cfrac{\alpha^2 - A}{2\alpha - \cfrac{\alpha^2 - A}{2\alpha - \cdots - \cfrac{\alpha^2 - A}{2\alpha - \cfrac{\alpha^2 - A}{\alpha + a}}}}.$$

Für $A = 3$, $a = 1$, $\alpha = 2$ wird

$$a' = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}, \quad a'' = 2 - \frac{1}{4 - \frac{1}{3}} = 2 - \frac{3}{11} = \frac{19}{11},$$

$$a''' = 2 - \frac{1}{4 - \frac{3}{11}} = 2 - \frac{11}{41} = \frac{71}{41}, \quad a^{(IV)} = 2 - \frac{1}{4} - \frac{11}{41} = \frac{265}{153}.$$

Dass diess so sein muss, leuchtet ein, da ja die Methode nur äusserlich, nicht aber dem Wesen nach von der gewöhnlichen Entwickelung in einen eingliedrig-periodischen Kettenbruch abweicht. In Folge dessen trifft die Berechnung der Näherungswerthe von $\sqrt{3}$ in erwünschtester Weise zu, nicht so jedoch z. B. die Berechnung jener von $\sqrt{349450}$. Hier ist $A = 349450$, $a = 591$, $\alpha = 592$ und somit

$$a' = 592 - \frac{1014}{1183} = 591 + \frac{169}{1183},$$

und diess ist genau $591 \frac{1}{7}$, während doch (Kap. I, §. 2) Archimedes $591 \frac{1}{8}$ angiebt.*) Die Gründe aber, mit welchen Buzengeiger die Wahl des Ersteren rechtfertigen zu können vermeint, sind durchaus nicht sehr triftiger Natur.

§. 11. *Die zweite Methode von Buzengeiger und deren Vorgeschichte.* Buzengeiger begnügt sich übrigens nicht mit der vorstehend geschilderten Methode, deren Grundgedanken er, wie wir wissen, von Commandin entlehnt hat, sondern entwickelt aus ihr heraus auch noch eine zweite, welche sich durch eine ungleich raschere Convergenz auszeichnet. Vorhin wurden dem gegebenen Quadrate lauter kleinere Quadrate einbeschrieben, die Näherungswerthe mussten folglich ausnahmslos zu klein ausfallen. Will man dagegen ein Quadrat von rationaler Seite $> \square ABCD$ (Fig. 11) construiren, so zeichnet man wieder zunächst das kleinere Quadrat $AEFG = a^2$, macht $GL = FG$ und

$$\text{Rechteck } LC = A - a^2.$$

Nun werde Rechteck LM = Rechteck LC gemacht; die der LF gegenüberliegende Seite schneidet die verlängerte Diagonale AC in J, und es ist jetzt

$$\square AKJH > \square ABCD.$$

---

*) Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, dass, sobald nur $a = 1 + \alpha$ genommen wird, der zweite Näherungswerth bei Buzengeiger mit dem von Alkarkhî und Al-Moruzi (Kap. I, §. 15) angegebenen zusammentrifft. Es ist ja

$$\alpha' = \alpha - \frac{\alpha^2 - A}{\alpha + a} = \alpha - \frac{\alpha^2 - \alpha^2 - \beta}{2\alpha + 1} = \alpha + \frac{\beta}{2\alpha + 1},$$

wenn $A = \sqrt{\alpha^2 + \beta}$ vorausgesetzt war.

Bezeichnet man die Seite des grösseren Quadrates mit α, so ist 224)

$$\alpha = a + \frac{A - a^2}{2a} = \frac{A + a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right).$$

Nun hindert aber gar nichts, aus α eine neue Annäherung α' ganz ebenso herzuleiten, wie α selbst aus a hergeleitet ward, ebenso dann aus α' ein neues α'', u. s. f. Der ganze Process wird dann durch folgende Reihe von Gleichungen dargestellt:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right), \ \alpha' = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{A}{\alpha}\right), \ \alpha'' = \frac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{A}{\alpha'}\right), \alpha''' = \frac{1}{2}\left(\alpha'' + \frac{A}{\alpha''}\right) \cdots$$

Dieses Verfahren verhilft uns, in richtiger Weise angewendet, zu den archimedischen Näherungswerthen in einer dem ersten Anscheine nach geradezu überraschenden Weise. Nehmen wir nämlich*) $a = \frac{5}{3}$, so ergiebt sich sofort

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + \frac{9}{5}\right) = \frac{26}{15}, \ \alpha' = \frac{1}{2}\left(\frac{26}{15} + \frac{45}{26}\right) = \frac{1351}{780}.$$

Wollte man also annehmen, dem Archimedes sei die Näherung $\frac{26}{15} \sim \frac{265}{153}$ bekannt und bewusst gewesen, so hätte man allerdings mittelst der zweiten Buzengeiger'schen Näherungsmethode die charakteristischen Zahlen Archimed's mit Einem Schlage erhalten. Allein dem gegenüber muss eben immer wieder daran erinnert werden, dass die Zahl $\frac{26}{15}$, so naheliegend sie ist, wohl bei Heron und bei anderen alten Schriftstellern, nicht jedoch in der *κύκλου μέτρησις* selbst vorkommt. Immerhin ist es der Mühe werth, festzustellen, dass diese Methode wohl die einzige ist, welche die sonst nur allmählich zu berechnende Zahl $\frac{1351}{780}$ leicht und sicher liefert, mit Ausschluss aller jener minder genauen Näherungswerthe, für deren Nichtbenützung Seitens des Archimedes wir bislang einen voll und ganz befriedigenden Grund nicht ausfindig zu machen im Stande gewesen sind.

Auf die archimedischen Näherungszahlen hat Buzengeiger wohl zuerst dieses überaus schnell zum Ziele führende Verfahren angewandt, und es ist

---

*) Buzengeiger ist der Ansicht, man müsse von $\frac{26}{15}$ ausgehen, um $\frac{1351}{780}$ zu finden; er übersieht, dass $\frac{26}{15}$ ganz ebenso aus $\frac{5}{3}$, dem zweiten Näherungswerthe von $\sqrt{3}$, der kleiner als die Wurzel selbst ist, hervorgeht. Die wahre Ursache dieses Sachverhaltes, über welchen der Erfinder sich selbst nicht genügend klar geworden, wird uns demnächst offenbar werden, wenn wir die beiden von jenem angegebenen Verfahrungsweisen unter einander vergleichen.

auch nicht daran zu zweifeln, dass seine geometrische Analysis ihm das Verdienst eigener Erfindung desselben sichert. Allein neu war dasselbe schon zu seiner Zeit keineswegs, vielmehr war dasselbe schon dreihundert Jahre vor ihm nicht nur Einzelnen, sondern einer ganzen grossen Gruppe von Mathematikern auf's Genaueste bekannt. Wir würden uns an und für sich nicht berechtigt glauben, dieser älteren Geschichte der Buzengeiger'schen Methode einen eigenen Exkurs zu widmen, wenn uns nicht zwei Gründe hiezu bestimmten. Wir wollen nämlich einmal unseren Beitrag dazu leisten, dass eine so wichtige und einfache Theorie des Quadratwurzelausziehens einen bestimmten Platz in der Wissenschaft einnehme, wie er ihr gebührt, und dann ist diese Darlegung früherer Bemühungen um das gleiche Ziel nothwendig, um den Inhalt des folgenden Paragraphen richtig würdigen zu können.

Libri hat geglaubt 225), die erste Anwendung des abgekürzten Verfahrens bei dem um die Wende des XVI. Jahrhunderts blühenden Bologneser Professor Cataldi nachweisen zu können. Dem gegenüber fragte schon im Jahre 1861 Fürst Balthasar Boncompagni bei dem durch seine tiefe Kenntniss der mathematischen Geschichte damals schon berühmten Woepcke an, ob nicht einige Andeutungen, welche in einer Handschrift der vatikanischen Bibliothek über eine gewisse Art, die Quadratwurzel auszuziehen, gegeben werden, auf genau dieselbe Methode Bezug hätten, und ob nicht eben diese auch in dem bekannten arithmetischen Hauptwerke des Luca Pacioli gelehrt werde. Woepcke antwortete auf beide Fragen im zustimmenden Sinne; sein Bescheid blieb jedoch unveröffentlicht, und erst auf eine dem Jahre 1874 entstammende Anregung hin veröffentlichte Fürst Boncompagni seine mit Woepcke geführte Correspondenz 226). Die betreffende Stelle des Vatikana-Manuskriptes ist daselbst faksimilirt zu finden. Pacioli berechnet am fraglichen Orte, wie deutsche Leser am Besten in Kästner's Geschichtswerk 227) finden können, $\sqrt{6}$ nach diesem Modus; die aufeinanderfolgenden Näherungswerthe sind

$$2,\ 2\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+\frac{12}{5}\right)=2\frac{9}{20},\ \frac{1}{2}\left(\frac{49}{20}+\frac{120}{49}\right)=\frac{4801}{1960}=2+\frac{881}{1960}.$$

Schon dieses eine Beispiel lässt die vollständige Einerleiheit der Methoden von Bruder Lucas und Buzengeiger erkennen.

Die weitere Verfolgung derselben bei den italienischen Rechenmeistern und Algebraikern des XVI. Jahrhunderts hat sich Favaro zur Aufgabe gemacht und ist derselben auch mit Erfolg gerecht geworden. Wir folgen in unserer Erzählung der Hauptsache nach den von ihm gegebenen Aufschlüssen. Im Jahre 1536 berechnet 228) auf diese Weise der Florentiner

Ghaligai $\sqrt{24}$, allerdings insoferne mit einer kleinen Aenderung, als er, um $\sqrt{5^2 - 1}$ zu finden, die Näherungswerthe

$$5,\ 5 - \frac{1}{10} = 4\frac{9}{10},\ \frac{1}{2}\left(\frac{49}{10} - \frac{240}{49}\right) + 4 = 4 + \frac{1}{980}$$

bildet. Weiter sind hier zu nennen Franzisco di Lazisio 229), Verfasser eines Lehrbuches der Arithmetik und Geometrie, der berühmte Cardan 230), auf dessen Arbeiten über Quadratwurzelausziehung indess bereits früher von Cantor 231) hingewiesen worden war, dessen grosser Nebenbuhler Tartaglia 232), welcher dem Verfahren in seiner „Regola di saper sempre approssimarsi più nelle radici sorde" eine für jene Zeit musterhafte wissenschaftliche Fassung ertheilte, endlich Giuseppe Unicorno, gest. 1610, dessen 1598 zu Venedig herausgekommenes Werk „Aritmetica universale" den Bibliographen durchweg entgangen ist, jedoch schon wegen der darin ebenfalls enthaltenen Methode von Pacioli einige Beachtung verdient 233).

Ganz unbeeinflusst weder von den italienischen Vorläufern noch auch von der Buzengeiger'schen Nacherfindung hat in neuerer Zeit wieder J. Bertrand dieses Approximationsverfahren in den Vordergrund gerückt 234), und da der geschichtliche Hergang so gänzlich in den Hintergrund getreten war, so hatte man sich geradezu gewöhnt, von dem Bertrand'schen Verfahren zu sprechen. Jedenfalls hat der französische Mathematiker das Verdienst, uns die wissenschaftliche Bedeutung des vollständig in Vergessenheit gerathenen Verfahrens wieder näher gebracht zu haben. Den eigentlichen Charakter desselben als einer gewaltig abgekürzten und eben deshalb praktisch äusserst werthvollen Kettenbruchentwickelung scheint allerdings Bertrand nicht erkannt zu haben. Die Untersuchung dieses Verhältnisses wird uns im übernächsten Paragraphen eingehend beschäftigen, nachdem wir zunächst die grundsätzliche Identität gewisser gleich näher zu besprechender Methoden mit jener Pacioli's und Buzengeiger's festgestellt haben werden.

§. 12. *Die Methoden von Oppermann und Alexejeff.* Ueber die erstere aus eigener Anschauung Bericht zu erstatten sind wir leider nicht vermögend, da der ihr gewidmete Aufsatz in einer uns nicht zugänglichen dänischen Zeitschrift enthalten ist 235). Glücklicherweise aber hat Heiberg 236) einen bei aller Kürze doch klaren und die wesentlichen Punkte hervorhebenden Auszug aus jenem Aufsatz gegeben, den wir seinem ganzen Wortlaute nach hier folgen lassen: „Notum est, duorum numerorum medietatem geometricam eandem geometricam esse medietatem medietatis eorum arithmeticae et medietatis harmonicae:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} : \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha\beta} : \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

Itaque si inter duos numeros medietates arithmeticam et harmonicam, inter eas rursus easdem earum medietates interposuerimus eodemque modo semper progressi erimus, magis magisque geometricae illorum numerorum medietati adpropinquabimus. Sint numeri 1 et 3 sumpti; itaque hac ratione quater usi, has fractiones reperiemus:

$$\frac{2}{1} > \sqrt{3} > \frac{3}{2},\ \frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{12}{7},\ \frac{97}{56} > \sqrt{3} > \frac{168}{97},\ \frac{19817}{10864} > \sqrt{3} > \frac{32592}{19817}.$$

$\frac{7}{4} > \sqrt{3}$ duabus prioribus rationibus inventum est; etiam $\frac{97}{56} > \sqrt{3}$. Adparet ex fractionibus tertio loco positis erui posse minorem illum Archimedis terminum; nam $168 + 97 = 265$, $97 + 56 = 153$. Sed offendit, quod hac ratione ad ipsas illas fractiones ab Archimede sumptas non pervenitur."

Heiberg betont selbst die Bedenken, welche der Anerkennung dieser Rechnungsweise als einer ächt archimedischen entgegenstehen. Bemerkenswerth ist allerdings, dass ganz von selbst der von Gerbert (Kap. I, §. 11) gebrauchte Näherungswerth sich ergiebt, allein zur Gewinnung von $\frac{265}{153}$ muss Oppermann von dem Satze ausgehen, dass die Näherungswerthe $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ den Bruch

$$\frac{a+c}{b+d}$$

als neuen Näherungswerth aus sich hervorgehen lassen, und diese mit Bewusstsein erst von Etienne de la Roche (vgl. §. 4) erkannte Wahrheit bereits in die vorchristliche Zeit verlegen zu wollen, erschiene uns allzu gewagt.*)

---

*) Anhangsweise möge zu der Oppermann'schen Methode bemerkt werden, dass dieselbe von einem anderen dänischen Mathematiker, Steen, zum Ausgangspunkt für eine selbstständige Bearbeitung des Gegenstandes genommen worden ist 237). Die Berechnung von $\sqrt{3}$, welche Steen giebt, ist allerdings nur eine verklausulirte Kettenbruchentwickelung, dagegen scheint sich ein anderer einfacher Gedanke, der daselbst Ausdruck findet, gerade für einige archimedische Quadratwurzeln sehr wohl zu empfehlen. Ist nämlich A eine sehr grosse Zahl, so führt das Anschreiben einer oder der anderen der beiden gesetzmässig fortschreitenden Ungleichungen

$$\begin{array}{ll} a > \sqrt{A} > a-1, & a > \sqrt{A} > a-1, \\ \frac{2a}{2} > \sqrt{A} > \frac{2a-1}{2}, & \frac{2a-1}{2} > \sqrt{A} > \frac{2a-2}{2}, \\ \frac{4a}{4} > \sqrt{A} > \frac{4a-1}{4}, & \frac{4a-2}{4} > \sqrt{A} > \frac{4a-3}{4} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Vor wenigen Jahren veröffentlichte der Russe Alexejeff, ohne von seinen Vorgängern Kenntniss zu haben, eine Abhandlung 238), deren wesentlicher Inhalt in einer gewissen Verallgemeinerung des Oppermann'schen Verfahrens besteht. Er zerlegt die Zahl A, aus welcher die zweite Wurzel gezogen werden soll, in das Produkt der Theiler a_0 und b_0 $(b_0 < \sqrt{A} < a_0)$ und setzt alsdann (s. o.)

$$\frac{2A}{a_0 + b_0} < \sqrt{A} < \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Wird dann $\frac{a_0 + b_0}{2} = a_1$, $\frac{2A}{a_0 + b_0} = b_1$ gesetzt, so ist wiederum

$$\frac{2A}{a_1 + b_1} < \sqrt{A} < \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Ist allgemein $\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = a_n$, $\frac{2A}{a_{n-1} + b_{n-1}} = b_n$, so gelangt man endlich zu

$$\frac{2A}{a_n + b_n} < \sqrt{A} < \frac{a_n + b}{2},$$

und da

$$b_0 < b_1 < b_2 \cdots < b_{n-1} < b_n < \sqrt{A} < a_n < a_{n-1} \cdots < a_2 < a_1 < a_0$$

ist, so lässt sich ersichtlich die Annäherung bis zu jeder willkürlichen Grenze treiben. Um a_n zu bestimmen, hat man die rekurrente Beziehung*)

$$a_n = \frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{P'_{n-1}}{Q'_{n-1}} + \frac{A\,Q'_{n-1}}{P'_{n-1}}\right) = \frac{P'^2_{n-1} + A\,Q'^2_{n-1}}{2\,P'_{n-1}\,Q'_{n-1}}.$$

---

sehr bald zu brauchbaren Näherungswerthen. So z. B. bekommen wir für zwei der in der „Kreismessung" vorkommenden Irrationalitäten (Kap. I, §. 2) dieses Schema:

$$3014 > \sqrt{9082321} > 3013, \qquad 2340 > \sqrt{5472132\,\tfrac{1}{16}} > 2339,$$

$$\frac{6028}{2} > \sqrt{9082321} > \frac{6027}{2}, \qquad \frac{4679}{2} > \sqrt{5472132\,\tfrac{1}{16}} > \frac{4678}{2},$$

$$\frac{12056}{2} > \sqrt{9082321} > \frac{12055}{4}. \qquad \frac{9358}{4} > \sqrt{5472132\,\tfrac{1}{16}} > \frac{9357}{4}.$$

$\frac{12055}{4} = 3013\,\frac{3}{4}$ und $\frac{9357}{4} = 2339\,\frac{1}{4}$ sind nun aber auch wirklich die Werthe, welche Archimedes für die fraglichen Quadratwurzeln angiebt.

*) Da wir bisher und auch im folgenden Paragraphen die Näherungswerthe des eingliedrig periodischen Kettenbruches mit $P_n : Q_n$ bezeichnen, so wurden zum Unterschiede die von Alexejeff eingeführten Zeichen durch Akute charakterisirt.

Dieser Bruch ist, wie aus dem Hergang ohne Weiteres zu schliessen ist, ein irreducibler, und man darf sonach

$$P_n' = P_{n-1}'^2 + A Q_{n-1}'^2,$$
$$Q_n' = 2 P_{n-1}' Q_{n-1}'$$

setzen. Im Falle, dass A eine Primzahl ist, muss $b = 1$, $a = A$ gesetzt werden, und es treten sonach gewisse Vereinfachungen in den obigen Formeln ein.

Soll nun für's Erste die Frage beantwortet werden, ob diese Art der Einschliessung in Grenzen wohl bis auf Archimedes selbst zurückgeführt werden dürfe, so ist allerdings zuzugeben, dass bei Jamblichos die analylytische Gleichung

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$$

vorkommt 239), welche die Basis der Methode bildet. Allein, wie schon erwähnt, liegt ein grosses Hinderniss in dem Umstande, dass gerade für $\sqrt{3}$ die archimedischen Zahlen gar nicht oder doch nur mit Hülfe eines Kunstgriffes zu erhalten sind.*)

*) Auf diesen Uebelstand hat später Ch. Henry hingewiesen, der auch zuerst der Alexejeff'schen Methode den Charakter der Neuheit abgesprochen und sonst mehrere geschichtliche Notizen über dieselbe beigebracht hat, welche umstehend ihre Verwerthung fanden 240). Sein Vorschlag, diesem Mangel abzuhelfen, will uns jedoch nicht recht einleuchten. Er sagt nämlich 241): „Posons $3 = 3 \cdot 1$. La moyenne arithmétique ou la médiation de ces nombres est 2, la moyenne harmonique $\frac{3}{2}$. La médiation de cette médiation et de cette moyenne est $\frac{5}{3}$, la moyenne harmonique $\frac{9}{5}$." Auf diese Weise gelangt er durch fortgesetzte Medietäten-Bildung zu $\frac{26}{15}$ und $\frac{1351}{780}$. Allein unserer Rechnung nach ist das arithmetische Mittel von 2 und $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$, das harmonische Mittel $\frac{2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}}{2 + \frac{3}{2}} = \frac{12}{7}$. Es muss also wohl angenommen werden, Henry habe, um das gewünschte Ziel zu erreichen, an den ersten Mittelwerthen gewisse Aenderungen angebracht, und da über diese keine Rechenschaft gegeben wird, so verliert auch das Schlussergebniss an Gewicht. Henry zeigt (a. a. O.) auch, wie man durch eine einfache Construktion sich von dem Satze $M_a > M_g > M_h$ überzeugen könne, und weist auf eine andere Art der Verwendung von M_h bei gewissen den Griechen nicht unbekannten Näherungsrechnungen hin. Bei der Anfertigung seiner Sehnentafel habe Hipparch es sicher nicht vermeiden können, zwischen zwei gegebene Werthe einen dritten Werth einzuschalten. Darf man annehmen, dass das Stück der zwischen

§. 13. *Vergleichung der Oppermann'schen Methode mit den Kettenbrüchen.* Es liegt uns nunmehr die am Schlusse von §. 11 übernommene Verpflichtung ob, die im vorigen Paragraphen ihrem Wesen nach vorgeführten Methoden auf ihre wahre Natur zu prüfen und insbesondere ihren innigen Zusammenhang mit der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung, sowie ihre vollständige Identität mit der von uns so genannten zweiten Methode von Buzengeiger nachzuweisen. Um diesen beiden Pflichten zu genügen, knüpfen wir am besten an den von Alexejeff für a_n gegebenen independenten Ausdruck an.

Die ohne Beweis aufgestellten Formeln sind 242):

$$P'_n = \frac{(\sqrt{a_0} + \sqrt{b_0})^{2^n} + (\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0})^{2^n}}{2},$$

$$Q'_n = \frac{(\sqrt{a_0} + \sqrt{b_0})^{2^n} + (\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0})^{2^n}}{2\sqrt{A}}.$$

Der Beweis ist leicht zu führen, denn aus den obigen Rekursionsformeln kann man sofort entnehmen, es müsse

$$P'_n = \frac{x^{2^n} + y^{2^n}}{2}, \quad Q'_n = \frac{x^{2^n} - y^{2^n}}{2\sqrt{A}}$$

sein, denn nur unter dieser Voraussetzung wird, wie es sein muss,

$$P'^2_n + A Q'^2_n = \frac{x^{2^{n+1}} + 2x^{2^n}y^{2^n} + y^{2^{n+1}} + x^{2^{n+1}} - 2x^{2^n}y^{2^n} + y^{2^{n+1}}}{4}$$

$$= \frac{x^{2^{n+1}} + y^{2^{n+1}}}{2} = P'_{n+1},$$

$$2P'_n Q'_n = \frac{x^{2^{n+1}} - y^{2^{n+1}}}{2\sqrt{A}} = Q'_{n+1}.$$

---

dem Werthe a und dem Werthe b verlaufenden Argumentcurve in dem betreffenden Intervalle durch eine gerade Linie ersetzt werden dürfe, so ist die Interpolationsformel bekanntlich diese:

$$\frac{a-h}{h-b} = \frac{a}{b},$$

und daraus fliesst

$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Das Alles muss unbedenklich zugestanden werden, allein die Idee, die durch einen ersten Annäherungsprocess erhaltenen Glieder zur Grundlage für einen zweiten mehr convergirenden Process zu nehmen, will uns auch nach Henry's Ausführungen für einen griechischen Geometer nicht anders denn als zu modern erscheinen.

Zur Bestimmung von x und y haben wir nur $n = 0$ zu setzen, wodurch P'_0 in $\sqrt{a_0}$, Q'_0 in $\sqrt{b_0}$ übergeht; es ist also

$$\frac{x+y}{2} = \sqrt{a_0}, \quad \frac{x-y}{2} = \sqrt{b_0}$$

und hieraus

$$x = \sqrt{a_0} + \sqrt{b_0}, \quad y = \sqrt{a_0} - \sqrt{b_0}.$$

Suchen wir nun darzuthun, dass auch die Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \cdots}} = a + K$$

auf ganz dieselbe Formel führt. Wir haben gesehen, dass die Auffassung der Grössen a_0 und b_0 als ganzzahliger Theiler von A für die Methode in keiner Weise auszeichnend ist; vielmehr setzt diese lediglich die Ungleichungen

$$b_0 < \sqrt{A} \leqq a_0$$

voraus, denn dass auch die Gleichheit im letzteren Falle nicht ausgeschlossen sein kann, erhellt, da ja A auch eine Primzahl sein darf. Es hindert uns also nichts, wenn $\sqrt{A} = \sqrt{a^2+b}$ angenommen wird,

$$b_0 = a^2, \quad a_0 = a^2 + b$$

zu setzen, und die Alexejeff'sche Formel nimmt alsdann folgende Gestalt an:

$$\frac{P'_n}{Q'_n} = \sqrt{a^2+b} \cdot \frac{(a+\sqrt{a^2+b})^{2^n} + (a-\sqrt{a^2+b})^{2^n}}{(a+\sqrt{a^2+b})^{2^n} - (a-\sqrt{a^2+b})^{2^n}}.$$

Nun besagt aber die bekannte Stern'sche Formel, dass, wenn wir für den Kettenbruch K allein (ohne den Summanden a) den $(m-1)$ten Näherungswerth $P''_{m-1} : Q''_{m-1}$ berechnen, Nachstehendes erhalten wird:

$$\frac{P''_{m-1}}{Q''_{m-1}} = b \cdot \frac{(a+\sqrt{a^2+b})^{m-1} - (a-\sqrt{a^2+b})^{m-1}}{(a+\sqrt{a^2+b})^{m} - (a-\sqrt{a^2+b})^{m}}.$$

Addiren wir auf beiden Seiten die Grösse a, so geht die linke in den uns bereits bekannten Werth $P_m : Q_m$ über, und wir können nach einer einfachen Transformation

$$\frac{P_m}{Q_m} = \sqrt{a^2+b} \cdot \frac{(a+\sqrt{a^2+b})^{m} + (a-\sqrt{a^2+b})^{m}}{(a+\sqrt{a^2+b})^{m} - (a-\sqrt{a^2+b})^{m}}$$

setzen. Vergleichen wir jetzt beide Ergebnisse, so findet sich

$$\frac{P_{2^n}}{Q_{2^n}} = \frac{P'_n}{Q'_n},$$

oder in Worten: Der $n$te Näherungswerth des Alexejeff'schen Verfahrens

ist dem 2^nten Näherungswerth der Kettenbruchentwickelung gleich. Damit ist der erste Theil der übernommenen Aufgabe erledigt.

Nicht minder einfach wird diess auch mit deren zweitem Theile der Fall sein. Nach Buzengeiger (§. 11) besteht, wenn $\alpha^{(p)}$ den $(p+1)$ten Näherungswerth seines Verfahrens bezeichnet, für dieses $\alpha^{(p)}$ die Bedingungsgleichung

$$\alpha^{(p)} = \frac{1}{2}\left(\alpha^{(p-1)} + \frac{a^2+b}{\alpha^{(p-1)}}\right).$$

Gesetzt nun, es bestände eine gewisse Relation zwischen den Näherungswerthen beider Methoden, es sei etwa

$$\alpha^{(p)} = \sqrt{a^2+b}\cdot\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^q + (a-\sqrt{a^2+b})^q}{(a+\sqrt{a^2+b})^q - (a-\sqrt{a^2+b})^q};$$

dann müsste sein

$$\alpha^{(p+1)} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2+b}\,\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^q + (a-\sqrt{a^2+b})^q}{(a+\sqrt{a^2+b})^q - (a-\sqrt{a^2+b})^q}\right.$$
$$\left. + \frac{a^2+b}{\sqrt{a^2+b}}\cdot\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^q - (a-\sqrt{a^2+b})^q}{(a+\sqrt{a^2+b})^q + (a-\sqrt{a^2+b})^q}\right]$$

oder ausgerechnet

$$\alpha^{(p+1)} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b}$$
$$\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^{2q} + 2(-b)^q + (a-\sqrt{a^2+b})^{2q} + (a+\sqrt{a^2+b})^{2q} - 2(-b)^q + (a-\sqrt{a^2+b})^{2q}}{(a+\sqrt{a^2+b})^{2q} - (a-\sqrt{a^2+b})^{2q}}.$$

Vereinfachen wir hier entsprechend, so ergiebt sich endlich

$$\alpha^{(p+1)} = \sqrt{a^2+b}\cdot\frac{(a+\sqrt{a^2+b})^{2q} + (a-\sqrt{a^2+b})^{2q}}{(a+\sqrt{a^2+b})^{2q} - (a-\sqrt{a^2+b})^{2q}}.$$

Es ist aber, wie wir wissen, $\alpha \equiv \alpha^0 = a = P_1 : Q_1$, $\alpha' = a + \frac{b}{2a}$ $= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2+b}{a}\right) = P_2 : Q_2$, somit nach der zuletzt erhaltenen Formel auch

$$\alpha'' = \frac{P_4}{Q_4} = \frac{P_2{}^2}{Q_2{}^2},$$
$$\alpha''' = \frac{P_8}{Q_8} = \frac{P_2{}^3}{Q_2{}^3},$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$\alpha^{(n)} = \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{P_n'}{Q_n'}.$$

Der $(n+1)$te Näherungswerth der zweiten Methode von Buzengeiger deckt sich mit dem $n$ten Näherungswerth der Methode von Oppermann-Alexejeff.

Um dieses Ergebniss passend einzukleiden, greift man am Besten auf eine vom Verf. schon früher vorgeschlagene Terminologie zurück. Einer zuerst von Seidel 243) gegebenen Anregung folgend stellten wir damals 244) die folgende Definition auf: „Ist eine gewisse endliche Grösse durch Ausdrücke gegeben, welche ein unendlich fortgesetztes Wiederholen einer gewissen Operation erfordern (Reihe, Faktorenfolge, Kettenbruch, Potenz), und stehen diese Ausdrücke in einer solchen gegenseitigen Relation, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre $p$ten Näherungswerthe einander gleich sind, so nennen wir solche Ausdrücke äquivalent.“ In diese Kategorie der einfachen Aequivalenz gehört z. B. die Gleichheit eines aufsteigenden mit dem aus ihm entwickelten absteigenden Kettenbruch, wenn nämlich

$$\cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}{a_2}}{a_1} = \frac{b_1}{a_1} - \cfrac{a_1 b_2}{a_2 b_1 + b_2 - \cfrac{a_3 b_2 b_4}{a_4 b_3 + b_4 - \cdots - \cfrac{a_{n-1} b_{n-2} b_n}{a_n b_{n-1} + b_n}}}$$

gesetzt wird. Schon bei jener Veranlassung ward es jedoch als wünschenswerth betrachtet, die obige Definition zu verallgemeinern und zwar im folgenden Sinne 245): „Zwei unendliche Ausdrücke (diess Wort im Sinne Euler's genommen) haben eine $m-n$fache Aequivalenz, wenn der $m$te Näherungswerth der einen dem $n$ten des anderen gleich ist. Für $m=n$ ist diese Aequivalenz die früher definirte einfache.“ Wir werden weiter unten (§. 16) die Vortheile dieser Bezeichnung auch noch an einem anderen Falle constatiren können. Für jetzt genügt es uns zu sagen:

Die Aequivalenz zwischen dem gewöhnlichen Kettenbruchverfahren und jenem von Oppermann-Alexejeff-Buzengeiger ist eine $n - 2^{n-1}$fache; jene drei Methoden selbst aber stehen unter sich nicht nur in dem Verhältniss einfacher Aequivalenz, sondern sind überhaupt, von der äusseren Einkleidungsform abgesehen, identisch.

Es übrigt noch, einen Blick auf die kleine Geschichte zu werfen, welche diese Erkenntniss einer $n - 2^{n-1}$fachen Aequivalenz ebenso hat, wie andere wichtigere Entdeckungen. Zuerst scheint den wahren Sachverhalt Serret 246) wahrgenommen zu haben, allein seine gelegentliche Bemerkung hatte keine weiteren Folgen, und erst Henry hat (s. o.) wieder daran erinnert. Als dann Fürst Boncompagni, wie wir erfuhren, auf die Aequivalenz der Methoden von Pacioli und Cataldi aufmerksam wurde, legte er den Mathematikern eine auf den Nachweis dieser Aequivalenz abzielende Frage vor 247). Dieselbe ward gelöst von Moret-Blanc 248) und dem Verf.

dieses 249), von Ersterem mittelst des Hülfssatzes, dass aus $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ die Gleichheiten $a = c$ und $b = d$ folgen, von Letzterem mittelst direkter Vergleichung der independenten Ausdrücke, wie es auch oben geschehen ist.

§. 14. *Die erste Methode von P. Tannery und die Pell'sche Gleichung.* In neuester Zeit ist die Frage, wie wohl Archimedes zu seinen bekannten rationalen Näherungswerthen gelangt sein könne, gewiss am Vielseitigsten und Gründlichsten von Paul Tannery studirt worden 250). Es kommen jedoch dabei zwei verschiedene Auffassungen zur Geltung, die allerdings doch unter sich nahe zusammenhängen. Die äusserlich erste dieser beiden Auffassungen kann unserem Plane gemäss erst im nächsten Kapitel zur Sprache kommen, die andere dagegen, welche auch für die erstere maassgebend ist, und welche wir uns deshalb auch als Tannery's erste Methode zu bezeichnen erlaubten, fällt in den Bereich dieser Abtheilung. Nicht als ob Tannery der Ansicht huldigte, Archimedes habe mit Kettenbrüchen gerechnet. Aber seine durch manche gute Gründe gestützte Hypothese geht dahin, der grosse griechische Geometer habe sich zur Auffindung der Näherungswerthe einer Quadratwurzel in der Weise gestellt, dass er die ganzzahligen, resp. rationalen Auflösungen einer unbestimmten quadratischen Gleichung aufsuchte, jener Gleichung nämlich, die heute allgemein in der Wissenschaft den unter dem geschichtlichen Gesichtspunkt freilich ganz sinnlosen Namen der Pell'schen Gleichung führt. Und da für uns in der Gegenwart die Lösung dieser Gleichung nur als ein einfaches Problem der Kettenbruchlehre erscheint, so glaubten wir, dem Verfahren von Tannery eben den dafür gewählten Platz anweisen zu müssen.

Einen ähnlichen Gedanken, wie sein Landsmann, hat, wie wir uns erinnern, auch De Lagny (§. 6) ausgesprochen, allein er hat sich begnügt, auf $\sqrt{3}$ einen einfachen Kettenbruch-Algorithmus anzuwenden. Tannery verfährt consequenter. Sein Grundgedanke ist folgender: Archimedes kannte ein unserer modernen Methode ganz ähnliches Extraktionsverfahren — von ihm wird eben im nächsten Kapitel mehr die Rede sein —, um sich zunächst einen brauchbaren Näherungswerth der vorgelegten Quadratwurzel zu verschaffen. In den meisten Fällen blieb er bei dieser ersten Annäherung stehen; bei $\sqrt{3}$ genügte ihm dieselbe jedoch nicht, vielmehr bediente er sich jenes Verfahrens in diesem Falle nur, um eine erste Lösung der beiden Gleichungen

$$p^2 - 3q^2 = 1,$$
$$p^2 - 3q^2 = -2$$

zu bekommen, und nun verfügte er über eine neue, selbstständige, Methode,

welche ihm zu diesen ersten Lösungen eine beliebige Vielzahl weiterer Lösungen hinzuzufinden lehrte, wodurch er also Näherungswerthe von grösserer Genauigkeit erhielt 251).

Auch dieser zweite Theil der Arbeit, welche man als von Archimedes geleistet annehmen muss, lässt eine doppelte Deutung zu. Tannery weist nach 252), dass man durch verhältnissmässig einfache Betrachtungen zu der nämlichen cyklischen Auflösung der Pell'schen Gleichung gelangen kann, welche uns im I. Kapitel (§. 13) bei den Indern entgegengetreten ist. Er ist jedoch der Ansicht, dass sein Entwickelungsgang ungleich naturgemässer ist, als jener, welchen Hankel 253) den indischen Arithmetikern unterlegt: „mais que l'on compare," sagt er (a. a. O.) „la marche que je viens de suivre avec le procédé d'invention que propose le savant historien, et que l'on juge de quel côté est la simplicité et l'ordre naturel." Tannery fühlt allerdings ganz richtig heraus, dass sein Verfahren, $p^2 - aq^2 = 1$ in ganzen Zahlen aufzulösen, grundsätzlich mit der Darstellung

$$\sqrt{a} = E(a) - \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z_1 - \cfrac{1}{z_2 - \cdots}}}$$

übereinkommt, meint aber, dieser Umstand könne nicht hinderlich sein, da er ja thatsächlich den Kettenbruch durch die Reihenentwickelung

$$\sqrt{a} = E(a) - \frac{1}{z} - \frac{1}{z(zz_1 - 1)} - \cdots$$

ersetze 254). Daran ist nicht zu zweifeln, allein trotzdem veranlasst uns diese indirekte Kettenbruchmethode dazu, wenn uns die Wahl zwischen diesem und einem sofort näher zu schildernden anderen Verfahren von Tannery gelassen würde, unsere Wahl im letzteren Sinne zu treffen.

Der französische Gelehrte legt sich nämlich die Frage vor: Wie würde wohl Diophant sich bei der Auflösung der sogenannten Pell'schen Gleichung verhalten haben? Wir erwähnten bereits, dass diese Gleichung als solche in den Ἀριθμητικά eigenthümlicher Weise nicht vorkommt, allein ein so genauer Kenner dieses Werkes, wie unser Gewährsmann, weiss sich dessungeachtet aus den zahlreichen ähnlichen Gleichungen, die in jenem enthalten sind, Regeln von allgemeinerer Geltung zu verschaffen. Nach diophantischem Muster liesse sich also, wenn eine Lösung (p, q) der Gleichung $p^2 - aq^2 = 1$ bekannt ist, folgendermaassen eine zweite, dritte ... finden: Man setze 255)

$$p_1 = mx - p, \quad q_1 = x + q$$

und bilde nunmehr die Gleichung

$$p_1^2 - aq_1^2 \equiv m^2x^2 - 2mpx + p^2 - ax^2 - 2aqx - aq^2 = 1.$$

Mit Berücksichtigung der zuerst gegebenen Gleichung folgt hieraus

$$x = 2 \cdot \frac{mp + aq}{m^2 - a},$$

und wird diess oben eingesetzt, so ergeben sich die neuen Werthe

$$p_1 = \frac{(m^2 + a)p + 2aq}{m^2 - a}. \quad q_1 = \frac{2mp + (m^2 - a)q}{m^2 - a},$$

und jetzt ist in der That wiederum $p_1{}^2 - aq_1{}^2 = 1$. Diese Lösungen sind zunächst blos rational; will man sie ganzzahlig haben, so hat man nur im Anschluss an zahlreiche Beispiele Diophant's

$$p_1 = (u^2 + av^2)p + 2auvq, \quad q_1 = 2puv + (u^2 + av^2)q$$

zu nehmen.

Tannery erinnert mit Recht daran, dass ja Theon (Kap. I, §. 6) einen ganz ähnlichen Weg betreffs der Gleichung $p^2 - 2q^2 = 1$ einschlug; seine Substitutionen waren

$$p_1 = p + 2q, \quad q_1 = p + q.$$

Beide Kunstgriffe, den aus Diophant entlehnten und den Theon'schen, kann man nun verallgemeinern und annehmen, zur Auflösung der Gleichung

$$p^2 - aq^2 = r$$

sei überhaupt von den Substitutionen

$$p_1 = \alpha p + \beta q, \quad q_1 = \gamma p + \delta q$$

ausgegangen worden. „Il suffit pour déterminer α, β, γ, δ de connaitre les trois groupes de solutions les plus simples et de résoudre deux couples d'équations du premier degré à deux inconnues" 256). Wollte man also die für uns wichtigste Gleichung $p^2 - 3q^2 = 1$ auflösen, so brauchte man nur die durch den Versuch leicht zu beschaffenden drei einfachsten Lösungen $p = 1$, $q = 0$, $p = 2$, $q = 1$, $p = 7$, $q = 4$ zu kennen und fand dann die vier Coëfficienten

$$\alpha = 2, \ \beta = 3, \ \gamma = 1, \ \delta = 2,$$

mit deren Hülfe die Herleitung aller weiteren Näherungswerthe von $\sqrt{3}$ ohne jede Schwierigkeit erfolgen konnte.

Wenn wir diese Darlegungen P. Tannery's lesen, glauben wir wahrlich griechische Luft uns anwehen zu fühlen. Bei dieser Art der Berechnung ist nur der einfachste, ja alltägliche Apparat zur Anwendung gebracht, dessen sich die antike Zahlentheorie in sehr vielen anderen, zu unserer Kenntniss gelangten, Fällen wirklich bediente. So können wir denn auch von der Tannery'schen Methode sagen, was wir bislang von keiner ihrer mannigfaltigen Vorläuferinnen mit gutem Gewissen zu sagen vermochten: Es ist nicht bewiesen, dass Archimedes gerade so verfuhr — denn ein

solcher Beweis lässt sich überhaupt nicht erbringen — allein es steht auch kein einziges geschichtliches Hinderniss der Annahme entgegen, die Näherungswerthe von $\sqrt{3}$, welche uns in der κύκλου μέτρησις begegnet sind, seien wirklich auf die angegebene Weise, durch Auflösung einer unbestimmten Gleichung zweiten Grades, berechnet worden. —

Wir würden jedoch ein entschiedenes Unrecht begehen, wollten wir verschweigen, dass noch vor Erscheinen der Tannery'schen Abhandlung bereits von anderer Seite demselben Gedanken ein klarer Ausdruck gegeben worden war. In seiner interessanten Kritik *) der verschiedenen über die Quadratwurzeln der Alten aufgestellten Hypothesen führt Zeuthen 257) die Berechnung der Näherungswerthe von $\sqrt{3}$ ebenfalls auf die Lösung der Gleichungen $x^2 - 3y^2 = 1$, $x^2 - 3y^2 = -2$ zurück.

Er erinnert daran, wie man bereits vor Euklid's Zeiten die unbestimmte Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ nachweisbar durch

$$x = mn,\ y = \frac{m^2 - n^2}{2},\ z = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

aufzulösen verstanden habe, und meint, aus Euklid, lib. II, prop. 5 habe man leicht die Identität

$$3\,(mn)^2 + \left(\frac{m^2 - 3n^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 3n^2}{2}\right)^2$$

schöpfen können, aus welcher nach Wegschaffung der Nenner

$$3\,.\,(2mn)^2 + (m^2 - 3n^2)^2 = (m^2 + 3n^2)^2$$

erhalten werden konnte. Hatte man also eine Lösung $m^2 - 3n^2 = 1$, so brauchte man nur $x = m^2 + 3n^2$, $y = 2mn$ zu setzen, um eine zweite zu erhalten, und in dieser Weise liess sich beliebig fortfahren. War zuerst $m = 2$, $n = 1$, so ergab sich $x = 7$, $y = 4$, hieraus $x' = 7^2 + 3\,.\,4^2 = 97$, $y' = 2\,.\,7\,.\,4 = 56$, $x'' = 97^2 + 3\,.\,56^2 = 18817$, $y = 2\,.\,97\,.\,56 = 10864$ u. s. w.**)

Die zweite zu lösende Gleichung ist $x^2 - 3y^2 = -2$; sie wird von Zeuthen 258) auf die Identität

---

*) Wir haben diesem Aufsatze bereits im vorigen Paragraphen die hübsche Grenzmethode von Steen zu entnehmen gehabt.

**) Man übersieht leicht, das die Gleichung $x^2 - 3y^2 = -2$ bei Einhaltung des von Zeuthen vorgeschriebenen Ganges sämmtliche Näherungswerthe liefert, die Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$ dagegen nur einen Theil, darunter, soviel wir sehen können, nicht $\frac{1351}{780}$, wie es a. a. O. heisst. Die beiden Ableitungsmethoden sind also, wie man von Anfang an erwarten durfte, nicht identisch, sondern (vgl. §. 13) nur äquivalent.

$$(m + 3n)^2 - 3(m + n)^2 = -2(m^2 - 3n^2)$$

zurückgeführt, wobei wiederum vorausgesetzt ist, dass man für $m^2 - 3n^2 = 1$ bereits eine Lösung in Bereitschaft habe. Sind m und n die betreffenden Werthe, so ist die neue Lösung durch $x = m + 3n$, $y = m + n$ gegeben. Wäre etwa $m = 2$, $n = 1$, so hätte man $x = 5$, $y = 3$, $x' = 14$, $y' = 8$, also $x' : y' = 7 : 4$, $x'' = 38$, $y'' = 22$, also $x'' : y'' = 19 : 11$, $x''' = 104$, $y''' = 60$; also $x''' : y''' = 26 : 15$, $x^{(IV)} = 284$, $y^{(IV)} = 164$, also $x^{(IV)} : y^{(IV)} = 71 : 41$, $x^{(V)} = 776$, $y^{(V)} = 448$, also $x^{(V)} : y^{(V)} = 97 : 56$, $x^{(VI)} = 2120$, $y^{(VI)} = 1224$, also $x^{(VI)} : y^{(VI)} = 265 : 153$, u. s. f. Alle uns bekannten Näherungswerthe für $\sqrt{3}$ finden, wie Jedermann anerkennen muss, durch das Zeuthen'sche Verfahren ihre ganz einfache Erklärung.

Stellen wir dasselbe in Vergleich mit jenem von Tannery, so erkennen wir bei beiden den gleichen richtigen Grundgedanken und eine ziemlich analoge Durchführung desselben. Der Preis der Einfachheit und Natürlichkeit wird vielleicht der Methode des dänischen Mathematikers gebühren, dagegen kommt derjenigen Tannery's der hohe Vorzug zu, überhaupt auf jede diophantische Gleichung von der Form $x^2 - py^2 = r$ anwendbar zu sein. —

Noch ehe ihm die Schrift des französischen Forschers bekannt war, hatte sich der Verf. dieses die Behandlung der für das Theon'sche Problem grundlegenden Gleichung $2x^2 \mp 1 = y^2$ in ähnlichem Sinne zurechtgelegt gehabt; dem Drucke ist die betreffende Note 259) allerdings erst später übergeben worden. Es ist wiederum vorausgesetzt, eine möglichst einfache Lösung x_1, y_1 sei beidemale bereits bekannt. Um dann $2x^2 - 1 = y^2$ aufzulösen, konnte man

$$x + 1 = \frac{p}{q}(y + x),\quad x - 1 = \frac{q}{p}(y - x)$$

setzen und so

$$x = \frac{p^2 + q^2}{p^2 + 2pq - q^2},\quad y = \frac{-p^2 + 2pq + q^2}{p^2 + 2pq - q^2}$$

setzen. Ward jetzt der Nenner

$$p^2 + 2pq - q^2 = 1$$

gesetzt, so ergab sich

$$x = 4q^2 + 1 \mp 2q\sqrt{2q^2 + 1},\quad y = -4q^2 - 1 \pm 4q\sqrt{2q^2 + 1}.$$

Man wisse z. B., dass $2 \cdot 2^2 + 1 = 3^2$ ist; dann ist $q = 2$ zu nehmen, und man findet die neuen Werthe $x_1 = 5$, $y_1 = 7$, $x_2 = 29$, $y_2 = -41$ und damit sind für $\sqrt{2}$ die in der That von Theon angegebenen Näherungswerthe $\frac{7}{5}$ und $\frac{41}{29}$ gefunden. Die Gleichung $2x^2 + 1 = y^2$ gestattet ein

noch einfacheres Auflösungsverfahren, indem man

$$2x = \frac{p}{q}(y+1),\ x = \frac{q}{p}(y-1)$$

setzt. Löst man auf, so wird

$$x = \frac{2pq}{2q^2 - p^2},\ y = \frac{2q^2 + p^2}{2q^2 - p^2},$$

oder, indem

$$2q^2 - p^2 = 1$$

sein soll,

$$x = 2q\sqrt{2q^2 - 1},\ y = 4q^2 - 1.$$

Für $q = 1$, wird $x = \pm 2$, $y = 3$, der entstehende Näherungsbruch ist also $\frac{3}{2}$; für $q = 5$, wird $x = \pm 70$, $y = 99$, $\sqrt{2} \sim \frac{99}{70}$, u. s. f. Wir hoffen, durch diese Darstellung für $\sqrt{2}$ das Nämliche geleistet zu haben, was Zeuthen für $\sqrt{3}$ gethan hat; die zuletzt signalisirte Methode lässt sich übrigens 260) auch auf allgemeinere Fälle der Pell'schen Gleichung ausdehnen.

Wie nahe sowohl die Näherungswerthe des Archimedes, als auch diejenigen des Theon mit der Gleichung $x^2 - py^2 = r$ verwandt sind, dürfte aus Vorstehendem wohl zur Genüge erhellen*). Die letzteren lassen sich

*) Wenn auch nicht durch die Quadratwurzeln der „Kreismessung", so doch durch eine andere an den Namen des Archimedes sich anknüpfende mathematische Aufgabe ist jüngst eine neue Ideenverknüpfung zwischen der Pell'schen Gleichung und jenem Geistesheroen des Alterthums hergestellt worden. Man kennt das sogenannte problema bovinum: die Insel Sicilien beherbergt die Rinder des Helios, und unter gewissen Bedingungen, welchen die Zahl der Thiere Genüge zu thun hat, soll die Anzahl derselben berechnet werden. Die meisten Schriftsteller, welche seit Lessing's Zeiten sich mit dieser Aufgabe befasst haben, kommen einerseits darin überein, deren Urheberschaft dem Archimedes abzusprechen, andererseits aber auch darin, in ihr eine sehr schwierige und verwickelte Frage der unbestimmten Analytik zu erkennen. Nach Krummbiegel und Amthor, denen die Herstellung eines gereinigten Textes und eine neue Auflösung zu danken ist, kommen nicht weniger als neun unbestimmte Gleichungen dabei in Betracht 261). Amthor zeigt, dass den ersten acht dieser Gleichungen ohne grosse Mühe durch freilich ziemlich grosse Zahlen entsprochen werden kann, die jedoch sämmtlich das Quadrat einer noch unbekannten Grösse als Faktor in sich aufgenommen haben, und um auch diese letzte Unbekannte noch zu finden, muss die Pell'sche Gleichung

$$x^2 - 4729494\, y^2 = 1$$

aufgelöst werden 262). Hiezu bedarf man nach Lagrange der Entwickelung fraglicher Zahl in einen periodischen Kettenbruch, dessen Periode im gegebenen Falle nicht weniger als 91 Glieder umfasst. Amthor meint, die Autorschaft Archimed's sei nicht zu bestreiten, und P. Tannery, der denselben Gegenstand einer seiner ge-

jedoch auch direkt als Ergebniss gewisser Rekursionsgleichungen betrachten, und auch die ersteren erscheinen unter dem Einflusse solcher Reflexionen in einem ganz neuen Lichte. Wir gedenken denselben einen eigenen Paragraphen zu widmen.

§. 15. *Die Methode von Heilermann.* Wir haben in §. 6 des ersten Kapitels gesehen, dass Theon Smyrnaeus seine Seiten- und Diametralzahlen mittelst der beiden Relationen

$$S_n = S_{n-1} + D_{n-1},\quad D_n = 2S_{n-1} + D_{n-1}$$

gewann. Heilermann hat sich nun 264) die Aufgabe gestellt, diese Methode der Herleitung zu verallgemeinern, den Faktor 2 durch eine willkürliche ganze Zahl a zu ersetzen und auf diese Weise der Pell'schen Gleichung eine — soweit wir sehen können, neue — Seite abzugewinnen. Wir haben also jetzt ein doppeltes System:

$$\begin{array}{ll} S_1 = S_0 + D_0, & D_1 = aS_0 + D_0, \\ S_2 = S_1 + D_1, & D_2 = aS_1 + D_1, \\ S_3 = S_2 + D_2, & D_3 = aS_2 + D_2, \\ \vdots & \vdots \\ S_n = S_{n-1} + D_{n-1}; & D_n = aS_{n-1} + D_{n-1}. \end{array}$$

Der Zusammenhang dieser trinomischen rekurrenten Gleichungen mit der Gleichung von Pell ist leicht ersichtlich; man hat nämlich

$$aS_n^2 = aS_{n-1}^2 + 2aS_{n-1}D_{n-1} + aD_{n-1}^2,$$
$$D_n^2 = a^2S_{n-1}^2 + 2aS_{n-1}D_{n-1} + D_{n-1}^2,$$

somit

$$D_n^2 - aS_n^2 = (1-a)\left(D_{n-1}^2 - aS_{n-1}^2\right),$$

und durch unausgesetzte Wiederholung des nämlichen Verfahrens

$$D_n^2 - aS_n^2 = (1-a)^n\left(D_0^2 - aS_0^2\right).$$

---

wöhnlichen durchdachten Untersuchungen unterzogen hat, pflichtet ihm in dieser Ansicht bei: „Ces calculs", sagt er 263), „quoique fastidieux, ne sont pas exorbitants . . . M'étant proposé, à cette occasion, de traiter l'équation

$$t^2 - 2 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 29 \,.\, 353\, u^2 = 1,$$

je suis arrivé à une période de 58 termes, et j'ai admis que le calcul de ces termes n'eût été qu'un jeu pour Archimède." Natürlich denkt Tannery nicht an die direkte Rechnung Amthor's, sondern an einen dem raschen Aufsteigen des „Arenarius" ähnlichen Entwickelungsgang, allein auch bei dieser Einschränkung können wir der frohen Botschaft keinen rechten Glauben entgegenbringen. Derartige Rechnungen scheinen uns, man mag sie auffassen, wie man will, für das Alterthum und dessen höchstbegabte Vertreter nun einmal transscendent zu sein.

Damit ist also die allgemeinste Form der Pell'schen Gleichung, nämlich

$$x^2 - ay^2 = \text{Const.},$$

erreicht.

Wir können dafür auch folgende Gestalt herstellen:

$$\frac{D_n^2}{S_n^2} = a + \frac{(1-a)^{n+1}}{S_n^2}$$

indem wir $D_0 = S_0 = 1$ setzen; in dieser Gestalt besagt die Gleichung, da mit wachsendem n der Bruch rechts gegen Null abnimmt, dass $\frac{D_n}{S_n}$ ein Näherungswerth von $\sqrt{a}$ ist, und zwar in dem Sinne, dass der wahre Wurzelwerth stets zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen eingeschlossen bleibt.

Für $a = 2$, $D_0 = S_0 = 1$ erhalten wir in der That die uns aus Theon's mathematischem Commentar zu Platon bereits bekannten Näherungswerthe für $\sqrt{2}$, nämlich

$$\frac{D_0}{S_0} = \frac{1}{1}, \frac{D_1}{S_1} = \frac{3}{2}, \frac{D_2}{S_2} = \frac{7}{5}, \frac{D_3}{S_3} = \frac{17}{12}, \frac{D_4}{S_4} = \frac{41}{29}, \frac{D_5}{S_5} = \frac{99}{70}, \frac{D_6}{S_6} = \frac{239}{169} \ldots$$

Für $a = 3$, $D_0 = 2$, $S_0 = 1$ gestalten sich die Näherungswerthe von $\sqrt{3}$, wie folgt:

$$\frac{D_0}{S_0} = \frac{2}{1}, \frac{D_1}{S_1} = \frac{5}{3}, \frac{D_2}{S_2} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}, \frac{D_3}{S_3} = \frac{19}{11}, \frac{D_4}{S_4} = \frac{52}{30} = \frac{26}{15},$$

$$\frac{D_5}{S_5} = \frac{71}{41}, \frac{D_6}{S_6} = \frac{194}{112} = \frac{97}{56}, \frac{D_7}{S_7} = \frac{2120}{1224} = \frac{265}{153} \ldots$$

Wir sehen hier die Näherungswerthe des Archimedes wieder erscheinen, aber freilich — und diess ist der uns bereits bekannte, fast alle systematischen*) Methoden treffende — Einwand, nicht in der Aufeinanderfolge, wie sie uns bei dem Autor selbst begegnet sind. Freilich aber war auch nicht $D_0 = 1$ genommen worden.

Da macht nun Heilermann 265) den geistvollen Vorschlag, nicht für $\sqrt{a}$ selbst, sondern für ein gewisses $b\sqrt{a}$ die obige Bestimmung durchzuführen und den Coëfficienten b den jeweiligen Umständen entsprechend zu wählen. Setzt man z. B. $D_0 = S_0 = 1$, $a = \frac{27}{25}$, $\sqrt{a} = \frac{3}{5}\sqrt{3}$, so wird $S_1 = 2$, $D_1 = \frac{52}{25}$, $\sqrt{3} = \frac{52}{30} = \frac{26}{15}$, $S_2 = \frac{102}{25}$, $D_2 = \frac{52}{25} + \frac{27}{25} \cdot 2 = \frac{54 + 52}{25}$

*) Zur Zeit konnten wir strenge genommen nur einer einzigen Methode, der zweiten Buzengeiger's — nicht aber den auf gleicher Grundlage beruhenden Methoden von Oppermann und Alexejeff — nachrühmen, dass sie ohne Zwang gerade zu den archimedischen Quadratwurzeln führe.

$= \frac{106}{25}$, also $\frac{3}{5}\sqrt{3} = \frac{106}{25} \cdot \frac{25}{102} = \frac{53}{51}$, somit $\sqrt{3} = \frac{5 \cdot 53}{3 \cdot 51} = \frac{265}{153}$ u. s. f.

Allgemein führt Heilermann diese Idee in der Art durch, dass er $b\sqrt{a} = \sqrt{b^2 + c}$, $a = \frac{b^2 + c}{b^2}$ setzt, wo

$$\frac{b^2 + c}{b^2} < \frac{(b + 1)^2}{b^2},$$

$a - 1$ also als eine kleine positive Grösse angenommen werden darf. Wir gewinnen so folgende Bestimmungsgleichungen für S und D:

$$\begin{array}{lll} S_0 = 1, & D_0 = 1, & \left(a = \frac{b^2 + c}{b^2}\right) \\ S_1 = 2, & D_1 = 2 + \frac{c}{b^2}, & \\ S_2 = 4 + \frac{c}{b^2}, & D_2 = 4 + \frac{3c}{b^2}, & \\ \vdots & \vdots & \end{array}$$

Freilich führt, wie ausnahmslos alle uns bekannt gewordenen Methoden, bei $\sqrt{349450}$ auch dieses Auskunftsmittel keine befriedigende Lösung herbei, indem statt des archimedischen $591\frac{1}{8}$ nur $591\frac{1}{7}$ erhalten wird; ebenso wird $\sqrt{137394\frac{33}{64}} > 1172\frac{1}{7}$ und nicht, wie die eigentliche Vorlage will, $> 1172\frac{1}{8}$ gefunden. Allerdings ist in diesen beiden Fällen vollständige Uebereinstimmung dadurch zu erzielen, dass man statt

$$\frac{bD_2}{S_2} = b + \frac{2bc}{4b^2 + c} = b + \frac{bc}{2b^2 + \frac{1}{2}c}$$

den etwas kleineren Werth

$$\frac{bD_2'}{S^2} = b + \frac{bc}{2b^2 + 2c}$$

setzt. Dann ergeben sich, wie gewünscht, die angenäherten Werthe $591\frac{1}{8}$ und $1172\frac{1}{8}$, dagegen gelingt es auch so nicht, das archimedische

$$\sqrt{5472132\frac{1}{16}} \sim 2339\frac{1}{4}$$

zu finden, indem vielmehr $2339\frac{1}{2}$ herauskommt.

Es ist nun freilich hervorzuheben, dass, so hübsch diese Einkleidung auch ist, thatsächlich eben doch nur auf die uns wohlbekannte Entwickelung der Quadratwurzel in einen eingliedrig-periodischen Kettenbruch Bezug genommen ward. Denn, wie Heilermann selbst bemerkt, ist

$$\frac{bD_2}{S_2} = b + \frac{c}{2b + \frac{c}{2b}} \cdot$$

Er erinnert daran, dass arabische Mathematiker (Kap. I, §. 15), je nachdem $c \leqq b$ oder $c > b$ war, die verschiedenen Formeln

$$\sqrt{b^2 + c} \sim b + \frac{c}{2b} \text{ und } \sqrt{b^2 + c} \sim b + \frac{c + 1}{2(b + 1)}$$

zur Anwendung brachten, und macht darauf aufmerksam, dass, sowie man sich nur von der Relation

$$\sqrt{\beta^2 - \alpha} = \beta - \frac{\alpha}{2\beta - \frac{\alpha}{2\beta - \cdots}}$$

Gebrauch zu machen gestattet, die zweite Formel der Araber leicht direkt zu erhalten ist. Man setzt zu dem Ende

$$\sqrt{b^2 + c} = \sqrt{(b + 1)^2 - (2b + 1 - c)}$$

und bekommt dann als zweite Annäherung jener negativen Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{b^2 + c} \sim \left(b + 1 - \frac{2b + 1 - c}{2(b + 1)} = b + \frac{c + 1}{2(b + 1)}\right).$$

Aus all diesen Ueberlegungen zieht Heilermann den Schluss, dass den Alten ein unserem modernen Kettenbruch-Algorithmus entsprechendes Rechnungsverfahren unmöglich verborgen geblieben sein könne. Zum weiteren Belege führt er ein paar interessante elementargeometrische Betrachtungen durch. Aus dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 12a), dessen Hypotenuse AB ist, ergiebt sich zunächst nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$\overline{AB}^2 - 2\overline{BC}^2 = 0,$$

und dieser identischen Gleichung lässt sich nachstehende Form ertheilen:

$$2AB \, . \, BC - 2\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \cdot BC + \overline{BC}^2 = \overline{BC}^2,$$

$$2BC(AB - BC) + (AB - BC)^2 = \overline{BC}^2,$$

$$AB - BC = \frac{\overline{BC}^2}{2BC + (AB - BC)}$$

Da aber $AB = BC \, . \sqrt{2}$ ist, so haben wir, wenn noch $BC = 1$ gesetzt wird,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}, \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}$$

Fig. 12b stelle ein rechtwinkliges Dreieck vor, in welchem

$$\overline{AB}^2 - 3\overline{BC}^2 = 0$$

ist. Hiefür denke man sich geschrieben:

$$\overline{AB}^2 - \frac{25}{9}\overline{BC}^2 = (AB - \frac{5}{3}BC)(AB + \frac{5}{3}BC) = \frac{2}{9}\overline{BC}^2,$$

$$AB - \frac{5}{3}BC = \frac{\frac{2}{9}\overline{BC}^2}{AB + \frac{5}{3}BC} = \frac{\frac{2}{9}\overline{BC}^2}{\frac{10}{3}BC + (AB - \frac{5}{3}BC)}.$$

Wird wieder $AB = BC . \sqrt{3}$, $BC = 1$ gesetzt, so haben wir nunmehr

$$\sqrt{3} = \frac{5}{3} + \cfrac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3} + \cfrac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3} + \cdots}}$$

Und dieser Kettenbruch führt allerdings sehr rasch zu den archimedischen Zahlen; es ist $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{5}{3}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{26}{15}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{265}{153} \cdots$

Wollte man, mit Verlassung des schönen geometrischen Bildes, dessen sich Heilermann bedient, die letzterwähnte Kettenbruchentwickelung rein algebraisch darstellen, so würde so zu verfahren sein. Man suche, um $\sqrt{A}$ durch einen rasch convergirenden eingliedrig-periodischen Kettenbruch auszudrücken, jene Quadratzahl m, welche durch die Ungleichung

$$m^2 < A^3 < (m + 1)^2$$

bestimmt ist, und setze alsdann

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{A^3}{A^2}} = \sqrt{\frac{m^2}{A^2} + \frac{A^3 - m^2}{A^2}}.$$

Unter diesen Umständen liefert die gewöhnliche Entwickelung

$$\sqrt{A} = \frac{m}{A} + \cfrac{\frac{A^3 - m^2}{A^2}}{\frac{2m}{A} + \cfrac{\frac{A^3 - m^2}{A^2}}{\frac{2m}{A} + \cfrac{\frac{A^3 - m^2}{A^2}}{\frac{2m}{A} + \cdots}}}$$

Beide Heilermann'sche Kettenbrüche entspringen dieser allgemeinen Regel. Für $A = 2$ ist $m = 2$, somit

$$\sqrt{2} = \frac{2}{2} + \cfrac{\frac{4}{4}}{\frac{4}{2} + \cfrac{\frac{4}{4}}{\frac{4}{2} + \cdots}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots,$$

wie oben. Für $A = 3$ dagegen ist $m = 5$, $A^2 = 9$, $A^3 - m^2 = 2$ und sonach, ebenfalls wie angegeben ward,

$$\sqrt{3} = \frac{5}{3} + \cfrac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3} + \cfrac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3} + \cdots}}$$

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, die anscheinend ganz geometrischen Betrachtungen, welche zunächst jedem einzelnen Falle individuell angepasst sind, auf ihre gemeinsame algebraische Quelle zurückgeführt zu sehen, schon der nachfolgenden rückschauenden Schlüsse halber. —

Ein Gesammturtheil über die verschiedenen in Heilermann's Aufsatz zusammengedrängten Einzelmethoden lässt sich ungleich weniger leicht fällen, als über alle früheren Versuche — diejenigen Paul Tannery's allein ausgenommen. Man findet in der erstgenannten Abhandlung eine wahre Musterkarte scharfsinniger Bemerkungen und eleganter Umformungen vor. Allein da in letzter Instanz Alles doch wieder auf eine, wenn auch noch so gewandt durch geometrische Einkleidung verhüllte Kettenbruchmethode hinausläuft, und da wir angesichts der grossen Schwerfälligkeit, welche wenigstens zur archimedischen Zeit noch in der Bruchbezeichnung obwaltete, den Griechen eine ohne Benützung des Bruchstriches kaum erklärliche Rechnungsweise nicht zutrauen können, so scheint uns auch die Heilermann'sche Methode den freilich sehr hoch zu spannenden Anforderungen nicht ganz zu genügen, welche man an eine vollkommen befriedigende Erklärung der archimedischen Quadratwurzeln stellen muss.

§. 16. *Die Hultsch'sche Reihe für die Näherungswerthe von* $\sqrt{5}$. Eine ganz vereinzelte und eigenartige Stellung kommt, wie in Kap. I, §. 16 nachgewiesen ward, jenen Näherungswerthen der Quadratwurzel aus fünf zu, von welchen uns kein einziges Schriftwerk des Alterthums — soweit wir wenigstens im Augenblick zu übersehen vermögen — berichtet, die aber doch nach den Untersuchungen von Hultsch an den Maassverhältnissen antiker Monumentalbauten unzweideutig zu Tage treten. Durch eine Reihe sehr beachtenswerther Schlüsse ist der genannte Gelehrte auf die Zahlenreihe

$$\cdots 90,\ 56,\ 34,\ 21,\ 13,\ 8,\ 5,\ 3,\ 2,\ \frac{6}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2} \cdots$$

gekommen, von welcher bereits an jenem früheren Orte bemerkt ward, sie verrathe eine augenfällige Aehnlichkeit mit einer anderen, in der neueren Analysis zu einer gewissen Bedeutung gelangten Reihe. Diese letztere wird wohl am Einfachsten erhalten, wenn man den Major x einer nach der sectio divina getheilten Strecke von Einheitslänge in einen Kettenbruch entwickelt.

Aus der Proportion

$$1 : x = x : (1 - x)$$

folgt zunächst

$$x(1 + x) = 1, \ x = \frac{1}{1 + x}$$

und hieraus wieder

$$x = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots$$

Bestimmt man die Näherungswerthe dieses einfachsten aller Kettenbrüche, so erhält man

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \ \frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{2}, \ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{2}{3}, \ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{3}{5}, \ \frac{P_5}{Q_5} = \frac{5}{8}, \ \frac{P_6}{Q_6} = \frac{8}{13}, \ \frac{P_7}{Q_7} = \frac{13}{21}, \ \frac{P_8}{Q_8} = \frac{21}{34} \cdots$$

Man bemerkt, dass — blos die ganzzahligen Terme der Reihe von Hultsch in Betracht gezogen — die meisten völlig mit den Näherungszählern resp. Näherungsnennern unseres Kettenbruches übereinstimmen; in allen drei Reihen herrscht eben das durch die Rekursionsgleichungen

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2}, \quad Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

ausgedrückte Gesetz. Nur an einer einzigen Stelle nehmen wir eine Unterbrechung dieser Gesetzmässigkeit wahr. Die beiden ersten Glieder der Hultsch'schen Reihe sind 90 und 56, während wir unserer Regel zufolge 89 und 55 erwarten sollten, allein erstens ist diese Abweichung eine so geringe, dass sie praktisch überhaupt nicht in's Gewicht fallen konnte, und zweitens sind für diese Unregelmässigkeit auch Gründe angeführt worden, wie a. a. O. nachzulesen ist.

Wir erinnern uns, dass nach Hultsch ein Reihenglied aus dem unmittelbar vorhergehenden immer dadurch abgeleitet wurde, dass man mit $\frac{22}{34}$ oder mit $\frac{21}{34} = \frac{1}{2}\left(\frac{38}{17} - 1\right)$ multiplicirte. $\frac{38}{17}$ bedeutete den griechischen Architekten einen besonders praktischen Näherungswerth von $\sqrt{5}$. Stellt man denselben auf dem gewöhnlichen Wege der Kettenbruchentwickelung her, so tritt er sammt all' seinen Gefährten in eine nahe Beziehung zu den obigen Näherungswerthen für x, wie erwartet werden musste. Man hat

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

und denkt man sich nun die Näherungswerthe dieses Kettenbruches durch Akute von den früheren unterscheiden, so ergiebt sich

$$\frac{P'_1}{Q'_1} = \frac{2}{1}, \ \frac{P'_2}{Q'_2} = \frac{9}{4}, \ \frac{P'_3}{Q'_3} = \frac{38}{17}, \ \frac{P'_4}{Q'_4} = \frac{161}{72}, \ \frac{P'_5}{Q'_5} = \frac{682}{305}, \ \frac{P'_6}{Q'_6} = \frac{2889}{1292} \cdots$$

Werden hieraus in einer sofort näher zu bezeichnenden Weise neue Brüche hergeleitet, welche zum Unterschiede einen zweifachen Akut führen sollen, so bekommt man

$$\frac{P''_1}{Q''_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1} - 1\right) = \frac{1}{2}, \frac{P''_2}{Q''_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} - 1\right) = \frac{5}{8}, \frac{P''_3}{Q''_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{38}{17} - 1\right) = \frac{21}{34},$$

$$\frac{P''_4}{Q''_4} = \frac{1}{2}\left(\frac{161}{72} - 1\right) = \frac{89}{144} \cdots,$$

und es entstehen nachfolgende Gleichheiten:

$$\frac{P''_1}{Q''_1} = \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P''_2}{Q''_2} = \frac{P_5}{Q_5}, \frac{P''_3}{Q''_3} = \frac{P_8}{Q_8}, \frac{P''_4}{Q''_4} = \frac{P_{11}}{Q_{11}} \cdots \frac{P''_n}{Q''_n} = \frac{P_{3n-1}}{Q_{3n-1}}.$$

Die mit zwei Strichen bezeichneten Näherungswerthe besitzen mithin eine bei weitem raschere Convergenz. Wollen wir die Beziehungen zwischen beiden in einem kurzen Satze zusammenfassen, so können wir mit Bezug auf das in §. 13 dieses Kapitels erörterte Kunstwort sagen:

Die aus der Kettenbruchentwickelung von $\sqrt{5}$ entspringenden Näherungswerthe besitzen, wenn sie nach Abzug der Einheit durch 2 dividirt werden, zu den direkt aus der Kettenbruchentwickelung von

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

hervorgehenden Näherungswerthen eine $n - (3n - 1)$fache Aequivalenz.

Mit diesen Ausführungen dürfte die Stellung der von Hultsch aus archäologisch-mathematischen Gründen in die Wissenschaft eingeführten Zahlwerthe zu den bekannten Kettenbruchentwickelungen hinlänglich fixirt sein. Damit jedoch, dass letztere den einfachsten und kürzesten Weg zu diesem Zwecke darbieten, soll durchaus noch nicht gesagt sein, dass derselbe von den alten Griechen wirklich eingeschlagen worden sei. Es wäre ein solcher Schluss um so unhistorischer, als wir ganz genau wissen, dass ein mittelalterlicher Gelehrter, dem die Kettenbrüche ebenso ferne lagen, wie den hellenischen Baumeistern, die hier in Frage kommende Reihe 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... mit äusserst beschränkten und einfachen Hülfsmitteln einer sehr genauen Untersuchung unterzogen hat. Es ist das Verdienst von E. Lucas, diese rekurrente Reihe einfachster Natur, die gewöhnlich den Namen Lamé's führt, u. a. früher bereits auch von Albert Girard betrachtet worden ist, bei Leonardo Fibonacci nachgewiesen zu haben 266). Lucas zeigt dort 267) auch, dass und wie sich ohne jede Zuhülfenahme der Kettenbrüche eine Theorie dieser Reihe algebraisch auf die Relationen

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad \sqrt{5} \cdot u_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

begründen lässt

Kapitel III.

Ableitung der antiken Quadratwurzeln durch Entwickelung in Bruchreihen.

§. 1. *Die allgemeine Entwickelungsmethode von E. Lucas.* Eine solche Methode ist gegeben durch jene Funktionen U und V von Eduard Lucas, welche man mit Grund als die erzeugenden Funktionen der goniometrischen Grössen cyklischer wie hyperbolischer Zugehörigkeit bezeichnen könnte. Um sie zu erhalten, setze man für die quadratische Gleichung $x^2 - Px + Q$ 268)

$$P = a + b, \; Q = ab$$

und sodann

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n.$$

Dann gilt, zunächst als identische Gleichung, die folgende 269):

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_2}{U_1} + \left(\frac{U_3}{U_2} - \frac{U_2}{U_1}\right) + \left(\frac{U_4}{U_3} - \frac{U_3}{U_2}\right) + \cdots + \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{U_n}{U_{n-1}}\right).$$

Fasst man zusammen und erinnert sich der obigen Bedeutung von Q, so kann man auch schreiben:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_2}{U_1} - \frac{Q}{U_1 U_2} - \frac{Q^2}{U_2 U_3} - \frac{Q^3}{U_3 U_4} - \cdots - \frac{Q^{n-1}}{U_{n-1} U_n}.$$

Diese Reihe lässt sich, wie folgt (a. a. O.), verallgemeinern:

$$\frac{U_{(n+1)r}}{U_{nr}} = \frac{U_{2r}}{U_r} - U_r^2 \left(\frac{Q^r}{U_r U_{2r}} + \frac{Q^{2r}}{U_{2r} U_{3r}} + \cdots + \frac{Q^{(n-1)r}}{U_{(n-1)r} U_{nr}}\right),$$

$$\frac{V_{(n+1)r}}{V_{nr}} = \frac{V_r}{V_0} - \triangle U_r^2 \left(\frac{Q^r}{V_0 V_r} + \frac{Q^{2r}}{V_r V_{2r}} + \cdots + \frac{Q^{nr}}{V_{(n-1)r} V_{nr}}\right).$$

$\triangle$ bedeutet hier die Diskriminante $(P^2 - 4Q)$ der Fundamentalgleichung. Und noch allgemeiner ist die aus der vorstehenden abgeleitete Reihenentwickelung:

$$\frac{U_{n+kr}}{V_{n+kr}} = \frac{U_n}{V_n} + 2Q^n U_r \left(\frac{1}{V_r V_{n+r}} + \frac{Q^r}{V_{n+r} V_{n+2r}} + \frac{Q^{2r}}{V_{n+2r} V_{n+3r}} + \cdots + \frac{Q^{(k-1)r}}{V_{n+(k-1)r} V_{n+kr}}\right),$$

$$\frac{V_{n+kr}}{U_{n+kr}} = \frac{V_n}{U_n} - 2Q^n U_r \left(\frac{1}{U_r U_{n+r}} + \frac{Q^r}{U_{n+r} U_{n+2r}} + \frac{Q^{2r}}{U_{n+2r} U_{n+3r}} + \cdots + \frac{Q^{(k-1)r}}{U_{n+(k-1)r} U_{n+kr}}\right).$$

In allen Fällen ist mit diesen Formeln die Darstellung irrationaler Grössen durch — endliche oder unendlich fortlaufende — Bruchreihen vollzogen, und gelingt es dabei, $Q = 1$ zu erhalten, so hat man jene Form der Einheitsbrüche oder auch „Stammbrüche" gewonnen, welche wir von den Alten, vielleicht der ägyptischen Tradition folgend, mit Vorliebe angewendet sahen.

Wir wollen den einfacheren Theil dieses Verfahrens durch einige Beispiele erläutern. Für $P = 1$, $Q = -1$, $\triangle = 5$, haben wir 270)

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

$$U_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}},\quad V_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}{2^n}.$$

Gehen wir dann gleich zur unendlichen Reihe über, so ist zunächst

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n=\infty} \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n=\infty} \frac{1+\sqrt{5} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n (1-\sqrt{5})}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Rechnet man die einzelnen U jetzt wirklich aus, so findet man

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1\cdot 1} - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} - \frac{1}{8\cdot 13} + \cdots$$

Man erblickt in den Nennern dieser Bruchreihe wieder genau dieselben ganzen Zahlen in der nämlichen Reihenfolge wiederkehrend, wie wir sie im letzten Paragraphen des vorigen Kapitels als die Reihe von Fibonacci-Lamé bildend kennen gelernt haben.

Es sei ferner $P = 2$, $Q = -1$, $a + b = 2$, $ab = -1$, $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{2}$,

$$U_1 = \frac{1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1,\ U_2 = \frac{1+2\sqrt{2}+2-1+2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} = 2,$$

$$U_3 = 5,\ U_4 = 12 \cdots$$

Dann hat man

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \sqrt{2} = \frac{2}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 12} - \frac{1}{12\cdot 29} + \cdots$$

Daraus ergeben sich, wie man sieht, die uns bekannten Näherungswerthe

$$\sqrt{2} \sim 1,\ \sqrt{2} \sim \frac{3}{2},\ \sqrt{2} \sim \frac{7}{5},\ \sqrt{2} \sim \frac{17}{12},\ \sqrt{2} \sim \frac{247}{192} \cdots$$

In einem dritten Falle sei $P = 4$, $Q = 1$, $a + b = 4$, $ab = 1$, $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = 2 - \sqrt{3}$. Man berechnet $U_1 = 1$, $U_2 = 4$, $U_3 = 15$, $U_4 = 56$ und

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 + \sqrt{3} = \frac{4}{1} - \frac{1}{1 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 15} - \frac{1}{15 \cdot 56} - \cdots$$

Somit sind die Näherungswerthe folgende:

$$\sqrt{3} \sim 2, \sqrt{3} \sim \frac{7}{4}, \sqrt{3} \sim \left(\frac{104}{60} = \frac{26}{15}\right), \sqrt{3} \sim \left(\frac{1455}{15 \cdot 56} = \frac{97}{56}\right) \cdots$$

Vergleicht man dieselben mit den aus der Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots$$

hervorgehenden

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{5}{3}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{7}{4}, \frac{P_5}{Q_5} = \frac{19}{11}, \frac{P_6}{Q_6} = \frac{26}{15}, \frac{P_7}{Q_7} = \frac{71}{41}, \frac{P_8}{Q_8} = \frac{97}{56} \cdots,$$

so leuchtet ein:

Der Näherungsprocess des eingliedrig-periodischen Kettenbruches hat zu dem Näherungsprocess von E. Lucas eine 1—2fache Aequivalenz.

Wir citiren nachstehend noch eine auf die geschichtliche Bedeutung dieser Methode bezügliche Bemerkung ihres Urhebers 271): „On peut ainsi développer la racine carrée d'un nombre entier en séries de fractions ayant pour numérateurs l'unité; c'était un usage familiaire aux savants de la Grèce et de l'Égypte; ainsi, par exemple, cette valeur approximative

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \varepsilon,$$

rapportée par Columelle*), au chapitre V de son ouvrage „De re rustica"; ainsi celle-ci

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{12 \cdot 34} + \varepsilon,$$

*) Wir müssen jedoch bemerken, dass es uns nicht gelungen ist, aus einer der von Lucas aufgestellten Bruchreihen gerade die hier in Rede stehende Form des Näherungswerthes von $\sqrt{3}$ herauszuziehen, so leicht es andererseits ist, den Werth $\frac{26}{15}$ in der ebenfalls heronischen Form $\left(2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{60}\right)$ zu erhalten.

donnée par les auteurs indiens Baudhayâna et Apastamba; cette valeur approximative est égal au rapport

$$\frac{V_8}{U_8} = \frac{577}{408}$$

de la série de Pell."

So richtig diess Alles ist, und so sehr auch die Kürze und Zweckmässigkeit dieser Entwickelungsmethode vom rein mathematischen Standpunkt aus anerkannt zu werden verdient, so hat doch Lucas mit den obigen Worten schwerlich andeuten wollen, dass man sich die Auffindung der in Frage stehenden Näherungswerthe Seitens der alten Mathematiker wirklich in Gemässheit dieses Verfahrens vorzustellen habe. Denn, soweit wir sehen können, steht und fällt dasselbe mit der Kenntniss des binomischen Lehrsatzes, mit Hülfe dessen die einzelnen Werthe von U und V stets berechnet werden müssen, und dass von diesem die Alten — wenigstens für einen Exponenten ≥ 4 — keine Ahnung hatten, kann wohl keinem Zweifel unterliegen. Wir haben auch die Ausführungen dieses Paragraphen lediglich ihres hohen theoretischen Interesses wegen eingeschaltet.

§. 2. *Die Methode von Radicke.**) Im Gegensatze zu der soeben geschilderten Methode, deren Resultate sich durch ihren independenten Charakter auszeichnen, geht diejenige, welche nunmehr der Besprechung unterliegen soll, der Aufgabe allmälich zu Leibe. Radicke hat sich aus dem Studium des Heron und anderer alten Schriftsteller die Ueberzeugung geholt**), dass die Griechen ihre Wurzeln nicht durch Stammbrüche schlechthin, sondern durch solche Stammbrüche darzustellen suchten, deren Nenner sich bei'm Weiterfortschreiten stets nur um einen ganzzahligen Faktor vergrössern. Man würde es also in moderner Ausdrucksweise mit einer „Theilbruchreihe" (Heis) oder mit einem „aufsteigenden Kettenbruch" (A. Kunze) zu thun haben. In der That laufen ja alle bekannteren Methoden, eine Quadratwurzel successive auszuziehen, auf diese Idee hinaus, so dass man, Radicke's Gedanken annehmend, die drei verschiedenen Verfahrungsweisen folgendermaassen neben einander stellen kann:

---

*) Wie danken die Kenntniss dieses eleganten Verfahrens dessen Erfinder, Herrn Realschuloberlehrer Radicke in Bromberg. Veröffentlicht hat derselbe darüber nichts, wohl aber dem Verf. die Erlaubniss gegeben, aus dem über den Gegenstand geführten Briefwechsel die für einen grösseren Leserkreis wichtigeren Bestandtheile zu publiciren.

**) Wir entnehmen den bezüglichen Mittheilungen noch die Thatsache, dass Herr Radicke besonders auch durch die früher vom Verf. dieses publicirte Geschichte der Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen zu seinen hier zu besprechenden Versuchen angeregt worden sei.

I. *Moderne Methode.* Es wird gesetzt

$$\sqrt{A} = E(\sqrt{A}) + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \cdots = E(\sqrt{A}) + \cfrac{\alpha + \cfrac{\beta + \cfrac{\gamma + \cdots}{10}}{10}}{10}.$$

II. *Methode der griechischen Astronomen.* Es wird gesetzt

$$\sqrt{A} = E(\sqrt{A}) + \frac{\alpha}{60} + \frac{\beta}{60^2} + \frac{\gamma}{60^3} + \cdots = E(\sqrt{A}) + \cfrac{\alpha + \cfrac{\beta + \cfrac{\gamma + \cdots}{60}}{60}}{60}.$$

III. *Wahrscheinliche Methode des Heron.* Es wird gesetzt

$$\sqrt{A} = E(\sqrt{A}) \pm \frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\alpha\beta} \pm \frac{1}{\alpha\beta\gamma} + \cdots = E(\sqrt{A}) \pm \cfrac{1 \pm \cfrac{1 \pm \cfrac{1 + \cdots}{\gamma}}{\beta}}{\alpha}.$$

Die beiden ersten Methoden haben das Gemeinsame, dass die einzelnen Theilnenner durchweg einander gleich, die Theilzähler dagegen an gar kein Gesetz gebunden erscheinen; die dritte Methode im Gegentheil setzt gar nichts bezüglich der Theilnenner fest, will dagegen den Theilzählern ausnahmslos den Werth ± 1 beigelegt wissen. Im Uebrigen geht Radicke von der wohlbegründeten Thatsache aus, dass wenn $\sqrt{A}$ in einer der Formen

$$\sqrt{a^2 + b}, \quad \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

$(a = E(\sqrt{A}),\ \alpha = E(\sqrt{A}) + 1)$ gegeben war, die ersten und zweiten Näherungswerthe resp. mit a und α, $a + \frac{b}{2a}$ und $\alpha - \frac{\beta}{2\alpha}$ identificirt wurden. Dass insbesondere auch die negative Form bekannt war, ist uns bei der Durchsicht der heronischen Näherungswerthe (Kap. I, §. 4) zur Gewissheit geworden.

Aus $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{1}{k}$ ward zuerst, mit Vernachlässigung von $\frac{1}{k^2}$,

$$a^2 + b \sim a^2 + \frac{2a}{k},\ k \sim \frac{2a}{b}$$

hergeleitet; man hatte $\sqrt{A} \sim \left(n_1 = a + \frac{1}{k}\right)$. Weiterhin war

$$A - \left(a + \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{k^2}(Ak^2 - a^2 - 2ak - 1) = \frac{d_1}{k^2},\ (ak + 1) = a_1$$

und, wenn jetzt $l \sim \frac{2a}{d_1}$ genommen wurde, die weitere Annäherung

$$n_2 = a + \frac{1}{k} + \frac{1}{kl}.$$

Waren $\frac{2a}{b}$ und $\frac{2a}{d_1}$ nicht von selbst schon Stammbrüche, so wurden sie nach den aus Aegypten überkommenen Mustern in Stammbrüche aufgelöst.

Behandelt man in diesem Sinne die archimedische Irrationalität

$$\sqrt{349450} = \sqrt{591^2 + 169},$$

so ist $n_1 = a + \frac{1}{k} = 591 + \frac{1}{7}$,

$$\left(591 + \frac{1}{7}\right)^2 = 591^2 + 2 \,.\, 591 \,.\, \frac{1}{7} + \frac{1}{49} = 591^2 + 168 + \frac{42}{49} + \frac{1}{49},$$

$$a_1 = 7 \,.\, 591 + 1 = 4138,\ d_1 = 6,$$

$$l = \frac{2 \cdot 4138}{6} = \frac{4138}{3} = 1379,$$

$$\sqrt{A} \sim n_2 = 591 + \frac{1}{7} + \frac{1}{1379 \cdot 7} = 591 + \frac{1380}{9653}.$$

Dieses Beispiel lehrt, dass Radicke, was er nicht ausdrücklich hervorhebt, sehr kleine Vernachlässigungen für erlaubt erachtet; $\frac{169}{1182}$ ist nicht genau $= \frac{1}{7}$, $\frac{4138}{3}$ nicht genau $= 1379$. Gleichwohl gelingt es auch auf diesem Wege nicht, den archimedischen Werth $591\frac{1}{8}$ zu erzielen; statt des positiven Zuwachses hätte vielmehr der Restbetrag $\frac{1}{15}$ erscheinen sollen.

Für die heronischen Zahlen scheint sich das Radicke'sche Verfahren in manchen Fällen ganz vortrefflich zu empfehlen. Wir wollen diess an einigen sehr gut hiezu sich eignenden Beispielen nachweisen und wählen zu dem Ende aus P. Tannery's Abtheilung III die erste und zweite, aus seiner Abtheilung VI die zweite Nummer (vgl. Kap. I, §. 4).

1) Für $\sqrt{135} = \sqrt{12^2 - 9}$ haben wir

$$\frac{2 \,.\, 12}{9} \sim k,\ k \sim \frac{24}{9} = 3,\ n_1 = 12 - \frac{1}{3} = \frac{35}{3},$$

$$\frac{2 \,.\, 35}{l} \sim 10,\ l = \frac{70}{10} = 7,\ n_2 = 12 - \frac{1}{3} - \frac{1}{21} = 11 + \frac{13}{21}.$$

Zerlegen wir aber diesen letzteren Bruch in Stammbrüche, so finden wir

$$\sqrt{135} \sim 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21},$$

wie bei Heron.

2) Für $\sqrt{886 - \frac{1}{16}} = \sqrt{30^2 - 14 - \frac{1}{16}}$ wird

$$k \sim \frac{60}{14 + \frac{1}{16}} = 4,\ n_1 = 30 - \frac{1}{4},$$

$$\left(30 - \frac{1}{4}\right)^2 = 900 - 15 + \frac{1}{16} = 885 + \frac{1}{16},$$

$$a_1 = 119,\ d_1 = \frac{1}{14},\ \frac{1}{kl} \text{ positiv},$$

$$2 \,.\, 119 \,.\, \frac{1}{2} \sim 14,\ l \sim \frac{119}{7} = 17,$$

$$n_2 = 30 - \frac{1}{4} + \frac{1}{68} = 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68} = 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{17}.$$

Diess ist der heronische Werth.

3) Für $\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{6^2 + 7 + \frac{3}{4}}$ wird

$$k \sim \frac{12}{7\frac{3}{4}} = 2,\ n_1 = 6 + \frac{1}{2},$$

$$\left(6 + \frac{1}{2}\right)^2 = 36 + 6 + \frac{1}{4},\ a_1 = 13,\ d_1 = 6,\ \frac{1}{kl} \text{ positiv},$$

$$l \sim \frac{6}{2 \,.\, 13} = \frac{3}{13},\ n_2 = 6 + \frac{1}{2} + \frac{3}{26},$$

also wie bei Heron angegeben,

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}.$$

Für $\sqrt{2}$ erhalten wir in Consequenz dieses Verfahrens die Näherungswerthe

$$\frac{4}{3},\ \frac{7}{5},\ \frac{106}{75},$$

von welchen bereits mehrfach die Rede gewesen ist. Wir werden uns in §. 4 dieses Kapitels überzeugen, dass für $\sqrt{2}$ eine ganz analoge Entwickelungsmethode von Rodet angegeben worden ist.

Man könnte vielleicht den Einwurf erheben, das Endresultat stelle sich ja doch für gewöhnlich nicht in der strengen Form einer Theilbruchreihe dar. Diess hat jedoch darin seinen guten Grund, dass die bei der Rechnung auftretenden subtraktiven Stammbrüche aus dem Schlussergebniss wieder weggeschafft wurden.

Dagegen lässt sich allerdings nicht leugnen, dass nicht sämmtliche heronische Werthe gleichgut dem beschriebenen Verfahren sich unterordnen. Herr Radicke hat selbst bedauert, nicht das gesammte Thatsachen-Material zu seiner Verfügung gehabt zu haben. Nimmt man dasselbe im Zusammenhang durch, so drängt sich einem mehr und mehr die Gewissheit auf, dass überhaupt Heron, der nirgendwo den Praktiker verleugnet, nicht sowohl principiell verfuhr, sondern mehr von Fall zu Fall seine Rechnung ein-

richtete. Aus diesem Grunde möchten wir nicht zu behaupten wagen, die Methode von Radicke sei wirklich und ausschliesslich diejenige des Heron gewesen, allein wenn wir dieselbe in Parallele stellen mit den weiteren Erörterungen der nächsten vier Paragraphe, so werden wir doch auch nicht umhin können, zuzugestehen, dass solche Ueberlegungen, wie sie jener Methode zu Grunde liegen, für den griechischen Geometer wenigstens mitbestimmend gewesen sein können.

§. 3. *Die Methode von v. Pessl.**) Dieselbe hat mit der vorigen das gemeinsam, dass grundsätzlich auf Entwickelung von $\sqrt{A}$ in eine Stammbruchreihe ausgegangen wird; es soll

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots$$

sein. Im Gegensatze zu Radicke wird jedoch die Bedingung, dass q_1 in q_2, $q_1 \cdot q_2$ in q_3 als Faktor enthalten sein soll, fallen gelassen und an Stelle derselben die neue Forderung gesetzt, dass die Nenner $q_1, q_2, q_3 \ldots$ stets die kleinstmöglichen ganzen positiven Zahlen sein sollen. Wir bekommen so die Quadratwurzelausziehung ihrem eigentlichen Wesen entsprechend als ein Divisionsproblem dargestellt; bezeichnen wir die successiven Divisoren, resp. Reste, mit $r_1, r_2, r_3 \ldots$, die zugehörigen Dividenden dagegen mit d_1, $d_2, d_3 \ldots$, so ergiebt sich uns nachstehendes Schema:

$$r_1 = b, \qquad d_1 = 2a, \qquad q_1 > \frac{d_1}{r_1} = 1 + E\left(\frac{d_1}{r_1}\right),$$

$$r_2 = r_1 q_1 - d_1 - \frac{1}{q_1}, \qquad d_2 = d_1 q_1 + 2, \qquad q_2 > \frac{d_2}{r_2} = 1 + E\left(\frac{d_2}{r_2}\right),$$

$$r_3 = r_2 q_2 - d_2 - \frac{q_1}{q_2}, \qquad d_3 = d_2 q_2 + 2 q_1, \qquad q_3 > \frac{d_3}{r_3} = 1 + E\left(\frac{d_3}{r_3}\right),$$

$$r_4 = r_3 q_3 - d_3 - \frac{q_1 q_2}{q_3}, \qquad d_4 = d_3 q_3 + 2 q_1 q_2, \qquad q_4 > \frac{d_4}{r_4} = 1 + E\left(\frac{d_4}{r_4}\right),$$

$$r_5 = r_4 q_4 - d_4 - \frac{q_1 q_2 q_3}{q_4}, \quad d_5 = d_4 q_4 + 2 q_1 q_2 q_3, \quad q_5 > \frac{d_5}{r_5} = 1 + E\left(\frac{d_5}{r_5}\right),$$

. . . .

. . . .

$$r_n = r_{n-1} q_{n-1} - d_{n-1} - \frac{q_1 \cdots q_{n-2}}{q_{n-1}}, d_n = d_{n-1} q_{n-1} + 2 q_1 \ldots q_{n-2}, q_n > \frac{d_n}{r_n} = 1 + E\left(\frac{d_n}{r_n}\right).$$

---

*) Auch diese Methode ist noch nicht im Druck bekannt gegeben worden. Sie rührt her von dem k. Lyzealrektor H. v. Pessl in Dillingen, dem gelehrten Publikum durch seine Forschungen über die magischen Quadrate und über die manethonische Chronologie wohl bekannt; von ihrer Entstehung und nunmehrigen Veröffentlichung gilt ganz das Nämliche, was oben von der Radicke'schen Methode bemerkt worden ist.

v. Pessl prüft die Anwendbarkeit dieser sozusagen verallgemeinerten Bruchreihenentwickelung an dem willkürlich gewählten Beispiele

$$\sqrt{377\frac{2}{3}} = \sqrt{19^2 + 16\frac{2}{3}}.$$

Hier ist $r_1 = 16\frac{2}{3}$, $d_1 = 38$, $q_1 = 1 + E\left(\frac{38 \,.\, 3}{50}\right) = 3$, $r_2 = 50 - 38 - \frac{1}{3} = 11\frac{2}{3}$, $d_2 = 38 \,.\, 3 + 2 = 116$, $q_2 = 1 + E\left(\frac{3 \,.\, 116}{35}\right) = 10$, $r_3 = \frac{350}{5} - 116 - \frac{3}{10} = \frac{11}{30}$, $d_3 = 1160 + 6 = 1166$, $q_3 = E\left(\frac{1166 \,.\, 30}{11}\right) = 3180$, somit sehr nahe richtig

$$\sqrt{377\frac{1}{3}} = 19 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{3180}.$$

Des Weiteren werden einige der heronischen Irrationalitäten vorgenommen, und zwar in erster Linie auch wiederum diejenigen, mit welchen sich Radicke beschäftigt hat. Wir schreiben einfach das jeweilige Schema hin:

1) $$\sqrt{135} = \sqrt{11^2 + 14},$$

$$r_1 = 14, \qquad d_1 = 22, \quad q_1 = 1 + E\left(\frac{22}{14}\right) = 2,$$

$$r_2 = 14 \,.\, 2 - 22 - \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}, \quad d_2 = 46, \quad q_2 = 1 + E\left(\frac{92}{11}\right).$$

Um diesen letzteren Bruch zu umgehen — so meint v. Pessl — setzte Heron

$$\frac{5\frac{1}{2}}{46} \sim \frac{5}{46} = \frac{5 - \frac{1}{2}}{46 - \frac{46}{11}} \sim \frac{5}{42 - \frac{2}{11}} \sim \frac{5}{42}.$$

So bekam er

$$\sqrt{135} \sim \left(11 + \frac{1}{2} + \frac{5}{42} = 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}\right)$$

2) $$\sqrt{886 - \frac{1}{16}} = \sqrt{29^2 + 45 - \frac{1}{16}},$$

$$r_1 = 45 - \frac{1}{16}, \qquad d_1 = 58, \qquad q_1 = 1 + E\left(\frac{58}{45 - \frac{1}{16}}\right) = 2,$$

$$r_2 = 90 - \frac{1}{8} - 58 - \frac{1}{2} = 32 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \; d_2 = 58 \,.\, 2 + 2 = 118,$$

$$q_2 = 1 + E\left(\frac{118}{32 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}}\right) = 4,$$

$$r_3 = 128 - 2 - \frac{1}{2} - 118 - \frac{1}{2} = 10 - \frac{6}{2} = 7,\ d_3 = 118 . 4 + 22 = 476,$$

$$q_3 = 1 + E\left(\frac{476}{7}\right) = 69 \sim 68,$$

$$\sqrt{886 - \frac{1}{16}} \sim 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68}.$$

3) $$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{6^2 + 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}},$$

$$r_1 = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \qquad d_1 = 12, \qquad q_1 = 1 + E\left(\frac{12}{7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}\right) = 2,$$

$$r_2 = 14 + 1 + \frac{1}{2} - 12 - \frac{1}{2} = 3,\ d_2 = 12.2 + 2 = 26,\ q_2 = 1 + E\left(\frac{26}{3}\right) = 9$$

Heron bricht jedoch schon mit $\frac{26}{3}$ ab und hat sonach

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \sim \left(6 + \frac{1}{2} + \frac{3}{26} = 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}\right)$$

erhalten.

Nehmen wir noch Nummer 1 aus Tannery's Abtheilung VI (Kap. I, §. 4) hinzu:

4) $$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(2\frac{1}{4}\right)^2 + 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}},$$

$$r_1 = 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8},\ d_1 = 4 + \frac{1}{2},\ q_1 = 1 + E\left(\frac{4\frac{1}{2}}{3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}\right) > \left(\frac{4\frac{1}{2}}{3} \sim \frac{3}{2}\right),$$

$$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \sim 2 + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}.$$

Es ist hierbei daran zu erinnern, dass auch der Bruch $\frac{2}{3}$ unter die Stammbrüche gerechnet ward.

Als einer der wenigen ganz genauen Werthe, die bei Heron vorkommen, sei noch $\sqrt{167 + \frac{1}{169}}$ hier vorgeführt.*) Das Verfahren v. Pessl's ergiebt hier den wahren Werth in sicherer und verhältnissmässig schneller Annäherung.

---

*) Von dieser Zahl ist bei unserer Aufzählung und Besprechung der heronischen Quadratwurzeln nicht die Rede gewesen, und zwar, wie leicht einzusehen, aus dem Grunde, weil man es hier nicht mit einer irrationalen, sondern mit einer rationalen Zahl zu thun hat. Diess ergiebt sich theoretisch schon aus dem Umstande, dass (s. o.) die Reste r von einer gewissen Grenze ab Null werden; praktisch zeigt es sich, indem man

$$\sqrt{167 + \frac{1}{169}} = \sqrt{\left(12 + \frac{1}{13}\right)^2 + 21 + \frac{2}{13}},$$

$$r_1 = 21 + \frac{2}{13}, \quad d_1 = 24 + \frac{2}{13}, \quad q_1 = 1 + E\left(\frac{24\frac{2}{13}}{21\frac{2}{13}}\right) = 2,$$

$$r_2 = 42 + \frac{4}{13} - 24 - \frac{2}{13} - \frac{1}{2} = 17 + \frac{1}{2} + \frac{2}{13}, d_2 = 2\left(24 + \frac{2}{13}\right) + 2 = 50 + \frac{4}{13},$$

$$q_2 = 1 + E\left(\frac{50\frac{4}{13}}{24\frac{2}{13}}\right) = 3,$$

$$r_3 = 51 + \frac{3}{2} + \frac{6}{13} - 50 - \frac{4}{13} - \frac{2}{3} = 2 - \frac{1}{78}, d_3 = 150 + \frac{12}{13} + 4 = 154 + \frac{12}{13}$$

$$q_3 = 1 + E\left(\frac{154\frac{4}{13}}{2 - \frac{1}{78}}\right) = 78,$$

$$r_4 = 156 - 1 - 154 - \frac{12}{13} - \frac{1}{13} = 0, \ d_4 = d_4, \ q_4 = 1 + E\left(\frac{d_4}{0}\right) = \infty, \frac{1}{q_4} = 0.$$

Man hat also, wie es auch Heron angiebt, genau

$$\sqrt{167 + \frac{1}{169}} = 12 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{78}$$

gefunden.

Die Methode, von der wir hiermit Abschied nehmen, zeichnet sich durch strenge Consequenz vortheilhaft aus. Allein den heronischen Zahlen ausnahmslos zu genügen, ist auch sie nicht im Stande, und so wird von ihr, trotzdem sie in ihrer Art allen mathematischen Anforderungen völlig genügt, doch in geschichtlicher Hinsicht das Nämliche gesagt werden müssen, wie über die Methode von Radicke.

§. 4. *Die Methode von Rodet und die Çulvasûtrâ's.* In nahem verwandtschaftlichen Verhältniss zu den beiden vorstehend besprochenen Ableitungweisen steht eine dritte Methode, welche von Rodet 272) aus-

---

$$\left(12 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{78}\right)^2 = \left(12 + \frac{72}{78}\right)^2 = \left(12 + \frac{12}{13}\right)^2 = 144 + \frac{288}{13}$$
$$+ \frac{144}{169} = 144 + 22 + \frac{2}{13} + \frac{144}{169} = 166 + \frac{170}{169} = 167 + \frac{1}{169}$$

bildet. Herr Radicke macht anlässlich dieses Zahlwerthes die unseres Erachtens recht annehmbare Conjektur: Heron habe ursprünglich die Wurzel blos aus 167 ausziehen wollen und den additiven Bruch nur um desswillen beigefügt, um eben einen ganz genau stimmenden Wurzelwerth zu erhalten.

gesprochenermaassen zu dem Zwecke ausgedacht wurde, die in der religiösen Mathematik der Inder (Kap. I, §. 14) auftretenden Näherungswerthe, zunächst für $\sqrt{2}$*), zu erklären. Wir glauben am Besten zu thun, wenn wir die Methode gleich in ihrer allgemeinsten algebraischen Einkleidung hier vorführen.

Wir gehen aus von

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b}\,,\quad \varepsilon_1 = \frac{b}{2a + 1}$$

und setzen folgeweise

$$r' = r - (2a + \varepsilon_1)\varepsilon_1\,,\qquad \varepsilon_2 = \frac{r'}{2(a + \varepsilon_1)}$$

$$r'' = r' - (2[a + \varepsilon_1] + \varepsilon_2)\varepsilon_2\,,\qquad \varepsilon_3 = \frac{r''}{2(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\,,$$

$$r''' = r'' - (2[a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2] + \varepsilon_3)\varepsilon_3\,,\qquad \varepsilon_4 = \frac{r'''}{2(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}\,,$$

---

*) Ehe wir diese allgemeine Methode näher schildern, wollen wir zuvor doch noch der Thatsache gedenken, dass das eigenthümliche Zusatzglied, welches bei $\sqrt{2}$ in erster Linie den Scharfsinn der Interpreten herausfordert, in Cantor's grossem Werke 273) eine sehr einfache Deutung gefunden hat. Es wird in den Çulvasûtrâ's

$$\sqrt{2} \sim 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,4} - \frac{1}{3\,.\,4\,.\,34}$$

gesetzt. Behält man vorerst nur die drei positiven Glieder bei und fasst dieselben zusammen, so ist

$$\sqrt{2} \sim \frac{17}{12}\,,$$

und dieser Näherungswerth ist uns, seines auch sonst häufigen Auftretens halber, nicht eben auffallend. Cantor glaubt nun, wie auch Thibaut 274), man habe

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2 = 1 + \frac{25}{144} + \frac{5}{6} = 2 + \frac{1}{144}$$

ausgerechnet und dabei also $\frac{1}{144}$ zu viel bekommen. Es musste demnach noch eine Kleinigkeit in Abzug gebracht werden, und diese Grösse fand sich, indem man, ein noch viel kleineres Quadrat bei Seite lassend, $\frac{1}{144}$ durch $2\,.\,\frac{17}{12}$ dividirte. So fand sich

$$\frac{1}{144}\cdot\frac{6}{17} = \frac{1}{24\,.\,17} = \frac{1}{3\,.\,4\,.\,34}\,,$$

und damit haben wir eben das fragliche Zusatzglied gewonnen. Wir gestehen offen, dass wir, Rodet's elegante Manier in allen Ehren, dem Thibaut-Cantor'schen Erklärungsversuch wegen seiner Natürlichkeit den Vorzug einräumen möchten.

$$r^{(IV)} = r''' - (2[a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3] + \varepsilon_4)\varepsilon_4, \quad \varepsilon_5 = \frac{r^{(IV)}}{2(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)},$$

. . . .

. . . .

$$\overset{(n)}{r} = \overset{(n-1)}{r} - (2[a + \sum_{i=1}^{i=n-1} \varepsilon_i] + \varepsilon_n)\varepsilon_n, \qquad \varepsilon_{n+1} = \frac{r^{(n)}}{2(a + \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k)}.$$

Jedes neue ε liefert uns ein — positives oder negatives — Zusatzglied, und wir haben sonach ein neues generelles Verfahren zur Darstellung einer jeden quadratischen Irrationalzahl durch eine Bruchreihe erhalten.

Wenden wir dasselbe auf

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1}$$

an. In diesem Falle ist unser Berechnungsschema: $a = 1$, $b = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$,

$$r' = 1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{2}{9} : 2\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3 . 4},$$

$$r'' = \frac{2}{9} - \left(2\left[1 + \frac{1}{3}\right] + \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{9} - \frac{33}{144} = -\frac{1}{144},$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{144} : 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{144} : \frac{2 . 17}{12} = -\frac{1}{3 . 4 . 34},$$

$$r''' = -\frac{1}{144} + \left(2\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right] - \frac{1}{12 . 34}\right) \cdot \frac{1}{12 . 34},$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{1}{12^2 . 34^2} : 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12 . 34}\right),$$

und da

$$-\frac{1}{144} + \frac{1155}{144 . 34^2} = -\frac{1}{12^2 . 34^2},$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{1}{12^2 . 34^2} : \frac{1154}{12 . 34} = -\frac{1}{3 . 4 . 34 . 1154}.$$

Bleibt man hierbei stehen, so ist

$$\sqrt{2} \sim 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 . 4} - \frac{1}{3 . 4 . 34} - \frac{1}{3 . 4 . 34 . 1154}$$

gefunden; Rodet hat also gezeigt, wie man den von Baudhayâna für $\sqrt{2}$ angegebenen aufsteigenden Kettenbruch beliebig weit fortzusetzen vermag.

Versuchen wir jetzt den indischen Werth für $\sqrt{3}$ in ganz derselben Weise zu entwickeln. Wir haben

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2}, \; a = 1, \; b = 2, \; \varepsilon_1 = \frac{2}{3},$$

$$r' = 2 - \left(2 + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}, \; \varepsilon_2 = \frac{2}{9} : 2\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{30} = \frac{1}{3 . 5},$$

$$r'' = \frac{2}{9} - \left(2\left[1 + \frac{2}{3}\right] + \frac{1}{15}\right) \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{9} - \frac{1}{15} \cdot \frac{51}{15},$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{225} : 2\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15}\right) = -\frac{1}{225} \cdot \frac{15}{2} = \frac{2}{9} - \frac{17}{75} = -\frac{1}{225},$$

$$= -\frac{1}{3.5.52},$$

$$\sqrt{3} \sim 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{3.5.52},$$

wie von dem indischen Autor angegeben ist. Bilden wir die einzelnen in dieser Bruchreihe steckenden Näherungswerthe, so erhalten wir

$$\sqrt{3} \sim 1, \quad \sqrt{3} \sim \frac{5}{3}, \quad \sqrt{3} \sim \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15} = \frac{26}{15}\right),$$

$$\sqrt{3} \sim \left(\frac{780 + 520 + 52 - 1}{780} = \frac{1351}{780}\right).$$

Es ist in der That eine überraschende Erscheinung, gerade den vielumstrittenen archimedischen Näherungswerth, der sich sonst, sofern man nicht direkt zum Kettenbruche griff, so äusserst spröde zeigte, in ganz einfacher Weise aus dem Rodet'schen Berechnungsverfahren hervorgehen zu sehen. Allein immerhin scheint uns doch die Frage so gestellt werden zu müssen: Kann und darf man der Ansicht Raum geben, dass Archimedes und die älteren Inder einen ziemlich verwickelten algebraischen Algorithmus gekannt und jede Mittheilung darüber sorgfältig unterdrückt haben sollten, oder muss man aus historischen Gründen eine derartige Unterstellung von vorn herein verwerfen. Wer die Frage zu bejahen gedenkt, der mag sich unter den drei mathematisch nahezu gleich formvollendeten Methoden von Radicke, v. Pessl und Rodet die ihm am meisten passende auswählen. Die naturgemässe Errechnung von $\sqrt{3} \sim \frac{1351}{780}$ mag in den Augen Vieler der zuletzt abgehandelten Methode ein gewisses Uebergewicht verleihen; freilich aber entgeht sie andererseits auch nicht dem Einwande, den anderen archimedischen Werth $\sqrt{3} \sim \frac{265}{153}$ nicht liefern zu können.*)

§. 5. *Die zweite Methode P. Tannery's für die archimedischen Quadratwurzeln.* In §. 14 des vorigen Kapitels haben wir bereits in Erfahrung gebracht, dass Paul Tannery es für möglich hält, Archimedes sei zur Ermittelung der ihm eigenthümlichen Näherungswerthe von zwei ganz ver-

---

*) Rodet selbst weist (a. a. O.) auf die innige Verwandtschaft seiner Näherungsmethode mit derjenigen des Newton hin. Die nämliche Wahrnehmung hatte seiner Zeit auch Kästner gemacht, als er verschiedene Regeln an die Hand gab, die unbekannten Wurzeln höherer numerischer Gleichungen durch Bruchreihen auszudrücken. „Alle Methoden", so äussert er sich 275), „die unbekannte Wurzel einer höheren Gleichung annähernd aufzulösen, kommen darauf hinaus, Ergänzungen zu suchen, und damit auf das in Newton's Method of Fluxions, Introd. §. 19 gelehrte Verfahren."

schiedenen Standpunkten aus gelangt. Er habe sich nämlich zuerst durch ein mehr empirisches Verfahren einen brauchbaren Werth verschafft und habe erst nachher, um aus jenem Anfangswerthe eine grössere Anzahl mehr und mehr genäherter Lösungen herzuleiten, den eigentlich methodischen Weg betreten. Von diesem letzteren, der schliesslich auf eine ganzzahlige Auflösung gewisser Specialformen der Pell'schen Gleichung hinausführte, haben wir — als von P. Tannery's erster Methode — bereits a. a. O. nähere Kenntniss genommen, und es bleibt uns demnach nur übrig, jetzt auch die Anfangsprocedur des Archimedes, so wie sie sich nach der Auffassung des französischen Forschers gestaltet, kennen zu lernen 276). Indem wir nachstehend die Tannery'sche Darstellung nicht unerheblich abkürzen, hoffen wir auch zur Vereinfachung derselben Einiges beigetragen zu haben.

Man habe zwei Zahlenreihen

$$a_0, a_1, a_2, a_3 \cdots a_n \cdots,$$
$$b_0, b_1, b_2, b_3 \cdots b_n \cdots$$

von der Beschaffenheit, dass, unter c eine gewisse Constante verstanden,

$$a_n = b_{n-1} + a_{n-1}, \; b_n = \sqrt{a_n^2 + c^2}$$

sein soll. Immer zwischen a_n und b_n liegt eine gewisse Grösse*), auf deren Werthbestimmung es ausschliesslich ankommt. Man soll nun — einerseits durch Addition, andererseits durch Wurzelausziehung — jene Grösse zwischen a_n und b_n mehr und mehr einengen, und der Annäherungsprocess soll als beendet gelten, wenn sich a_n von b_n nur noch um eine ganz geringfügige Grösse unterscheidet.

In dem für uns wichtigsten Falle ist

$$a_0 = 265, \; b_0 = 306, \; c = 153, \; c^2 = 23409,$$
$$a_1 = 265 + 306 = 571, \qquad b_1 = \sqrt{571^2 + 23409}.$$

Die dem Archimed zweifellos bekannte Formel $\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}$ ergiebt

$$b_1 = 571 + \frac{23409}{1142},$$

*) Bekanntlich geht Archimedes auf die Bestimmung der Zahl π aus; die in Kap. I, §. 2 geschilderten geometrischen Betrachtungen führen auf die Ungleichungen

$$\frac{2^n \cdot c}{a_n} > \frac{\pi}{6} > \frac{2^n \cdot c}{b_n}.$$

Wenn also $a_n \sim b_n = w$ gefunden ist, kann

$$\pi \sim \frac{3 \,.\, 2^{n+1} \,.\, c}{w}$$

gesetzt werden.

und, da die Ganzen richtig sind,

$$b_1 = 571 + 20 + \frac{1}{m},$$

$$b_1^2 = 571^2 + 400 + \frac{1}{m^2} + 22840 + \frac{1142}{m} + \frac{40}{m};$$

wird die kleine Grösse $\frac{1}{m^2}$ vernachlässigt, so ist*)

$$b_1^2 = 571 + 23240 + \frac{1182}{m}, \quad \frac{1182}{m} = 169, \quad m = \frac{1182}{169} < \frac{1}{7}.$$

Man hat sonach $b_1 = 591\frac{1}{8}$. Daraus folgt

$$a_2 = 571 + 591\frac{1}{8} = 1162\frac{1}{8}, \quad b_2 = \sqrt{\left(1162 + \frac{1}{8}\right)^2 + 23409}.$$

Wird ausgerechnet und der Bruch $\frac{1}{64}$ vernachlässigt, so ist

$$b_2 = \sqrt{1162^2 + \frac{581 + 46818}{2}} = \sqrt{1162^2 + \frac{47399}{2}}$$

$$= 1162 + 10 + \frac{1}{m} = 1172 + \frac{1}{m}.$$

Erheben wir in's Quadrat, so ist, da wieder $\frac{1}{m^2}$ wegbleiben kann,

$$b_2^2 = 1162^2 + 23340 + \frac{2344}{m}, \quad \frac{2344}{m} = \frac{719}{2},$$

$$m = \frac{4688}{719} \sim 8, \quad b_2 = 1172\frac{1}{8}.$$

In dritter Instanz ist

$$a_3 = 1162\frac{1}{8} + 1172\frac{1}{8} = 2334\frac{1}{4}, \quad b_3 = \sqrt{\left(2334 + \frac{1}{4}\right)^2 + 23409},$$

also, bei einer ähnlichen Behandlungsweise,

$$b_3 = \sqrt{2334^2 + \frac{2334}{2} + 23409} = \sqrt{2334^2 + 1167 + 23409} \sim 2334 + \frac{24576}{4668}.$$

Werden die Ganzen herausgezogen, so bleibt

$$b_3 = 2334 + 5 + \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{m} \sim \frac{1}{4}, \quad b_3 = 2339\frac{1}{4}.$$

---

*) Eine ganz befriedigende Aufklärung des Grundes, warum Archimedes $\sqrt{571^2 + 23409} \sim 591\frac{1}{8}$ und nicht, wie man zu erwarten berechtigt wäre, $\sim 591\frac{1}{7}$ setzt, ist auch Tannery sowenig wie irgend einer seiner Vorläufer beizubringen in der Lage, wie denn eine solche Aufklärung in der That nicht erbracht werden zu können scheint. Archimed hat in diesem Punkt eine gewisse Willkür walten lassen.

Endlich ist

$$a_4 = 2334\,\frac{1}{4} + 2339\,\frac{1}{4} = 4673\,\frac{1}{2},\; b_4 = \sqrt{\left(4673 + \frac{1}{2}\right)^2 + 23409}\,,$$

$$b_4 = \sqrt{4673^2 + 4673 + 23409} = \sqrt{4673^2 + 28082} \sim 4673 + \frac{28082}{9346}\,,$$

$$b_4 = 4673 + 3 = 4676\,.$$

Damit sind die beiden Werthe a_4 und b_4 einander für den von Archimedes verfolgten Zweck nahe genug gerückt. Gehen wir noch einen einzigen Schritt weiter, so ist

$$a_5 = 4673\,\frac{1}{2} + 4676 = 9349\,\frac{1}{2},\; b_5 = \sqrt{\left(9349 + \frac{1}{2}\right)^2 + 23409}\,,$$

$$b_5 = \sqrt{9349^2 + 32758} \sim \left(9349 + \frac{32758}{18698} \sim 9350\,\frac{1}{2}\right).$$

Mit einer allen Anforderungen genügenden Genauigkeit könnte mithin

$$a_n \sim b_n = w = 9350$$

genommen werden.

Um in der nämlichen Art und Weise die Entstehung der archimedischen Näherungswerthe zu erklären, kann man davon ausgehen, dass zuerst

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2} = 1 + \frac{2}{2\,.\,1 + 1} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

gesetzt ward. Weiterhin folgte durch Quadrirung

$$\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{m}\right)^2 = \frac{25}{9} + \frac{10}{3m} = 3,\quad \frac{10}{3m} = \frac{2}{9},\quad m = 15.$$

Nachdem auf diese Weise die Relation

$$26^2 - 3\,.\,15^2 = 1$$

ermittelt war, konnten die weiteren Näherungswerthe im Sinne der ersten Methode von P. Tannery mit Hülfe der Pell'schen Gleichung gefunden werden. Doch war es auch möglich (vgl. den vorhergehenden §.)

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{n}\right)^2 = 3,\quad \frac{26^2}{15^2} + \frac{52}{15n} = 3,\quad n = -\frac{1}{15\,.\,52} = -\frac{1}{780}$$

zu setzen und so

$$\sqrt{3} \sim \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15} - \frac{1}{780} = \frac{1351}{780}\right)$$

zu berechnen.

Diese Methode Tannery's dürfte die richtigen Fingerzeige an die Hand geben. Indem sie nur die Relationen

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a},\quad \sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a + 1}$$

voraussetzt, im Uebrigen aber auf die Anbringung ganz einfacher und naheliegender Verbesserungen an diesen primären Näherungswerthen sich beschränkt, scheint sie völlig in den Kreis der einem griechischen Mathematiker mit Grund beizulegenden Rechnungskunstgriffe zu passen. Es kommt hinzu, dass P. Tannery, der sich auf das Rechnen mit griechischen Zahlzeichen ausdrücklich eingeübt zu haben versichert, bei der Ausführung dieser Wurzelausziehungen nach griechischem Muster nicht die geringsten Schwierigkeiten gefunden zu haben behauptet. Wir glauben, dass gegen die hier skizzirte Methode, alle archimedischen Werthe durch einfache successive Annäherung auszurechnen, die wenigsten Bedenken sich erheben lassen können.

§. 6. *P. Tannery's kritische Durchmusterung der heronischen Näherungswerthe.* Das, wie wir uns überzeugt zu haben glauben, allein richtige und zweckdienliche Verfahren, die heronischen Quadratwurzeln auf ihre Entstehung zu prüfen, ist von Tannery angegeben worden. Derselbe begnügt sich nicht damit, éin irgendwie geartetes Schema der Berechnung a priori aufzustellen und demselben alsdann die zu untersuchenden Zahlen nach Möglichkeit anzupassen, wobei es, wie wir sahen, ohne einzelne Willkürlichkeiten auch im günstigsten Falle nicht abgehen kann, sondern er geht von der Ansicht aus, es sei durchaus nicht erforderlich, von einem wesentlich auf's Praktische gerichteten Mathematiker, wie Heron, vorauszusetzen, dass er sich mit eherner Consequenz stets an ein und dasselbe Verfahren gehalten habe. Wir glauben dieser Ansicht voll und ganz zustimmen zu sollen. Der ganze Text der heronischen Schriften liefert uns die mannigfaltigsten Belege dafür, dass es deren Autor hauptsächlich darauf ankam, rasch und sicher zu einem unmittelbarer Anwendung fähigen Resultate zu gelangen. So hat denn Tannery, wie wir in Kap. I, §. 4 sahen, sämmtliche quadratische Irrationalitäten, die bei Heron unsere Aufmerksamkeit erregen, in VII Abtheilungen zerlegt und für jede dieser Gruppen ein einheitliches Berechnungsverfahren nachgewiesen 277). Die Rodet'sche Methode kommt dabei zu grosser Geltung, freilich aber mit vielseitigen Aenderungen, wie solche eben aller Wahrscheinlichkeit nach der griechische Geometer in seinem Interesse liegend fand. Wir geben im Folgenden eine eingehende Analyse der Tannery'schen Schrift, uns jedoch vorbehaltend, ab und zu unserer in Details abweichenden Meinung ebenfalls ihr Recht zu Theil werden zu lassen.

Abtheilung I. Betreffs der hierher gehörigen Werthe besteht zwischen sämmtlichen Fachmännern keinerlei Meinungsverschiedenheit darüber, dass dieselben durch Anwendung der Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$$

gefunden worden sind. Die näheren Nachweise hiezu sind in Kap. II, §. 2 beigebracht worden.

Abtheilung II. Deren Mitglieder unterscheiden sich von denjenigen der vorausgehenden Abtheilung blos in dem Punkt, dass bei der Zerlegung von $\frac{b}{2a}$ in Stammbrüche eine erste Annäherung für hinreichend befunden wurde. Wir haben hier folgende Daten zu nennen:

$$\sqrt{58+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}}=\sqrt{7^2+9+\tfrac{7}{16}}\sim\left(7+\tfrac{151}{224}=7+\tfrac{2}{3}+\tfrac{5}{672}\sim 7\tfrac{2}{3}\right).$$

Hier beträgt der Fehler nur den 134. Theil der Einheit.

$$\sqrt{444+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}}=\sqrt{21^2+3+\tfrac{4}{9}}\sim\left(21+\tfrac{31}{378}\sim 21\tfrac{1}{12}\right).$$

$$\sqrt{3400}=\sqrt{58^2+36}\sim\left(58+\tfrac{36}{116}\sim 58\tfrac{1}{3}\right).$$

$$\sqrt{54}=\sqrt{7^2+5}\sim\left(7+\tfrac{5}{14}\sim 7\tfrac{1}{3}\right).$$

Darüber würde sich allerdings streiten lassen, ob nicht dieser letztere Werth der — zweifellos den Indern und Arabern, wahrscheinlich aber auch den Griechen bekannten — Näherungsformel

$$\sqrt{a^2+b}\sim a+\frac{b}{2a+1}$$

seine Entstehung verdankt.

Abtheilung III. Wieder eine Stufe höher steigend, sind wir bei den Zahlwerthen der dritten Abtheilung angelangt. Erschien die in I und II angewandte Regel nicht ausreichend genau, so zog man aus $\frac{b}{2a}$ den nächstliegenden Stammbruch oder setzte dafür den nächstgrösseren Stammbruch $\frac{1}{m}$ und bekam so, unter q eine noch zu bestimmende ganze Zahl verstanden,

$$\sqrt{A}=\sqrt{a^2+b}\sim\left(a+\frac{b}{2a}\sim a+\frac{1}{m}\pm\frac{1}{q}\right).$$

So fand sich

$$\frac{1}{q}=\frac{A-\left(a+\frac{1}{m}\right)^2}{2\left(a+\frac{1}{m}\right)}.$$

Diesem Gesetze ordnen sich nachstehende Fälle unter:

$$\sqrt{135}=\sqrt{11^2+14}\sim\left(11+\tfrac{14}{22}=11+\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{q}\right),$$

$$\frac{1}{q}=\frac{135-\left(11+\frac{2}{3}\right)^2}{2\left(11+\frac{2}{3}\right)}=\frac{135-121-14-1-\frac{1}{9}}{\frac{70}{3}}=-\frac{10}{9}\cdot\frac{3}{70}=-\frac{10}{210}=-\frac{1}{21}$$

Nun ist $\frac{2}{3} - \frac{1}{21} = \frac{13}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$, somit, wie angegeben,

$$\sqrt{135} \sim 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}.$$

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{6^2 + 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \sim \left(6 + \frac{7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{13} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 36 - 6 - \frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{13}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{13} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{13} = \frac{3}{26} = \frac{1}{13} + \frac{1}{26},$$

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}.$$

$$\sqrt{6300} = \sqrt{79^2 + 59} \sim \left(79 + \frac{59}{158} = 79 + \frac{1}{3} + \frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{6300 - \left(\frac{278}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{278}{3}} = \frac{56700 - 56644}{9} \cdot \frac{3}{476} = \frac{56}{3} \cdot \frac{1}{476} = \frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102},$$

$$\sqrt{6300} \sim 79 + \frac{1}{3} + \frac{1}{34} + \frac{1}{102}.$$

$$\sqrt{1575} = \sqrt{39^2 + 54} \sim \left(39 + \frac{54}{78} = 39 + \frac{2}{3} + \frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1575 - \left(\frac{119}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{119}{3}} = \frac{14175 - 14161}{9} \cdot \frac{3}{238} = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{238} = \frac{1}{3.17} = \frac{1}{51},$$

$$\sqrt{1575} \sim 39 + \frac{2}{3} + \frac{1}{51}.$$

$$\sqrt{216} = \sqrt{14^2 + 20} \sim \left(14 + \frac{20}{28} = 14 + \frac{2}{3} + \frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{216 - \left(\frac{44}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{44}{3}} = \frac{1944 - 1936}{9} \cdot \frac{3}{88} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{88} = \frac{1}{3.11} = \frac{1}{33},$$

$$\sqrt{216} \sim 14 + \frac{2}{3} + \frac{1}{33}.$$

Abtheilung IV. Nicht ganz fügen sich dieser Regel die Wurzeln

$$\sqrt{356\frac{1}{18}} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9},$$

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8},$$

und Tannery lässt dieselben deshalb bei seiner Betrachtung aus dem Spiele. Indess scheint uns doch die Flinte durchaus nicht in's Korn geworfen werden

zu müssen. Wir halten uns zunächst an die zweite Wurzel und führen unsere Methode strenge durch. Man hat

$$\sqrt{356} = \sqrt{18^2 + 32} \sim 18 + \frac{32}{36}.$$

Hierin steckt nun allerdings zunächst der Stammbruch $\frac{2}{3}$, allein dessen Werth weicht doch von $\frac{8}{9}$ gar zu sehr ab; viel näher kommt schon der Bruch $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, und man hat somit

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{3}{4} + \frac{1}{q},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{356 - 324 - 27}{2 \cdot \frac{75}{4}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{75} = \frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$$

oder, wenn bei so weit getriebener Annäherung der Bruch $\frac{1}{120}$ als unwesentlich erachtet wird,

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Aehnlich bei der ersten Wurzel. Auch hier ist

$$\sqrt{356\frac{1}{18}} \sim 18 + \frac{3}{4} + \frac{1}{q},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{356 + \frac{1}{18} - 324 - 27 - \frac{9}{16}}{2 \cdot \frac{75}{4}} = \frac{5 - \frac{73}{18.16}}{2 \cdot \frac{75}{4}} = \frac{657}{72 . 75} = \frac{219}{1800}.$$

Dass dieser letztere Bruch mit $\frac{1}{9}$ identificirt ward, ist sicherlich nicht zu verwundern, und man hat somit den von Heron angegebenen Werth

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

gefunden.

Wir glauben durch Obiges dargethan zu haben, dass das Abtheilung III regelnde Verfahren auch für Abtheilung IV ausreichend ist.

Abtheilung V. Hierher zählen vier Wurzeln, welche Tannery mit Ausnahme der letzten für unächt hält; es sind diess:

$$\sqrt{5000} \sim 70 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4},$$

$$\sqrt{43 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{9},$$

$$\sqrt{208} \sim 14 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12},$$

$$\sqrt{720} \sim 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Wir möchten zu überlegen geben, ob sich für die letzteren beiden nicht folgender Vorschlag rechtfertigen liesse. Wenn man dem Heron die Fähigkeit zutraut, Gleichungen von der Form

$$\alpha x - \beta y = 1$$

in ganzen Zahlen aufzulösen, so konnte er etwa so folgern: Es ist für's Erste

$$\sqrt{208} = \sqrt{14^2 + 12} \sim \left(14 + \frac{12}{28} = 14 + \frac{3}{7}\right),$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{26^2 + 44} \sim \left(26 + \frac{44}{52} = 26 + \frac{11}{13}\right).$$

Nun lassen sich aber natürlich solche Brüche, deren Nenner eine Primzahl ist, schwerer in Stammbrüche auflösen, als andere; solche der letzteren Beschaffenheit mussten demnach mit möglichst geringem Fehler jenen substituirt werden, und es galt, die Gleichungen

$$3x - 7y = 1, \quad 11x - 13y = 1$$

aufzulösen. Die Lösungen waren $x = 12$, $y = 5$; $x = 6$, $y = 5$, also

$$\frac{5}{12} \sim \frac{3}{7}, \quad \frac{5}{6} \sim \frac{11}{13},$$

und wenn man jetzt in Stammbrüche zerlegt, ergiebt sich, wie gefordert,

$$\sqrt{208} \sim 14 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}, \quad \sqrt{720} \sim 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Abtheilung VI. Dieselbe umfasst zwei Wurzelwerthe, bei deren Betrachtung man unwillkürlich der Ansicht huldigen muss, als habe Heron das Rationalmachen der Nenner, d. h. die Formel

$$\sqrt{a^2 + \frac{b}{c}} = \sqrt{\frac{a^2c^2 + bc}{c^2}} \sim \frac{1}{c}\left(ac + \frac{bc}{2ac}\right)$$

angewendet. Es ist zuerst

$$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{128 + 4 + 2 + 1}{16}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{11^2 + 14} \sim \left(\frac{1}{4}\left[11 + \frac{7}{11}\right] \sim \frac{35}{12}\right),$$

wenn für $\frac{7}{11}$ mittelst der Gleichung

$$7 . 3 - 11 . 2 = 1$$

der nächste Stammbruch $\frac{2}{3}$ eingesetzt ward. Dann ist also

$$\sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \sim \left(2 + \frac{11}{12} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right).$$

Des Ferneren ist $\sqrt{886 - \frac{1}{16}}$ gleich

$$\frac{1}{4}\sqrt{14175} = \frac{1}{4}\sqrt{119^2 + 14} \sim \left(\frac{1}{4}\left[119 + \frac{7}{119}\right] = 29 + \frac{3}{4} + \frac{7}{4.119}\right),$$

also, genau nach Heron's Vorschrift,

$$\sqrt{886 - \frac{1}{16}} \sim 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68}.$$

Tannery macht mit Recht darauf aufmerksam, dass es unzulässig sei, aus diesen Einzelfällen den Schluss zu ziehen, dem Heron sei wirklich die Rationalisirung des Nenner's geläufig gewesen. Man darf diess umso weniger, als, was Tannery entgangen zu sein scheint, die strikte mehrmalige Anwendung des von ihm selbst in Abtheilung II durchgeführten Verfahrens zum gleichen Ziele führt. Wir haben in erster Annäherung

$$\sqrt{886 - \frac{1}{16}} = \sqrt{29^2 + 45 - \frac{1}{16}} \sim \left(29 + \frac{45}{58} \sim 29\frac{1}{2}\right),$$

in zweiter $\dfrac{886 - \frac{1}{16} - \left(\frac{59}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{59}{2}} = \dfrac{14176 - 1 - 13924}{59.16} = \dfrac{251}{944} \sim \dfrac{1}{4}$, und in dritter

$$\frac{886 - \frac{1}{16} - \left(29\frac{3}{4}\right)^2}{2.29\frac{3}{4}} = \frac{886 - \frac{1}{16} - \frac{14161}{16}}{2 \cdot \frac{119}{4}} = \frac{14176 - 14162}{16} \cdot \frac{2}{119} = \frac{28}{16.119} = \frac{1}{68},$$

also sämmtliche Stammbrüche wie oben.

Abtheilung VII. Diese siebente Abtheilung Tannery's nimmt drei Werthe in sich auf, welche eine ganz isolirte Stellung einnehmen. Bei Berechnung von

$$\sqrt{108} \sim 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

hat Heron ganz offenbar einen Kunstgriff angewendet. Er setzte nämlich, von der ihm (Kap. I, §. 4) wohlbekannten Relation

$$\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$$

ausgehend,

$$\sqrt{108} = 6.\sqrt{3} \sim \left(6 \cdot \frac{26}{15} = \frac{156}{15} = 10 + \frac{5}{15} + \frac{1}{15}\right),$$

und diess ist eben der angegebene Näherungswerth.

Endlich gehören hierher noch die gänzlich unerklärlichen Näherungsformeln

$$\sqrt{2460\frac{15}{16}} \sim 49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51},$$

$$\sqrt{615\frac{15}{64}} \sim 24 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{51} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}.$$

Von beiden Wurzeln ist Tannery fest überzeugt, dass sie überhaupt niemals auf einem wie immer beschaffenen direkten Wege ausgewerthet worden sind. Wer sich die Mühe nimmt, all' unsere verschiedenen Methoden an denselben durchzuprobiren, wird wohl nicht umhin können, ihm in dieser Ansicht beizupflichten.

So hätten wir denn die geometrische Gruppe der heronischen Quadratwurzeln im Zusammenhange untersucht. Indem wir uns einige Bemerkungen darüber für die Schlussbetrachtung aufsparen, wenden wir dem letzten unserer sämmtlichen Untersuchungs-Objekte, der goniometrischen Gruppe von Heron's Irrationalitäten, nunmehr unser Augenmerk zu.

§. 7. *Die heronische Trigonometrie.* Wir gehen also zurück zu jenen merkwürdigen Formeln, mittelst deren Heron die Fläche F_n ($n = 3, 4 \ldots 11$) eines regelmässigen nEckes als Funktion der Seite a_n auszudrücken lehrte. Wir gehen seine Tabelle an der Hand der Tannery'schen Darstellung 278) nochmals durch. Besserer Uebersicht halber haben wir die Formeln in Kap. I, §. 4 ebenfalls in vier Unterabtheilungen getheilt.

Abtheilung I. Es soll sein

$$F_3 \sim \frac{13}{30} a_3^2, \quad F_6 \sim \frac{13}{5} a_6^2, \quad F_{12} \sim \frac{45}{4} a_{12}^2.$$

Für die beiden ersten Ausdrücke galt offenbar $\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$; da ferner die Gleichheit

$$\frac{45}{4} a_{12}^2 = 3\,(2 + \sqrt{3})\, a_{12}^2$$

bestehen soll, so muss $\sqrt{3} \sim \frac{7}{4}$ genommen worden sein. Beide Näherungswerthe sind uns aus unseren bisherigen Untersuchungen genau genug bekannt.

Abtheilung II. Es soll sein

$$F_4 = a_4^2, \; F_8 \sim \frac{29}{6} a_8^2.$$

Erstere Gleichheit besteht wirklich; aus der annähernden Gleichheit

$$\frac{29}{6} a_8^2 \sim 2\,(1 + \sqrt{2})\, a_8^2$$

folgt $\sqrt{2} \sim \frac{17}{12}$. Von diesem Näherungswerthe dürfen wir aber das Gleiche, wie von jenen früheren, behaupten.

Abtheilung III. Es soll sein

$$F_5 \sim \frac{5}{3} a_5^2 \text{ oder } \sim \frac{12}{7} a_5^2, \quad F_{10} \sim \frac{15}{2} a_{10}^2.$$

Wäre dem so, so hätte man auch

$$\frac{5}{3} a_5^2 \text{ oder } \frac{12}{7} a_5^2 \sim \frac{1}{4} \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\, a_5^2, \quad \frac{15}{2} a_{10}^2 \sim \frac{5}{2} \sqrt{5 + 2 \sqrt{5}}\, a_{10}^2.$$

Hier musste also eine doppelte Annäherung erzielt werden. Wahrscheinlich nahm man zunächst $\sqrt{5} \sim 2$ und hatte also $\frac{1}{4} \sqrt{45}$ zu berechnen. Es ist

$$\sqrt{45} = \sqrt{6^2 + 9} \sim 6 + \frac{2}{3} + \frac{1}{q},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{45 - \left(\frac{20}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{20}{3}} = \frac{405 - 400}{9} \cdot \frac{3}{40} = \frac{15}{360} = \frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{45} \sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{96} \sim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}\right).$$

Der Bruch $\frac{1}{96}$ war verworfen worden.*)

Ganz auf die nämliche Art kann man die Flächenformel für das regelmässige Zehneck herleiten. Wenn zuerst $\sqrt{5} \sim 2$ gesetzt wird, so ist

$$\frac{5}{2} \sqrt{5 + 2 . 2}\, a_{10}^2 \sim \frac{5}{2} \sqrt{9}\, a_{10}^2 \sim \frac{15}{2} a_{10}^2.$$

Die zweite Fünfecksformel hingegen scheint auf der ersten Annäherung

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} \sim \left(2 + \frac{1}{2 . 2 + 1} = \frac{11}{5}\right)$$

beruht zu haben. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich

$$\frac{1}{4} \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\, a_5^2 \sim \left(\frac{1}{4} \sqrt{47}\, a_5^2 = \frac{1}{4} \sqrt{7^2 - 2}\, a_5^2 \sim \frac{1}{4}\left(7 - \frac{1}{7}\right) a_5^2 = \frac{12}{7} a_5^2\right),$$

wie Heron behauptet hat.

Abtheilung IV. Es soll sein

$$F_7 \sim \frac{43}{12} a_7^2, \quad F_9 \sim \frac{51}{8} a_9^2 \text{ oder } \sim \frac{19}{3} a_9^2, \quad F_{11} \sim \frac{66}{7} a_{11}^2.$$

Diese Formeln sind berechnet mit Hülfe der im „liber geeponicus“ vorkommenden, freilich sehr rohen, Annäherungsformel

$$d_n \sim n \cdot \frac{a_n}{3},$$

wo d den Durchmesser des um das nEck von der Seite a_n beschriebenen

---

*) Auf eine (a. a. O.) zu findende sehr hübsche Behandlung, welche Tannery dem Zusammenhang zwischen der Seite eines regelmässigen Fünfeckes und dem Diameter des dem letzteren umbeschriebenen Kreises angedeihen lässt, soll hier, als mit unseren Absichten nur in oberflächlicherer Beziehung stehend, nicht näher eingegangen werden.

Kreises bedeutet, und weiter mit Hülfe der ebenfalls heronischen und in ihrem ersten Theile richtigen Formel

$$F_n = n \cdot \frac{a_n}{2} \cdot \sqrt{\frac{d_n^2}{4} - \frac{a_n^2}{4}} \sim \left(\frac{n \,.\, a_n}{4} \sqrt{n^2 \cdot \frac{a_n^2}{9} - a_n^2} = \frac{n \,.\, a_n^2}{12} \sqrt{n^2 - 9}\right).$$

Für $n = 7$ ist $\sqrt{n^2 - 9} = \sqrt{40} \sim 6 + \frac{2}{7}$, vorausgesetzt dass die bei den Arabern bekannte Formel

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2(a+1)}, \quad \sqrt{6^2 + 4} \sim 6 + \frac{4}{14}$$

angewandt war. Dann ist

$$F_7 \sim \frac{7}{12} a_7^2 \left(6 + \frac{2}{7}\right) \sim a_7^2 \left(\frac{42}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right).$$

Mit Vernachlässigung eines Zwölftels ist also

$$F_7 \sim \frac{43}{12} a_7^2 .$$

Bei $n = 9$ haben wir nach den heronischen Formeln

$$F_9 = \frac{3}{4} a_9^2 \sqrt{72} = \frac{1}{4} a_9^2 \sqrt{648} = \frac{1}{4} a_9^2 \sqrt{25^2 + 23} \sim \frac{1}{4} a_9^2 \left(25 + \frac{1}{2}\right),$$

also

$$F_9 \sim \frac{51}{8} a_9^2 .$$

So erklärt Tannery (a. a. O.) die Relation; einfacher ist aber wohl die Ableitung, die hier folgt:

$$F_9 = \frac{3}{4} a_9^2 \sqrt{8^2 + 8} \sim \left(\frac{3}{4} a_9^2 \left[8 + \frac{1}{2}\right] \sim \frac{3}{4} \cdot \frac{17}{2} a_9^2 = \frac{51}{8} a_9^2\right).$$

Da

$$3 \,.\, 51 - 19 \,.\, 8 = 1$$

ist, so konnte der ungefügigere Bruch $\frac{51}{8}$ auch durch den einfacheren $\frac{19}{3}$ ersetzt werden.

Auch den zuletzt an die Reihe kommenden Werth

$$F_{11} \sim \frac{66}{7} a_{11}^2$$

glauben wir etwas abweichend von Tannery und zwar folgendermassen verständlich machen zu sollen. Es ist

$$F_{11} = \frac{11}{12} a_{11}^2 \sqrt{112} = \frac{11}{3} a_{11}^2 \sqrt{7} = \frac{11}{21} a_{11}^2 \sqrt{343} \sim \frac{11}{21} a_{11}^2 \cdot 18,$$

da $19^2 = 361$ zu gross wäre. Damit ist

$$F_{11} \sim \left(\frac{198}{21} a_{11}^2 = \frac{66}{7} a_{11}^2\right)$$

gefunden.

Im Ganzen haben wir nunmehr eine Vorstellung davon, dass und wie Heron der Alexandriner

$$\operatorname{cotang}\frac{360^0}{3},\ \operatorname{cotang}\frac{360^0}{6},\ \operatorname{cotang}\frac{360^0}{12},\ \operatorname{cotang}\frac{360^0}{8},\ \operatorname{cotang}\frac{360^0}{5},$$

$$\operatorname{cotang}\frac{360^0}{10},\ \operatorname{cotang}\frac{360^0}{7},\ \operatorname{cotang}\frac{360^0}{9},\ \operatorname{cotang}\frac{360^0}{11}$$

in Zahlen auszudrücken verstand.

Schlussbetrachtung.

Wir werfen, nachdem das gesammte Material des I. Kapitels in den beiden anderen Abschnitten nach Möglichkeit verarbeitet worden ist, noch einen kurzen Rückblick auf den Gang unserer Untersuchung. Unsere wesentlichsten Ergebnisse glauben wir etwa in den folgenden Thesen zusammenfassen zu können.

I. Die Alten gingen bei der Berechnung irrationaler Quadratwurzeln durchgängig von der Relation $\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$ aus und brachten an diesem Näherungswerthe in fast empirisch zu nennender Weise weitere Verbesserungen an. So verfuhr Heron durchaus, Archimedes wenigstens bei sehr grossen Zahlen.

II. Hatte man eine mehr oder minder befriedigende erste Annäherung, so gewann man methodisch, durch Betrachtungen, wie wir sie gegenwärtig bei der Auflösung der Pell'schen Gleichung anzustellen gewohnt sind, weitere bessere Näherungswerthe. Zeugen hiefür sind uns besonders Archimedes anlässlich seiner Berechnung von $\sqrt{3}$ und Theon Smyrnaeus.

III. Ein Kettenbruchverfahren, das irgendwie mit den bezüglichen Algorithmen der Neuzeit Aehnlichkeit besässe, existirte im eigentlichen Alterthum ebensowenig, wie eine bewusste Auflösung der Quadratwurzel in einer Bruchreihe, einzig das blos den Astronomen geläufige Berechnungsschema

$$\sqrt{A} \sim a + b \,.\, 60^{-1} + c \,.\, 60^{-2} + \cdots$$

ausgenommen.

IV. Dagegen scheinen sich schon im frühen Mittelalter, bei Indern, Arabern, Juden und durch deren Mitwirkung auch bei den Abendländern, die ersten drei und vier Näherungswerthe der Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \cfrac{b}{2a \pm \cfrac{b}{2a \pm \cdots}}$$

eingebürgert zu haben, natürlich ebenfalls, ohne dass das eigentliche Wesen

des Kettenbruches zur Geltung kam. Bei Indern und Arabern sind auch bereits Spuren der Gleichung

$$\sqrt{A} \sim a + b \cdot 10^{-1} + c \cdot 10^{-2} + \cdots$$

anzutreffen. Auch Interpolationen zwischen aufeinanderfolgenden Näherungswerthen dürften bereits im Mittelalter vorgenommen worden sein.

In wieweit ein Leser unserer Arbeit uns in diesen aus derselben gezogenen Schlüssen beistimmen kann, müssen wir dahingestellt sein lassen. Wir massen uns nicht an, auf einem so schwierigen Gebiete abschliessende Leistungen erzielt zu haben, aber der Hoffnung glauben wir uns mit Bestimmtheit hingeben zu dürfen, dass fernerhin Niemand mehr in die Diskussion der bei den alten Mathematikern vorkommenden Quadratwurzeln wird eintreten können, ohne sich mit der vorstehenden Bearbeitung in der einen oder anderen Weise auseinandergesetzt zu haben.

Nachschrift.

Nachdem der Druck vorstehender Abhandlung bereits völlig abgeschlossen war, kam dem Verf. durch die freundliche Vermittelung des Herrn M. Cantor eine handschriftliche Note des Herrn Oberlehrers Hunrath in Hadersleben zu, worin ein neuer und eigenartiger Weg zur Aufklärung des über den antiken Quadratwurzeln schwebenden Geheimnisses betreten wird. In Anbetracht der äusseren Umstände, unter welchen dieses Postskript zu Stande kommt, muss es natürlich bei einer kurzen Skizzirung des Gedankenganges sein Bewenden haben. Herr Hunrath, der — beiläufig bemerkt — strenge geometrisch vorgeht und auf diese geometrische Einkleidung der von ihm benutzten Sätze mit Recht Gewicht legt, geht von den Ungleichungen

$$a^2 > [m = a^2 - b] > (a-1)^2$$

aus und sucht sodann den Bruch $\frac{b}{2a}$ in der Art wieder zwischen Grenzen einzuschliessen, dass er

$$\frac{1}{z} \leqq \frac{b}{2a} < \frac{1}{z-1} \quad (z \geqq 2)$$

setzt. Nunmehr beweist er die Richtigkeit der Relation

$$\left(a - \frac{1}{z}\right)^2 > a^2 - b > \left(a - \frac{1}{z-1}\right)^2$$

und gewinnt durch consequente Durchführung des in Obigem angedeuteten

Verfahrens immer mehr sich anschmiegende Grenzwerthe. Für $m = \sqrt{3}$ sind die aufeinanderfolgenden Grenzbeziehungen diese:

$$2 - \frac{1}{4} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3}, \text{ resp. } \frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{5}{3},$$

$$2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}, \text{ resp. } \frac{26}{15} > \sqrt{3} > \frac{31}{18},$$

$$2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{3.5.52} > \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{3.5.51}$$

$$\text{resp. } \frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

Man bemerkt, dass diese Methode sehr viel Aehnlichkeit mit jener von Radicke hat, insoferne die Wurzel durch einen aufsteigenden Kettenbruch vom durchlaufenden Zähler 1 dargestellt wird; ein wesentlicher Unterschied liegt jedoch darin begründet, dass bei Radicke die Vorzeichen der einzelnen Glieder dem Zufall überlassen, bei Hunrath dagegen an das strenge Gesetz des Alternirens gebunden bleiben. Zum entschiedenen Vorzug gereicht letzterem Ableitungsmodus der Umstand, dass sich ziemlich ungezwungen die charakteristischen Zahlen des Archimedes ergeben; an Natürlichkeit und Einfachheit aber scheint uns doch nach wie vor Tannery den Vorrang zu verdienen.

Auch die heronischen Zahlen prüft Herr Hunrath durch und weiss einzelne derselben überraschend einfach abzuleiten. Bei anderen dagegen versagt sein Verfahren, wie er selbst hervorhebt, und er scheint uns somit durch die negative Seite seiner Bemühungen für Tannery's Ansicht, dass der Alexandriner durchaus nicht nach einem consequenten Plane vorgegangen sei, einen neuen Beleg erbracht zu haben. Auch die Beeinflussung der Inder durch die Griechen erachtet Hunrath als feststehend.

Citate.

1) Günther, Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik, Prag 1878. — 2) Ibid. S. 6. — 3) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Band, Leipzig 1880. S. 73 ff. — 4) Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung, Erlangen 1876. S. 38 ff. — 5) Cantor, S. 112. — 6) Ibid. S. 154 ff. — 7) Ibid. S. 163. — 8) Allman, Greek geometry from Thales to Euklid, Part II, Hermathena, Vol. VII. S. 308 ff. — 9) Rothlauf, Die Mathematik zu Platon's Zeiten und seine Beziehungen zu ihr, München 1878. S. 27. — 10) Cantor, S. 139. — 11) Dupuis, Le nombre géométrique de Platon, Paris 1881. — 12) Günther, Die platonische Zahl, Leopoldina, XVIII, 1882. — 13) Cantor, S. 191 ff. — 14) Procli Diadochi in primum librum Euclidis commentarius, ed. Friedlein, Lipsiae 1873. S. 427. — 15) Cantor, S. 155. — 16) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874. S. 132. — 17) Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842. S. 165 ff. — 18) Ibid. S. 184. — 19) Lamé-Chasles, Rapport sur un essai de M. Woepcke, Comptes rendus de l'acad. franç., séance du 14 février 1853. — 20) Lamé-Chasles, ibid. séance du 17 octobre 1853. — 21) Cantor, S. 300. — 22) Kästner, Geschichte der Mathematik, 1. Band, Göttingen 1796. S. 185. — 23) Archimedis Opera omnia una cum commentariis Eutocii, ed. Heiberg, Vol. I., Lipsiae 1880. S. 264. — 24) Ibid. S. 268 ff. — 25) Gantor, Gräko-indische Studien, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-lit. Abth., 22. Band. S. 1 ff. — 26) Nesselmann, S. 109. — 27) Archimedes, ed. Heiberg, Vol. III., Lipsiae 1882. S. 272 ff. — 28) Nesselmann, S. 111. — 29) Archimedes, ed. Heiberg, Vol. III. S. 300. — 30) Nesselmann, S. 121 ff. — 31) R. Wolf, Geschichte der Astronomie, München 1877. S. 37. — 32) Ibid. S. 170 ff. — 33) Aristarchus Samius de magnitudine solis et terrae, ed. Wallisius, Opera mathematica, Vol. III., Oxoniae 1699. S. 582. — 34) Grunert, Ueber Aristarch's Methode, Die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen, Archiv d. Math. u. Phys., 5. Theil, S. 401 ff. — 35) Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst, Leipzig 1875. S. 8. — 36) Ibid. S. 14. — 37) Ibid. S. 60 ff. — 38) Ibid. S. 27. — 39) Cantor, Vorlesungen, S. 833. — 40) P. Tannery, L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Aléxandrie, Mém. de la société des sciences phys. et nat. de Bordeaux, (2) tome III., S. 362 ff. — 41) Cantor, Vorlesungen, S. 320. — 42) P. Tannery, S. 386 ff. — 43) Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae, ed. Hultsch, Berolini 1864. — 44) Ibid. S. 163. — 45) Ibid. S. 182. — 46) Ibid. S. 183. — 47) Ibid. S. 184. — 48) Ibid. S. 185. — 49) Ibid. S. 112. — 50) Ibid. S. 130. — 51) Ibid. S. 212. — 52) Ibid. S. 184. — 53) Ibid. S. 93. — 54) Ibid. S. 94. — 55) Ibid. S. 95. — 56) Ibid. S. 95. — 57) Ibid. S. 110. — 58) Ibid. S. 185. — 59) Ibid. S. 217. — 60) Ibid. S. 212. — 61) Ibid. S. 110. — 62) Ibid. S. 126. —

63) Ibid. S. 185. — 64) Ibid. S. 92. — 65) Ibid. S. 95. — 66) Ibid. S. 183. — 67) Ibid. S. 96. — 68) Ibid. S. 96. — 69) Cantor, Vorlesungen, S. 335. — 70) Ibid. S. 51. — 71) Ibid. S. 334. — 72) Heron, ed. Hultsch, S. 212. — 73) Ibid. S. 226. — 74) Cantor, Vorlesungen, S. 337. — 75) Heron, ed. Hultsch, S. 231. — 76) Ibid. S. 58. S. 147. — 77) Berger, Die geographischen Fragmente des Eratosthenes, Leipzig 1880. S. 112. — 78) Cantor, Vorlesungen, S. 312ff. — 79) Berger, Die geographischen Fragmente des Hipparch, Leipzig 1870. — 80) Id., Die geogr. Fr. d. Eratosthenes, S. 7. S. 19. S. 185. S. 343. — 81) Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits, Paris 1851, S. XI. — 82) Mollweide, Commentationes mathematico-philologicae, Lipsiae 1813. S. 72ff. — 83) Halma, La composition mathématique de Claude Ptolémée, traduite pour la première fois en français, suivie de notes de Mr. Delambre, A Paris 1813. S. 421ff. — 84) Ideler, Ueber die Trigonometrie der Alten, Monatl. Corresp. z. Bef. d. Erd- u. Himmelskunde, 26. Band. S. 3ff. — 85) Mollweide, S. 73. — 86) Theonis Smyrnaei, philosophi Platonici, compositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium, ed. Hiller, Lipsiae 1878. — 87) Ibid. S. 43. — 88) Unger, Kurzer Abriss der Geschichte der Zahlenlehre von Pythagoras bis auf Diophant, Erfurt 1843. S. 17ff. — 89) Cantor, Vorlesungen, S. 365ff. — 90) Nesselmann, S. 229. — 91) P. Tannery, L'éducation Platonicienne, Revue philosophique, tome XI. S. 291. — 92) Cantor, Vorlesungen, S. 392; Nesselmann, S. 230. — 93) Nesselmann, S. 231. — 94) Cantor, Vorlesungen, S. 414. — 95) Ibid. S. 404. — 96) Rodet, L'algèbre d'Al-Kharîzmi et les méthodes indienne et grecque, Paris 1878. S. 60. — 97) Cantor, Vorlesungen, S. 405. — 98) Ibid. S. 418. — 99) Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanto vel Pappo attribuendum, ed. Henry, Halis Saxonum 1879. — 100) Nesselmann, S. 144ff. — 101) Ibid. S. 137. — 102) Ibid. S. 147. — 103) Günther, Antike Näherungsmethoden, S. 25. — 104) Nesselmann, S. 148. — 105) Friedlein, Die Geometrie des Pediasimus, Ansbach 1866. S. 23ff. — 106) Poggendorff, Bibliographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, 1. Band, Leipzig 1865. S. 100. — 107) C. v. Wolff, Kurzer Unterricht von den vornehmsten mathematischen Schriften, Halle a. S. 1717. S. 7. — 108) Geschichte der Astronomie von den ältesten bis auf gegenwärtige Zeiten, 1. Band, Chemnitz 1792. S. 124. — 109) Das Rechenbuch des Maximus Planudes (ΜΑΞΙΜΟΥ ΜΟΝΑΧΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΝΟΥΔΟΥ ΨΗΦΟΦΟΡΙΑ ΚΑΤ' ΙΝΔΟΥΣ 'Η ΛΕΓΟΜΕΝΗ ΜΕΓΑΛΗ) ed. Gerhardt, Halle a. S. 1865. — 110) Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen, Römer und des christlichen Abendlandes vom VII. bis XIII. Jahrhundert, Erlangen 1865. S. 85ff. — 111) Cantor, Vorlesungen, S. 433ff. — 112) Das Rechenbuch des Maximus Planudes aus dem Griechischen übersetzt von Waeschke, Halle a. S. 1878. — 113) Gerhardt, S. 29; Waeschke, S. 39. — 114) Waeschke, S. 43ff. — 115) Ibid. S. 46ff. — 116) Ibid. S. 54. — 117) Ibid. S. 40. — 118) Mollweide, S. 65ff. — 119) Cantor, Agrimensoren, S. 89. S. 201. — 120) Ibid. S. 92. — 121) Ibid. S. 106. — 122) Ibid. S. 122. — 123) Anicii Manlii Torquati Severini Boetii de institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque; accedit geometria quae fertur Boetii, ed. Friedlein, Lipsiae 1867. S. 404ff. — 124) Cantor, Agrimensoren, S. 133. — 125) Ibid. S. 137. — 126) Ibid. S. 163. — 127) Ibid. S. 173. — 128) Cantor, Vorlesungen, S. 745. — 129) Chasles, Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden, deutsch von

Sohncke, Halle a. S. 1839. S. 519ff. — 130) Zuckermann, das Mathematische im Talmud; Beleuchtung und Erläuterung der Talmudstellen mathematischen Inhaltes, Breslau 1878. — 131) Cantor, Rezension hiezu, Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-liter. Abtheilung, 23. Band. S. 89. — 132) Günther, Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie, 2. Heft, Halle a. S. 1878. S. 83ff. S. 116ff. — 133) Zuckermann, S. 16. — 134) Ibid. S. 34ff. — 135) Ibid. S. 60. — 136) Ibid. S. 16. — 137) Ibid. S. 6. — 138) Ibid. S. 8. — 139) Ibid. S. 9. — 140) Zunz, Zur Geschichte und Literatur, 1. Band, Berlin 1845. S. 177. — 141) Zuckermann, S. 11. — 142) Cantor, Vorlesungen, S. 551. — 143) Rodet, Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connues dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre, Bull. de la société math. de France, tome VII. S. 99. — 144) Cantor, Vorlesungen, S. 560. — 145) Ibid. S. 527. — 146) Ibid. S. 531. — 147) Hankel, S. 202. — 148) Thibaut, The Súlvasútras, Calcutta 1875. — 149) Cantor, Gräko-indische Studien, S. 1ff. — 150) Günther, Die neuesten Forschungen über den Zusammenhang orientaler mit abendländischer Mathematik, Leopoldina, Heft XIII. S. 38ff. — 151) Thibaut, S. 13; Cantor, Vorlesungen, S. 545. — 152) Ibid. S. 546. — 153) Ibid. S. 547. — 154) Ibid. S. 548. — 155) Rodet, Sur une méthode, S. 100. — 156) Cantor, S. 655ff. — 157) Ibid. S. 623. — 158) Ibid. S. 625. — 159) Al Kâfî fîl Hisâb des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî, übers. v. Hochheim, 2. Heft, Halle a. S. 1880. S. 10ff. — 160) Id., ibid., 3. Heft, Halle a. S. 1882. S. 2. — 161) Cantor, Vorlesungen, S. 641. — 162) Ibid. S. 633. — 163) Alkarkhî, 2. Heft. S. 12ff. — 164) Rodet, Sur les méthodes d'approximation chez les Arabes, Bull. de la société math. de France, tome VII. S. 160. — 165) Beha-Eddin's Essenz der Rechenkunst arabisch und deutsch herausgegeben von Nesselmann, Berlin 1843. S. 15. — 166) Kaestner, Geschichte der Mathematik, 1. Band. S. 97. — 167) Peacock, Arithmetic including a history of the science, London 1849. S. 436. — 168) Cantor, Vorlesungen, S. 192. — 169) Ibid. S. 697. — 170) Woepcke, Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans, Paris 1855. S. 36ff. — 171) Friedlein, S. 154. — 172) Hankel, S. 185. — 173) Roeber, Die ägyptischen Pyramiden in ihren ursprünglichen Bildungen, nebst einer Darstellung der proportionalen Verhältnisse im Parthenon zu Athen, Dresden 1855. — 174) Günther, A. Zeising als Mathematiker, Zeitsch. f. Math. u. Phys., Hist.-liter. Abtheilung, 21. Band. S. 157ff. — 175) Sonnenburg, Der goldene Schnitt, ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik und ihrer Anwendung, Bonn 1881. — 176) Ibid. S. 20. — 177) Günther, Das mathematische Grundgesetz im Bau des Pflanzenkörpers, Kosmos, 3. Band. — 178) Langer, Die Grundprobleme der Mechanik, eine kosmologische Skizze, Halle a. S. 1878. S. 59ff. — 179) G. Hauck, Die Stellung der Mathematik zur Kunst und Kunstwissenschaft, Berlin 1880. S. 8. — 180) Hultsch, Das Grundmaass der griechischen Tempelbauten, Archäol. Zeitung, 38. Jahrg. S. 91ff. — 181) Id., Die Bestimmung des attischen Fusses nach dem Parthenon und Theseion, ibid., 36. Jahrg. S. 172ff. — 182) Id., Die Maasse des Heraion und einiger anderer Tempel, ibid., 36. Jahrg. S. 99ff. — 183) Ibid. S. 105. — 184) Ibid. S. 106. — 185) Hultsch, Heraion und Artemision, zwei Tempelbauten Joniens, Berlin 1881. S. 19. — 186) Id., Rezension zu Cantor's Vorlesungen, Jahrb. f. Philol. u. Pädag., Jahrg. 1881, S. 587. — 187) Ibid. S. 591. — 188) Cantor, Vorlesungen, S. 151. — 189) G. Hauck, Die subjektive Perspektive und die horizontalen Curvaturen des dorischen Styles, Stuttgart 1879. S. 91ff. — 190) Nesselmann, S. 110.

— 191) Friedlein, S. 81. — 192) Cantor, Vorlesungen, S. 450. — 193) Hultsch, Rezension zu Brandis, Das Münz-, Maass- und Gewichtswesen in Vorderasien, Jahrb. f. Philol. und Pädag., Jahrg. 1870, S. 534. — 194) Friedlein, S. 94. — 195) Rodet, Sur les méthodes etc., S. 67. — 196) Id., Sur une méthode d'approximation etc, S. 99. — 197) Cantor, Vorlesungen, S. 559. — 198) Günther, Antike Näherungsmethoden, S. 14. — 199) Id., Storia dello sviluppo della teoria delle frazioni continue fino all' Euler, Bullett. di storia e di bibliogr. delle scienze mat. e fis., Tomo VII. S. 226. — 200) Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, tome IV., Paris 1865. S. 98. — 201) Larismetique de maistre Estienne de la Roche dict Villefranche, Lyon 1520. — 202) Günther, Rezension zu Treutlein, Die deutsche Rechenkunst im XVI. Jahrhundert, Zeitschr. f. d. Realschulwesen, 2. Jahrg. S. 430. — 203) Rodet, Sur les méthodes etc., S. 162ff. — 204) Nesselmann, S. 210. — 205) Heiberg, Quaestiones Archimedeae, Hauniae 1879. S. 62. — 206) Cantor, Vorlesungen, S. 274. — 207) Ibid. S. 273. — 208) Gauss, Rezension zu Mollweide's Commentationes, Gött. gel. Anz. 1808, S. 49ff. — 209) Ibid. S. 51. — 210) Nesselmann, S. 109. — 211) Cantor, Vorlesungen, S. 370. — 212) De Lagny, Méthode générale pour transformer les nombres irrationaux en séries de fractions rationelles les plus simples et les plus approchées qu'il soit possible, Mém. de math. et de phys. tirés des registres de l'acad. royale des sciences, Année 1723. S. 55ff. — 213) Ibid. S. 60. — 214) Günther, Antike Näherungsmethoden, S. 18. — 215) Mollweide, S. 74ff. — 216) Ibid. S. 76. — 217) Ibid. S. 72. — 218) Hauber, Ueber nähernde rationale Ausdrücke für incommensurable Quadratwurzeln, in Beziehung auf Archimedes' Kreismessung, Zeitschr. f. Astron. u. verw. Wissensch., 4. Band. S. 95ff. — 219) Günther, Antike Näherungsmethoden, S. 21. — 220) J. L. Lagrange's mathematische Werke, deutsch von Crelle, 3. Band. Berlin 1824. S. 130ff. — 221) Nesselmann, S. 182. — 222) Archimedis opera nonnulla a Federico Commandino Urbinate nuper in Latinum conversa et commentariis illustrata, Venetiis 1588; Eutocii Ascalonitae commentarius, Bl. 3ff. — 223) Buzengeiger, Methode der griechischen Geometer, um für Wurzeln solcher Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, annähernde rationale Brüche zu finden, Zeitschr. f. Astron. u. verw. Wissensch., 5. Band. S. 85ff. — 224) Ibid. S. 89ff. — 225) Libri, tome IV. S. 88ff. — 226) Woepcke, lettera a D. B. Boncompagni intorno ad un metodo per la determinazione approssimativa degl' irrazionali di secondo grado, Bullett. di bibliogr. e di storia delle scienze mat. e fis., Tomo VII. S. 255ff. — 227) Kaestner, Gesch. d. Math., 1. Band. S. 60ff. — 228) Favaro, Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo, Bullet. di bibliogr. e di storia delle scienze mat. e fis., Tomo VII. S. 484ff. — 229) Ibid. S. 487ff. — 230) Ibid. S. 489ff. — 231) Cantor, Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus, Drei mathematische Charakterbilder aus dem XVI. Jahrhundert, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 2. Band. S. 373. — 232) Favaro, S. 492ff. — 233) Ibid. S. 498ff. — 234) J. Bertrand, Traité d'arithmétique, Paris 1851. S. 287ff. — 235) Oversigt over de kgl. Danske Videnskab. Selskabs Virksomhed, 1875. S. 21ff. — 236) Heiberg, Quaestiones Archimedeae, S. 65ff. — 237) Zeuthen, Nogle hypotheser om Arkhimedes kvadratrodsberegning, Tidsskrift for Mathematik, VI. Raekke, 3. Aargang. S. 150ff. — 238) Alexejeff, Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre, Bull. de la société math. de France, tome VII. S. 167ff. — 239) Cantor, Vorlesungen, S. 141. — 240) Ch. Henry, Sur une valeur approchée de $\sqrt{2}$ et sur deux approximations de $\sqrt{3}$, Bull. des sciences math. et

astron., (2) tome III. S. 515 ff. — 241) Ibid. S. 518. — 242) Alexejeff, S. 170. — 243) Seidel, Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetze eines Kettenbruches und der Art des Fortganges seiner Näherungswerthe, München 1855. S. 7. — 244) Günther, Ueber aufsteigende Kettenbrüche, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 21. Band. S. 189. — 245) Ibid. S. 191. — 246) Serret, Sur le développement en fraction continue de la racine quarrée d'un nombre, Journal des math. pures et appliquées, tome XII. S. 518. — 247) Boncompagni, Question 1111, Nouv. Ann. de Mathém., (2) tome XII. S. 191. — 248) Moret-Blanc, Solution de la question 1111, ibid. S. 477 ff. — 249) Günther, Vergleichung zweier Methoden zur näherungsweisen Bestimmung irrationaler Grössen, Sitzungsber. d. phys.-med. Societät zu Erlangen, 6. Heft. S. 82 ff. — 250) P. Tannery, Sur la mesure de cercle d'Archimède, Bordeaux, 1881. — 251) Ibid. S. 12. — 252) Ibid. S. 17. — 253) Hankel, S. 200 ff. — 254) P. Tannery, Sur la mesure etc. S. 19. — 255) Ibid. S. 20 ff. — 256) Ibid. S. 22. — 257) Zeuthen, S. 182 ff. — 258) Ibid. S. 184. — 259) Günther, Ueber einen Spezialfall der Pell'schen Gleichung, Blätter f. d. bayr. Gymnasialwesen, 18. Band. S. 19 ff. — 260) Ibid. S. 22 ff. — 261) Krummbiegel u. Amthor, Das problema bovinum des Archimedes, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-liter. Abtheil., 25. Band. S. 121 ff. — 262) Ibid. S. 159. — 263) P. Tannery, Sur le problème des boeufs d'Archimède, Bull. des sciences math. et astron., (2) tome V, Sep. Paris 1881. — 264) Heilermann, Bemerkungen zu den irrationalen Näherungswerthen der archimedischen Quadratwurzeln, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-liter. Abtheil., 26. Band. S. 121 ff. — 265) Ibid. S. 123. — 266) E. Lucas, Recherches sur plusieurs travaux de Léonard de Pise et sur diverses questions de l'arithmétique supérieure, Bull. di bibliogr. e di storia delle scienze mat. e fis., tomo X. S. 131. — 267) Ibid. S. 135 ff. — 268) E. Lucas, Sur les fractions numériques simplement périodiques, Bruxelles 1878. S. 2. — 269) Ibid. S. 14 ff. — 270) Ibid. S. 4. — 271) Ibid. S. 15. — 272) Rodet, Sur une méthode d'approximation etc., S. 98 ff. — 273) Cantor, Vorlesungen, S. 545. — 274) Thibaut, S. 13 ff. — 275) Kaestner, Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, Göttingen 1794. S. 213. — 276) P. Tannery, Sur la mésure etc. S. 2 ff. — 277) Id., L'arithmétique des Grecs dans Héron S. 376 ff. — 278) Ibid. S. 386 ff.

Verbesserungen.

Seite 27, Z. 11 v. u. l. $\sqrt{4500}$. — S. 29 ist zur Randnote zu bemerken, dass nach Heiberg (Literargesch. Studien über Euklid) Dasypodius nicht das hier genannte, sondern ein anderes Werk des Barlaam zum Druck befördert hat. — S. 75, Z. 5 v. o. statt $AEFG$ l. $AE'F'G'$. — S. 88, Z. 16 u. 19 v. o. l. $E\left(\sqrt{a}\right)$. — S. 108, Z. 14 v. u. l. $E\left(\frac{d_1}{r_1}\right)$.

DER TRAKTAT FRANCO'S VON LUETTICH:

„DE QUADRATURA CIRCULI.“

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. WINTERBERG.

In der Ausgabe von Aug. Mai: „Classici autores e vaticanis codicibus editi". Roma 1831. wird unter den, in der Zeit des Verfalls der Wissenschaften des Abendlandes hier und da sporadisch auftretenden Vertretern der exacten Fächer u. A. (cfr. III. 346—348 ebendas.) des Dominikanermönchs Franco von Lüttich als Verfasser eines Traktats „de quadratura circuli" Erwähnung gethan, wovon ein Manuscript sich gegenwärtig noch in der Vaticanischen Bibliothek befindet, über dessen Inhalt jedoch a. a. O. nähere Angaben fehlen. Nur soviel wird angedeutet (cfr. M. Cantor, Geschichte der Mathematik I. S. 649—650), dass in jenem Manuscript die Resultate früherer Autoren über denselben Gegenstand, u. A. Adelbold, Wazo als fehlerhaft nachgewiesen und sodann eine neue Lösung des Problems gegeben wird. Montucla erwähnt in seiner Geschichte der Mathematik Franco's auffallenderweise nicht, während Adelbold nicht blos von ihm genannt, sondern auch seinen wissenschaftlichen Leistungen nach characterisirt wird. Dagegen findet sich ebenda eine Notiz, worin Campanus von Novara als Autor eines Traktats de quadratura circuli erwähnt wird, dessen Inhalt, obwohl derselbe hiernach einer viel späteren Zeit entstammen würde, doch kaum wesentlich mehr Neues zu bieten scheint, als der in Rede stehende, denn derselbe wird a. a. O. mit den Worten characterisirt: „on a enfin de lui (scil. Campanus) un traité intitulé: „de quadratura circuli" où s'étayant du rapport donné par Archimède il resout quelques problèmes sur le cercle. Il faut convenir que le bon Campanus se fourvoye ici en confondant ce qui chez Archimède n'est qu'un rapport approché avec un rapport exact" etc. Ohne an diesem Ort auf eine nähere Untersuchung einzugehen, ob und inwiefern hier vielleicht eine Verwechselung beider Autoren vorliegt, scheint es doch schon wegen der Bedeutung des Gegenstandes an sich, der bekanntlich Jahrhunderte hindurch die hervorragendsten Gelehrten jener Zeit erfolglos beschäftigte, von Interesse den erwähnten Traktat etwas näher ins Auge zu fassen. — Die davon in der Vaticanischen Bibliothek enthaltene Handschrift gehört der älteren Sammlung an und trägt die Nummer 3123. Sie ist auf Pergament geschrieben, im Allgemeinen noch gut erhalten, bis auf den oberen Rand verschiedener Blätter, der in Folge von Feuchtigkeit verschimmelt, wodurch einzelne Stellen unleserlich geworden und gehört den Buchstabencharacteren nach unzweifelhaft dem zwölften Jahrhundert an. Sie ist mit zwei andern Handschriften aus derselben Zeit in einem braunen Ledereinbande enthalten, welche ihr daselbst vorangestellt sind, die erste „Computus Gerlandi" überschrieben ein ziemlich

umfangreiches Werk, das sich über Arithmetik, Geometrie und Astronomie erstreckt. Diesem folgt sodann eine lateinische Uebersetzung und Erläuterung von Euklid's Werken, durch Boetius*).

Diesem schliesst sich der 28 Folien fassende Traktat Franco's an. Die Schrift ist mit Ausnahme einzelner zweifelhafter Stellen gut und leserlich, die Anfangsbuchstaben dem Gebrauch damaliger Zeit gemäss, sorgfältig in rother Tinte und in grösseren Dimensionen ausgeführt. Die Abkürzungen lassen, sofern sie auf gewissen durchgehends beobachteten Prinzipien beruhen nur selten Zweifel. Hinderlich für das Verständniss sind nur die, gerade an den interessantesten Stellen oft eingeschobenen Correcturen und Zusätze, deren viele kaum zu entziffern. Doch wird trotz alledem der Gedankengang hierdurch nirgends unterbrochen. Durchgehends ist die Schrift von derselben Hand, ein Umstand, der als Beweis dafür gelten kann, dass das 7. Buch, welches auf den drei letzten Seiten über musikalische Gegenstände handelt, nicht etwa einem späteren Autor, vielleicht dem Musiker Franco von Cöln angehören kann, was der chronologischen Folge widerspräche, abgesehen davon, dass das siebente Buch nur zum geringsten Theil über den fraglichen Gegenstand handelt.

Hinsichtlich der Zeichnungen finden sich grössere Mängel. Sie befinden sich nicht gesondert oder auf freigelassenem Rande, sondern an den betreffenden Stellen im Text verstreut. Auffallend ist zuvörderst die grosse Nachlässigkeit mit der die Figuren durchweg dargestellt, abgesehen von der oft pygmäenhaften Kleinheit, welche die Buchstaben kaum errathen lässt. An keiner Figur sind die dem Text entsprechenden Verhältnisse beobachtet, die richtigen Längenmasse innegehalten, wie sie zur leichten Uebersicht und Klarheit des Ganzen nothwendig. Dabei fehlen oft die Buchstaben an den fraglichen Puncten, oder sind an verkehrte Stellen gesetzt. Da endlich, wo eine correcte Figur am meisten nothwendig gewesen wäre, am Ende des sechsten Buches, weil ohne sie der Text unmöglich zu verstehen, fehlt sie auffallenderweise ganz, während a. a. O. der Raum dafür frei gelassen.

Sieht man von diesen im Ganzen immerhin noch erträglichen Uebelständen ab, so dürfte der Traktat nicht blos als historisches Monument, sondern auch vom rein wissenschaftlichen Standpunkt betrachtet, in vieler Hinsicht nicht ohne Interesse sein.

---

*) Der vollständige Titel ist: „Euclides (?) in greco boetius transtulit in latinum commentatus in difficiliora capitula. dirigitur autem ad simmachum socerum suum cum prologo sicut in arithmetica imitatus nicomachum. dirigitur ad eundem.“ In der Friedlein'schen Boetiusausgabe (Leipzig 1867) ist pag. 372 unser Codex durch den Buchstaben n_1 bezeichnet und irriger Weise in das X. Jahrhundert versetzt.

Inhaltsübersicht.

Der nachfolgende Traktat des Dominikaners Franco v. Lüttich aus der Zeit Otto's III sucht das von den Gelehrten damaliger Zeit vielfach behandelte Problem der Quadratur des Kreises zu lösen. Indem er dabei von der Voraussetzung ausgeht, das Verhältniss der Peripherie zum Radius sei absolut bestimmbar, und durch die Zahl $\frac{22}{7}$ ausgedrückt, gelingt es ihm ohne Schwierigkeit, den der ganzen Deduction zu Grunde gelegten Kreis vom Durchmesser 14 in ein Rechteck von den Seiten 11 und 14 zu verwandeln. Da ihm aber die Transformation des letzteren in ein Quadrat auf geometrischem Wege unbekannt war, so beginnt erst hier, wo man eigentlich Alles beendet erwartet, die Hauptschwierigkeit und es gelingt ihm schliesslich nur einen angenäherten Werth für die Seite des Quadrats zu ermitteln.

Der ganze Traktat zerfällt in 6 Bücher, welchen sich am Ende noch ein, aus späterer Zeit stammendes anschliesst, worin sich einige historische Notizen über den fraglichen Gegenstand finden.

Das erste Buch zeigt kurz die Unmöglichkeit, das Problem der Quadratur des Kreises dem Standpunkt der damaligen Wissenschaft gemäss vollkommen zu lösen. Auch der vorliegende Traktat werde darum keine völlig abgeschlossene Lösung geben. Hierbei werden die Fehler früherer derartiger Versuche nachgewiesen, wobei sich die ersten Versuche der Darstellung irrationaler Grössen in Reihenform finden, nur dass die Reihen bei einer endlichen Gliederzahl abbrechen.

Die Unmöglichkeit, weder durch eine Zahl direct, noch durch Zusatz kleiner Grössen die Fläche des Kreises = 154 darstellen zu können, wird zu Anfang des zweiten Buches nochmals hervorgehoben und darum der Uebergang zu einer Mittelfigur, einem Rechteck von den Seiten 11 und 14 vorgeschlagen. Nachdem diese ausgeführt, werden etwaige Einwendungen über die Gleichheit der Flächeninhalte von Kreis und Rechteck durch geometrischen Nachweis widerlegt.

Das dritte Buch beschäftigt sich mit der Verwandlung des Rechtecks

in ein Quadrat. Die geometrische Construction ist jedoch nur angenähert richtig, wie oben bemerkt. Sodann wird gezeigt, dass auf arithmetischem Wege die Verwandlung unmöglich. Als besonderer Fall wird dabei das Quadrat untersucht, dessen Fläche die doppelte eines gegebenen und gezeigt, dass die Seite jenes, d. i. die Diagonale des gegebenen nicht aus der Seite des letzteren durch Hinzufügung kleiner Theilchen entstehen könne.

Das vierte Buch enthält eine allgemeine Betrachtung über die Verwandlung der Figuren gleichen Flächeninhalts, Dreiecke und Vierecke, in einander. Es werden mit Bezug auf die Gleichheit oder Ungleichheit der Seiten solcher Figuren 9 Fälle unterschieden. Den dieselben erklärenden Zeichnungen fehlt jedoch theilweise die Angabe des Verfahrens, um jene aus diesen, oder umgekehrt zu erhalten. Die ganze Betrachtung scheint wesentlich zu dem Zwecke zu dienen, um das im dritten Buche angegebene Verfahren zu rechtfertigen, dass man den Kreis nicht direct, sondern durch eine Zwischenfigur in das Quadrat überführen müsse, welche mit jenem eine Dimension gemein habe, wie das Rechteck von der Seitenlänge des Durchmessers.

Das umgekehrte Verfahren: die Verwandlung des Quadrats in ein Rechteck von den Seiten 14 und 11 wird im fünften Buch vorgeführt, und zwar nach Analogie des bereits im dritten angegebenen inversen Verfahrens. Hieran schliesst sich eine directe Ueberführung des Kreises in ein Quadrat, dessen Seitenlänge jedoch mit der, aus dem vorhergegangenen Verfahren sich ergebenden nur angenähert übereinstimmt, ohne dass ein Beweis oder sonstige Motivirung dieses letzteren Versuchs gegeben wird. Das Resultat ist, wie bereits das frühere, eine Uebereinstimmung der Flächeninhalte beider Figuren bis auf kleine Bruchtheile. Es werden im Anschluss an diese Construction die gegenseitigen gleichen Ueberschüsse ihrem numerischen Werthe nach festgestellt, welche bei concentrischer Lage des Kreises und des ihm flächengleichen Quadrats sich ergeben: nämlich die Ecken des Quadrats und die Segmente des Kreises. Auch hier hat das Resultat nur angenähert seine Richtigkeit. Dasselbe gilt hinsichtlich der gegenseitigen Ueberschüsse des Rechtecks von den Seiten 11 und 14 und des ihm gleichen concentrisch und mit parallelen Seiten liegenden Quadrats.

Im sechsten Buche wird von der Theilung der Flächen speciell der Quadrate resp. der Darstellung ihrer Seiten bei gegebenem Flächeninhalte gehandelt. Der Verfasser ist der Ansicht, zur Vervollkommnung der obigen Methoden müsse man vor Allem lernen Rechtecke von bestimmtem Flächeninhalte in Quadrate zu verwandeln, oder zu jedem gegebenen Inhalte eines Quadrats dessen Seite zu ermitteln. Es werden dabei 3 Methoden in Be-

tracht gezogen. Die beiden ersten auf Veränderung der Masseinheit beruhenden genügen nicht. Es bleibt daher nur das frühere Mittel des Zusatzes kleiner Theilchen oder die genäherte Reihenentwickelung irrationaler Grössen. Sie hat auch hier, wegen der endlich begrenzten Gliederzahl denselben Uebelstand wie die früheren. Darum wird es vorgezogen, wieder zur geometrischen Construction überzugehen. Zuerst werden zu einer Reihe von Quadraten, deren Seiten und Flächen bekannt, die letzteren als Dreiecke aufgetragen, so dass ihre Seiten den Diagonalen der Quadrate entsprechen, welchen diese Dreiecke an Flächeninhalt gleich. Zwischen diese Reihe in demselben Winkel liegender ähnlicher Dreiecke werden sodann andere interpolirt, deren Inhalte die Hälften der bereits vorhandenen. Nachdem so die Zahlenreihe, welche den Flächeninhalten entspricht, möglichst ausgefüllt, handelt es sich noch darum, die noch fehlenden einzuschalten, welche durch das obige Verfahren nicht bestimmbar waren. Die erste dieser ist die Zahl 3 als Dreiecksfläche. Zur Auffindung der ihr entsprechenden Seitenlänge wird eine Construction angegeben, die wegen der fehlenden Figur leider unverständlich, die aber jedenfalls, wie alle ähnlichen früher gegebenen, nur näherungsweise richtig, da der Pythagoräische Lehrsatz in seiner Allgemeinheit nirgends zur Anwendung kommt.

Hiermit endigt der eigentliche Traktat. Das folgende Buch scheint, da es nicht als siebentes bezeichnet ist, auch seinem Inhalt nach nicht ursprünglich dem ersten Traktate zugehört zu haben. Es enthält zunächst einige historische Notizen, die, wie der Verfasser bemerkt, dem Leser zeigen mögen, auf welche Art er durch das Studium der Alten, Plato und Boetius, auf seine Lösung verfallen. Von des letzteren Verfahren bei der Quadratur des Cirkels gibt er eine kurze Darstellung, indem er durch Zahlen die Fehler jener Methode nachweist. Ein zu damaliger Zeit wohl praktisch gebräuchliches Verfahren der Quadratur, welches darauf basirt, wird am Schlusse kurz erwähnt.

Die letzten zwei Seiten des Manuscripts enthalten, obgleich ohne Unterbrechung an das Vorige angereiht, einen ganz heterogenen Gegenstand: die Bestimmung der Pfeifenlängen an musikalischen Instrumenten, einige Angaben über Construction von Cimbeln u. s. f., wie es scheint von vorwiegend praktischem, weniger theoretischem Interesse, weshalb von einer näheren Darlegung des Inhalts Abstand genommen wird.

Bedenkt man mit was für rohem Material die Wissenschaft damaliger Zeit gearbeitet, der die Resultate des Pythagoras, Euclid u. s. w. gänzlich unbekannt, so muss man staunen über den Scharfsinn und Erfindungsgeist, welcher aus dem Dunkel jener Zeiten hin und wieder hervorleuchtet.

Incipit prologus in primum librum domini franconis de quadratura circuli.

Ex quo mi . . papa presulum decus Corona totius per orbem cleri nullius unquam immemor honestatis ex quo liberalitatem tuam gratuito in me confirmasti ex eodem tua temperantia nulla hora sollicita esse non potui cuius officii ratione tantam gratiam promereri deberem. Quippe pecuniarum nihil erat nec caua superbi corruptelis ungula nec mineruale pecunia operose arteque elaborate vestis nec fusilis metalli admirandis figuris ope incusum nec peregrini lapidis multiplex ac varius coloris aspectus. Quamquam ego si eiusmodi rerum habundantia pollerem haut unquam in animum subrepere auderem tante nobilitati tanteque dignitati ex eisdem munuscula offerre. Hec et cum principium largitione distribuuntur in uulgare indigentie et necessitate subuentata. Cum vero eorum oblatione ipsorum principium beneuolentia comparata procul dubio auaritie illorum occulta quodam elogio exprobratur. Neque et redimi muneribus possunt si non eos quod nimirum accidit ex illo auaritie monstro ipsa munera delectarent. Quis autem nescit omnem illam ydolatrie seruitutem ab arce animi tui procul extrusam? velud in infima precipitatam. Quod si uero ita se habet ubi ille facultates quibus affluit tibi cum amplissimis rebus diuitis et ditis (?) colonie tantum heditarius et imperialis fiscus. has tu profecto ut ita dicam profligare nullo tempo desistis quicumque eis indigeant hylariter erogando. Quid tum? Nempe aurum in massa contrudere diabolicum putas distribuere autem humanum et proximum deo. Qua proprietate iure metuerem talia eulogia tuis conspectibus prensentari cum rem operum precipue contemptorum existas.*) Nam undique circumspecta prudentia oculata infirmam scientiam animalis ante et retro ista fortassis exprobrationi sue cupiditatis assignaret. Sed tamen per multas et uarias deliberationes occurrit animo nichil esse in quo eque deuotio mea preclarescet. quodsi procurarem iuxta uires ingenii munus aliquid liberale. Nempe hoc munus summa illa ingenuitas in rebus honestissimis et nata et omnem etatem

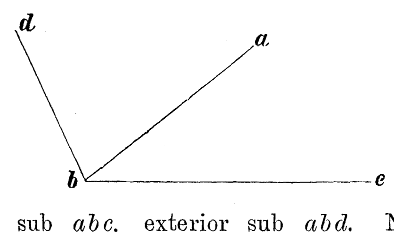
---

*) b. existimas.

uersata hoc ita auide amplexatur*) ut infelici auaritie longe munus blandiantur ignaue opes. Itaque ita hac uia adductus sum ut ederem libellum de circuli quadratura imperuia plurimum renitentem ad temerarios uersus pro unguente deuotione. hoc igitur opus quoniam edictum est te ad studia nos beneficiis inuitante alterius opus nisi tuum esse non potuit. Quamobrem circumesto omnem ejus diligentiam siue penitentia reprobandum sit siue in parte corrigendum siue ex toto prouehendum id tua maxime interesse. Ergo quidem facto opus sit exemplo consultus eris augusti. Habes inquam plures aetuccas ruatos quibus immune sit moris alienis studiis innidere. he fidei horum karitati laborem nostrum committes ut in tantum superflua resecent. si erratis quo adhibeant te probante correctionem itaque hoc opus sue emendationis opera castigent ut non sit indignum quod tuo nomini ueluti cuidam numini debeat consecrari.

Domini franconis liber primus incipit de quadratura circuli.

Quadratura circuli inter occultas rerum adeo est abstrusa natura ut de eius ratione nemo hodie dubitaret nam aristoteles quem rei inuentorem ferunt ipsius inuentionem predicamentis suis indidisset. (?) Eius uero scientiam haut dubium ferunt usque ad boetium perdurasse illo autem sublato ipsa quoque omnibus simul minuit propter solam dubitationem qua ratione ac tanta(m) ut in ea omnes italie gallie atque germanie defecerint sapientes. Siquidem hanc rem adelbold hanc maximus doctor Wazo hanc ipse studiorum reparator Gerbertus multique alii studiose inuestigarunt. Qui si effectu potiti fuissent num id ab illis profectos quorum aliqui adhuc supersunt universos lateret? Et Gerbertus quidem geometrus libellum habebat. aliaque eiusdem scripta aliquibus (?) ut fallor**) numquam exclussisset. si quidem eius diligentie supra hac scientia cooperatum fuisset. Quamobrem dementis esset in tanta difficultate perfectam cognitionem polliceri. Nihil ergo uolumus promittere presentare studiorum laborem qui primo sudabit nulla questione quod plurimum etiam fatigauit maiores nostros de comparatione uidelicet angulorum. quorum una quidem diuisio secundum propriam superficiem in rectum hebetem et acutum alius secundum positionem eam aliorum exterior aliorum interior appellatur uidelicet quod hic inter figure terminos comprehensus sit ille ubi extat appositum ad hunc modum.



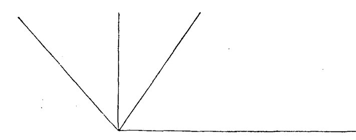
Est enim interior angulus sub *abc*. exterior sub *abd*. Neque et illis credendum qui nihil uolue-

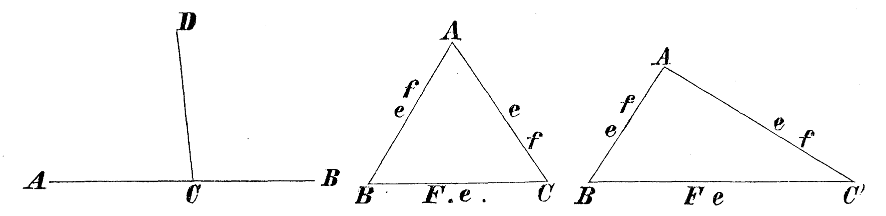
*) amplectitur?

**) fallorem?

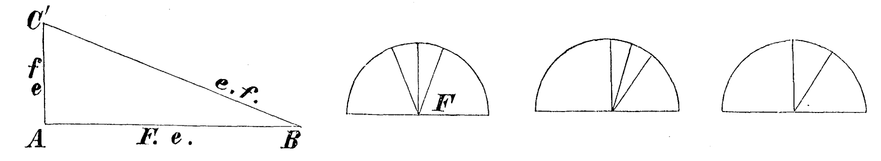
runt interius ac exterius dici nisi aliquid intelligatur interius aut exterius.

Siquidem hi tali utentes figura rectum angulum ita collocant ut sit intra hebetem et extra acutum. Ad quem hebetem referentes exteriorem appellant uidelicet quod magis a recto extra acutum inueniatur atque ad eundum acutum cooperantes interiores iudicant quod inter hebetem magis contineatur a recto. Sed his magnis est hic error nihilque aliud fuit quod impedisset eos qui conati sunt approbare triangulum ut interiores angulos equos haberet duobus rectis. Siquidem si bene comprehensum fuisset quod interior angulus accipi debet nihil esset reliquum quod eis posset abstare. Quare sciendum est omnem angulum exteriorem et interiorem iuste uocari prout se habebit circa propriam figuram aut extra aut intra et exteriorem dici ad compositionem eius qui fuit intra ipsam figuram interiorem ad illum qui extra positus fuit referri quomodo ulterior gallia exemplum eius compositionis quod ultra sit uel citerior gallia ulterior nuncupatur et ulterior



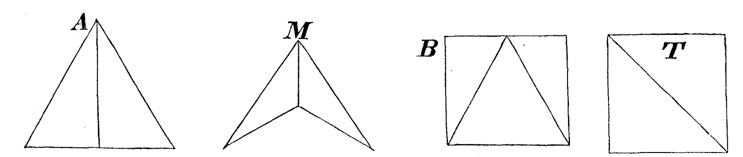


hispania ad hispaniam dicitur citeriorem. Igitur de his angulis et lineis ipsorum intra eos qui curam habent geometrice discipline difficillime questiones uersari solent qui anguli quibus angulis componentur (unum?) et hic nata questio cuius nunc querimus rationem. quam nos sepe tractatum nondum perfecte solutioni apertiori reseruatum in presenti loco ne patiamur. Nam demonstrata in diuersis angulis equalitate spatiorum probabile erit eandem equalitatem repperiri in figuris licet inter se qualitate



sceme diuersis. Sit ergo propositum ut III. interiores angulos equos ostendamus duobus rectis. Describo in primis duos rectos hoc modo iacente in plano AB linea recta . . aliam rectam id est c. d. lineam supra inpono d. puncto ab A et B punctis equaliter distante. Sunt igitur recti duo.

requiro num quilibet III. interiores sint diffinite trianguli forme. III interiores angulos propositos teneo hos angulo II. per se constituto siue circa triangulos quos*) anguli sint requiro itaque triangulum equilaterum constituo cuius anguli sint *a. e. f. b. e. f. c. e. f.* hos compono II. *Γ.*(?) rectis et equale spacium inuenio. Idem accidit si quidem in ortogonis eiusdem rei gratia nichil diuisum proueniet. Et postremo cum VI**) existant triangulorum genera nullum esse poterit cuius anguli huic comparationi dissentiant. sicut harum descriptionum probatur exemplis. Et hic interiorum angulorum consensus ad rectos. Exteriores *c.*(?) uerum supra equalitatis modum longe exuberant. In hac uero demonstratione dominus Wazo



ascribit figuram hanc *M.* Magister adeloxanus hanc *B.* Ratechitius hanc uidelicet *T.* Et preter hos alius quidam hanc *A.* et alii alias. Scilicet nos potius animum proposito operi commodemus.

Igitur quadratura circuli reductio quadrati uidetur esse ipsius circuli in quadratum et adequatio figure ad se inuicem utriusque. hanc quadraturam ita constituunt ut a puncto in octo diuidant portiones desumptaque portione octaua latera quadrati ducant. Sunt qui rursus diametrum a medietate quadrati partiant. reiecta quatuor angulos statuant quadrati. Preterea existunt qui ambitum circuli in quatuor distrahunt partes ex quibus quadratum struunt quas aiunt illi circulo equales. Sed hi omnes a ueritate longe absunt eo quod ubi equalitas inuestiganda sit non attendunt. Nam quicumque demonstrare uoluit formarum quarumlibet equalitatem. Hunc primo aduertire oportet ubi illa uisetur equalitas. Omnium enim figurarum equalium alie solo numero coequantur alie spatio tantum alie utroque. Ergo cum sint figure circulus et quadratum necesse est aut primo aut ultimo aut medio modo equalitatis comparatione. sed numero solo, nequeunt equari. Nam quicumque solius numeri seruant equalitatem ut triginta sex triangulos ideoque tetragonum in illis areas numquam eiusdem repperient quantitatis. Si equales sunt aree quadrati et circuli. Non igitur equatur numero solo. Neque uero numero et spacio has quisquam formulas probabit equales. Hoc autem ita probo. Quecumque et equalitatis hunc retinent modum in his communis numerus secundum regulam utriusque

*) quales?
**) Wohl III.

figure potest inueniri ut in his quadratum una quatuor in hoc latere in illo nouem. altera uero in omni latere sex gestat. In his uidelicet et quatuor per nouenos et sex per sex multiplicatis tringinta sex inuenitur qui utriusque figure communis est numerus. Sed in quadratum et circulum non cadit ut uidelicet communis numerus propria inueniatur regula utriusque. Quam propositionem etiam probamus hoc modo. Est uidelicet communis numerus tantum circuli quantum quadrati equale circulo CLIIII. Hic autem facile est inuenire iuxta regulam circuli quantitatis. Triplicata diametro adiectaque septimam(?) diametri fit numerus qui circulus sine circuli ambitus appellatur. Cuius medietate in medietatem diametri ducta prouenit numerus qui pro ipso circulo reputatur. Est autem diametrum CLIIII. circuli XIIII qua triplicata et omnibus que regula docet deinceps obseruatis CLIIII circulum secundum rationem circuli repperimus. Sed eundem secundum quadrati rationem nullo modo possumus inuenire. Est enim ratio quadrati ut ex qualibet summa in se ipsa multiplicata acrescat. Hoc autem modo CLIIII non creatur. Nam si ab aliqua summa in semet ducta procrearetur id profecto fieret vel: a XII vel a XIII. Sed XII: si duodecies sumantur X numeri CXLIIII inuenies. Quod si XIII. XV amplius habebis. Non igitur CLIIII cum sit communis numerus et circuli et quadrati propria colligitur utriusque ratione. Quare si in omnibus figuris quicumque spacio et numero sint equales communis numerus propria utriusque regula colligitur CLIII uero communis numerus circuli et quadrati propria utriusque nec concrescit assero nec esse equales spacio et numero quadratum et circulum. Adhuc aliud argumentum pono. Si circulus et quadratum in spacio et numero equalitatem reciperent facile ac sponte alterum in alterius formam transiret. Hoc enim in omnibus aliis peruidetur. quecumque numeri et spacii retinent equalitatem. Exemplum aliquid dare placet. Sit item figura in hoc latere IIII. pedum in illo IX cui superponatur altera illa profecto que ex omni latere senario metitur. Dico in his figuris palam esse qualiter una in alteram transformetur. Quod ea de causa putamus contingere quod nec solo numero nec solo spacio comparationem habent equalitatis. Quod idem ipsum profecto in circulo et quadrato accideret si in eodem modo inter se comparabiles existerent. Sed neque circulus in quadratum neque rursus quadratum in circulum nisi cum summa difficultate quam deo prestante tradituri primo dum sumus neuter unquam in neutrum transire possit. Causam uero quare non possint eam quamquam posterius si diuinitus permiserit monstrare conabor. Hinc igitur concludendum quibus ita se habentibus num recte utroque(?) judicentur equales quadrata forma et circularis. Adhuc aliud. Si essent sepe dicte figure juxta numerum et spacium equales numerus communis ut puta CLIIII. non

solum circulus sed et quadratum esset. Sed non est quadratum CLIIII. hoc ita probo. Omnis tetragonus sic est.*) . . . .
arithmeticorum regula docet ex imparium coaceruatione generatur. At uero CLIIII coaceruatis super se ipsos ab uno quosque uelis imparibus nusquam occurrit. Non igitur CLIIII quadratum. Eadem lex alios quoque circulares numeros includit. neque unquam poterit numerus repperiri quicumque circuli proprietate nitatur quadrati quoque ratione participet. Sed fieri poterit ut aliquis dicat CLIIII et si minime numero minuciis tamen quadrari posse. Quare procuraui inuestigare et hoc. Ergo quamvis contrarium naturam videatur ut CLIIII in quadraturam redigatur. incipiamus tamen ipsique nature iura inferentes ad untias quoque animum vertamur an forte illis appositis numero, totaque illa summa per eundem numerum et per ipsas uncias dimensa CLIIII tetragonare ualeamus. Et quare hic ipse numerus si ab aliqua summa in se ducta crearetur id a XII vel a XIII ut supra dictum fieri oporteret. XII in primis assumatur. huic autem adjiciatur triens aut quincunx. Sed quincunx exuberat. Nam XII in se et XII quincunx postremo quincunx in quincuncem supra CLIIII sextantem q. dimidiam sextulam apponunt. Triens autem minus reddit eisdem CLIIII. Namque (XII) et XII triens item XII triens ad extremum triens in trientem CLII acrescente uncia et duella accumulant quibus adhuc desunt ad perficionem CLIIII. assis dextans**) et II duelle.[1]) Quamobrem quincunce exuberante triente vero ab integritate plenitudinis refugiente nonne dementie est et illo minore et illo summe potiore? Illud tamen adhuc fieri potest ut eisdem XII et trienti minutias apponamus diligentius investigantes ante si et per qualem multiplicationem ad eam quam querimus summam pertingamus. Erunt autem hec minutie que apponantur. Semuncia sicilicum sextula.[2]) Quippe alie aut plus componunt aut multo minus. He autem sole ad ipsos CLIIII tam proxime accedunt ut exceptis partibus unius oboli tercia. IIII. IX. nihil excrescat, nichil excedat nichil exuberet. Quod apertius ostendi ualet abaco quod stilo computando potius (potius) quam disputando. Neque id quicumque proficiet si quis minutias confingat a numero denominatas quomodo solent calculatores ad minutissimum aliquid quod iam nomine careat diuisione perducta. Quis autem nesciat quantam partem aut scipuli

*) Fehlt der Rest der Zeile.

**) sextans?

1) $$\left(12+\frac{5}{12}\right)^2 = 154+\frac{1}{6}+\frac{1}{144}$$
$$\left(12+\frac{4}{12}\right)^2 = 152+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}.$$

2) d. i. $\frac{1}{24}$; $\frac{1}{48}$; $\frac{1}{72}$.

aut obuli aut ceratis aut nouissimi calculi assumat. nonne frustra pro hac equalitatis propositione operam insinuet. Et certet quota pars accipienda sit quomodo poterit nosse disciplina? Omnis autem tetragonus quotum ab unitate locum obtinet in ordine tetragonorum totam ad sui multiplicationem expostulat summam. Hac arte cujuslibet quadrati longissime et ultra mille milia positi tetragonicum latus facile et cito peruestigamus. Quod in CLIIII et alio quolibet circulari numero cum ipsi minime tetragoni sunt quis ualeat inuenire? Nimirum inter tetragonicum latus ipsosque tetragonos hoc quasi pactio firmata: ut (tamen?) latus nisi ex loco et ordine ipsorum nequeat deprehendi quod ipsi per multiplicationem creari non possunt propter lateris libratam dimensionem. Sed quomodo rursus nichil addere potitur ut CLIIII in quadratum prouehatur ita etiam XIII numero nihil auferre ut idem quadratum equalibus ex omni parte lateribus construatur. Quamobrem non opportet ulterius cum ipsa concertare natura quod nulla uisa suo statu inflectere ualet. Et his demonstratum sit CLIIII quadrari non posse quod minime mirabimus si ad alios numeros quicumque naturaliter quadrati nostram considerationem uertamus. Nam nullus eorum in quadraturam reduci neque integris terminis in se multiplicatis neque si untias vel minutias adjiciamus. quod mox in nostro libello monstrabimus.

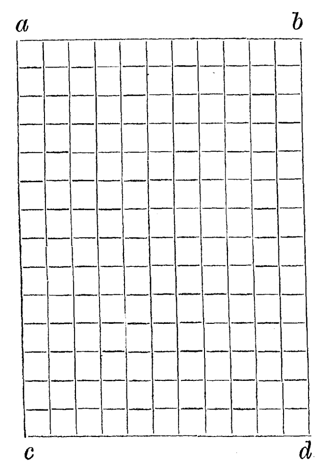
Prologus secundi libri.

Et si nullus omnium quantalibet sit felicitate prestantior haut vereor tamen mi cesar dedecoret hoc ueluti quoddam diadema quod tuo capiti fabricare molimus. (?) Sed quantum nobilis materia in tantum artifex sapiens esset. Verum propendas opporteret quoniam aurum non tantum ex arte placet. quam ex propria virtute. neque ita preciosum celatura quantum naturale prestantia judicatur. Sed forte aliquis dicit geometricalis scientie curam a societate presulari alienam existere. Nimirum qui ita putauerunt. In minime recolunt scientiam moysen quem maxime hujus discipline habuisse peritiam. Hi per mensuram diluui arcana egyptiis cubitis ne quaquam retractant. Ipsique reputant omnem terram repromissionis (?) funiculis geometricabilibus distributam. Adhuc salemonem tum ipsum templum tum portionem tum atrium templi postremo quicquid ad templum respiciet conuenientibus ordinasse misuris. Preterea ap. ezechielem uirum cuius erat species quasi species artis totum edificium illud ciuitatis multaque in eo preterea numero linea misurali calamoque designasse. Quod si ita est que religio sit et sacerdotes diutius a tanto studio prohibere? nonne ezechiel sacerdos? Nonne uir ille cuius species erit ipse x p c. summus et maximus sacerdos. Sed que jam supra distulimus ingrediamur ostendere.

Prologus explicit. incipit liber II.

Omnium numerorum alii sponte et naturaliter tetragoni alii minime cuicunque gnaro natura tetragonorum teneantur: Nos si quis quadrare uoluerit nulla difficultas impediret ut si forte in quadrati figuram disponere uelit siue quaternarii summam siue nouenarii siue quorumlibet reliquorum. naturali tetragonorum ordine subsequentium. Sin autem ceterorum aliquem qui ab natura tetragonorum separantur in eorum formam reducere contendas id quantum ad se ipsos nullum unquam consequeris effectum. Verum tamen circa superficies spatiorum idem fieri possibile: Nihil enim prohibet ejusmodi spatia inueniri quadrati formam habentia: quod aliud duobus pedibus constet aliud trium in se misuram retineat. aliud quinis aliud senis aliud septenis vel octonis vel et pluribus ultra pedibus teneatur. Itaque in hunc modum omnes minorum quantitates circa subiectas corporum materias quo minus debeant quadrari nullatenus recusant. Ceteris in se ipsis et seorsum extra considerationem mensurabilium spatiorum sola animi speculationem perceptis uacuum quisque consumet laborem si eosdem numeros redigere curet ad quadratorum rationem. Potest tamen compositis ex adjectione minutiarum equis lateribus ad eorum summam proxime accedi ut parum inuenias aut deesse aut ad perfectionem et integritatem supra habundare. Et aliis quidem ut certe binario latera creantur ex uno et triente semiuntia. duella dimidia sextula. IIII a binario paulo minus conficitur vel item ex uno et quincunce numerus paulo amplius eodem binario acrescit. aliis autem alie unciarum aut sole aut cum minutiis pro tetragonicis et ex quatis (?) lateribus constituuntur ut quisque calculandi peritus per semet ipsum intelligere ualet. In quibus omnibus ut dictum perfecta integritas numquam inuestigare poterit. sed id incu (?) semper addito ut licet parum tamen aliquid aut superabundet aut desit. Nichil igitur mirum si circularis numerus ut puta CLIIII et quilibet ejusdem generis quadrari non potest quando quidem et aliorum omnium nullus potest preter naturales tetragonos. De qua re ea de causa longius traximus disputationem quia sunt nonnulli qui putant quadraturam circuli in numero per minutias constitui posse. Scio Werenboldum hac opinione inductum XXXVIII senariis ideo aream XXII (?) circuli in quadratum ut supra uisum est redegisse multiplicata in se senarii summa et adjectis minutiis que sibi uise sunt ad rem pertinere. Quem hoc quidem fefellit quod per senarium tum senario multiplicato tum et minutiis ipsas tandem minutias sicut possit quadratum fieri opportet in sese multiplicare neglexit. Sed ut ad proposita reuertamus cum CLIIII aliique circulares quadrari non possint manifestum, non esse equales in computatione numeri et spacii quadratum et circulum. Restat ergo aut

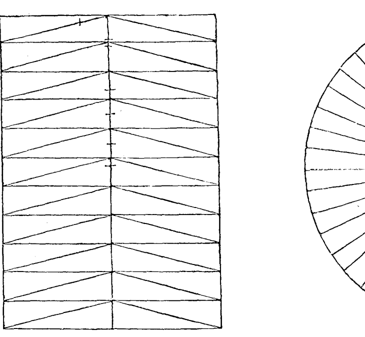
solo spatio comparationem habere aut prorsus equari non posse. Sed quis hoc dicat cum nulla sit figura que alteri per equalitatem conferri non possit? Quare ut etiam iste equandi facultatem non habeant stultum arbitrari. Restat ergo ut hanc exceptionem in spatio solo queramus. Nam supra diuersis conclusionibus extortum: ne ulterius vel in numero solo requiratur vel in utroque. Sed omnium figurarum que solo spatio sunt equales alie per se demonstrari possunt alie non per se sed per alias probantur equales. Per se monstrari dico quod ipse in equales suas absque medie alicuius interpositione resoluuntur. Per se non posse dico quod nisi per medias resolutionem non capiunt. De hac resolutione propterea tractabimus. Id prorsus uero sciendum quod in hac parte quadratum in comparationem circuli ponimus. quod non per se ad equalitatem reduci possit. Semper enim media quaedam figura opus est ut uel circulus in quadratum uel quadratum reducatur in circulum. Hinc autem figura una nascatur in hoc libello monstrare propono. Nascitur sane ex ipso circulo vel per diametrum ejus vel per resolutionem inuenitur. Sit igitur a quolibet imperatum ut sibi quadratum producatur aequale scilicet a. b. c. a. circulo. Quem cum dederit diligenter attendo possitne statui a principio equale a circulo quadratum produci? Video non posse sicut in priore libello satis est approbatum. Nondum tamen desisto utor illo terentii consilio quod hac via non processit: aliam aggredior et rursus perquiro. num saltem valeat. aliquid spatium IIII latere approposito circulo procurari ut vel per illud ad inuentionem quadrati proaccedam quod ipse circulus nullius modi per se aditum aperiebat: Et hac uire. Nam omnis quadrata figura quadrato proxima et quasi consanguinea existit cum presertim eodem modo rectis nitatur angulis. Quare nihil mirum si per illam ad hanc familiaritatem accedi potest. Hujusmodi autem figura facillima est inuentu. Denique propositi circuli diametrum in partes XIIII diuido deinde quadrilateram figuram constituo hac nimirum ratione ut per duo latera diametrum totam item per alia duo latera XI. ejusdem circuli prorsus equales spatii quantitate dumtaxat. Haec igitur figura *abcd* litteris per IIII. angulos designata in hunc modum describatur ut a lateribus ad latera partium sursum et per longum pro numero partium diametri et XI et XIIII linee ducantur quatenus ipso intuitu manifestum sit quomodo in tota figura partes includantur. habeo CLIIII ad hoc modum. Dico igitur quadrilaterum ex appositi circuli diametro pro-

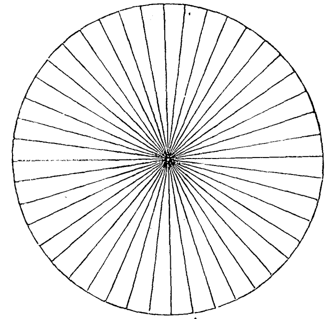


ductum esse. Undecies autem XIIII CLIIII fiunt eadem videlicet summa qua area circularis includitur. Sed hic aliquis fortassis obuiet. Quis umquam scire potuit quantum area circuli comprehendat ac per hoc quis ualet scire quid circulo vel sit, vel non sit equale? Cujus enim nescias propriam quantitatem quid extra valeas existimare ad ipsius equalitatem? His ita obiectis quibus obnitar rationes desunt. Peritia inquam geometrice discipline de inueniendo circuli embado ejusmodi regulam describit ut medietas diametri in medietatem circuitus debeat protendi. Quare cum hujus circuli diametros XIIII circuitus autem XLIIII. horum autem dimidium VII et XXII existat non potest incertum esse habere circulum CLIIII. Si quidem hanc summam conficit VII et XXII multiplicatio. Quibus ita se habentibus verissime dictum illud equilaterum esse circulo equale quod ex tota diametro et ejus XI partibus constat esse productum Ob hoc nimirum quod quantum VII. XXII tantundem conficiunt undecies. XIIII. Sed adhuc instabit et his contradictionum ualidis impugnabit telis. Nulla est auctoritas regule nisi quod ipsa docet. ita se in rebus habere aut animo perspiciatur aut sensu teneatur. Alio, quidem fidem praestare non opportet. Num soli regule credatur? Nonne omnis regula ex subjectis rebus accepta et proscripta est? Certe de quadrilatero cum per II latera undenario metiatur in aliis uero duobus. XIIII gerat quia ut dictum est in se multiplicati CLIIII reddit non est dubium quin in tota aree sue latitudine CLIIII nec plus nec minus comprehendat. Quod et in superiore figura promptum est peruidere. Sed in circulo cui id ipsum copia est perspicere a quo potest circulus aliquando simili modo veluti quadrilateri in CLIIII partes aequaliter distribui ut hoc nobis uidere liceat et sic tandem fidem adhibere. Numquid nos in rebus uisibilibus credere opportet quod nequaquam oculis uideri potest. An negat quisquam figuras geometricas uisibiles esse cum omnes circino aut regule ad dimensionem subjaceant. Ergo CLIIII inesse spatio circulari (aut) uisibili argumento cum nimirum res ipsa uisibiliter existat. probandum est autem non credendum. Sed probari non potest circumferentis linee prohibente natura. Igitur ne et credi opportet. Validissime sunt hujus modi objectiones. Quid ergo dicemus? Faciendum ergo quod exigimus et uisibili ut ita dicam argumento utendum. Verisimillimum ego quidem puto cum studiosi geometrice discipline diuturna dubitatione turbarent quid existimare de quantitate circularis embadi deberent neque sicut areas angulis rectis inclusas ita quoque comprehensionem circuli manifeste deprehendere potuissent ullo mensurarum genere neque unciis neque pedibus neque aliis quibuslibet quibus omnis dimensio siue in longum siue in latum siue et in altum proficiscitur quibus porticus quibus miliaria quibus stadiorum longitudo quibus agrorum, fluviorumque latitudo quibus parietum montiumque altitudo

comparatur. cumque nullatenus pateretur circumferentis ambitus curuatura huiusce diuisionis rationem ipsi· autem nihilominus citissime rescire uellent cuius estimationis esset planicies circularis animadvertunt quod linea ejus et si curua ac circumferens esset equaliter tamen undique: uersus a puncto medietatis distaret. quo deprehenso res etenim manifesta est diuisere totum circuitum in quot eis uisum partes ut pote in IIII et XL quasi toti deinde punctis designauere. Et a punctis ad medium tocius circuli punctum lineas duxerunt adhibitoque sectionis labore XLIIII pertulere partes quarum unaquaeque VII mensuras id est medietatem diametri in longitudinem habebat. per latum uero XIIII inueniebatur ejusdem diametri. Nec mora partes partibus adjungentes acumen latitudini obuerterunt. Quo facto inuente sunt undene et undene sibi universe congruentes facteque sunt due formule ex XLIIII quarum utraque XXII illarum XLIIII id est medietate circuli constabat habens VII in uno latere XI uero in latero*). Quibus sibi e omnibus copulatis quo plurimum posset latitudini respondens longitudo egressa est forma binis lateribus undenas binis autem XIIII gerens unitates. Quorum exemplo uti res manifestior fiat datum circulum in IIII partes diuido ductis diametris altera ab a. in s. altera a t. in a.[1]) Quo facto singulas circuli quartas per XI distribuo sicut haec figura demonstrat.[2])

Facta autem resolutione XI partes. XI partibus intermiscendo compono





versis aliarum extremitatibus ad capita aliarum secundum hujus descriptionis exemplum. Hoc modo resoluto circulo et partibus ejus hac arte dispositis inde producta est quadrilatera figura. Que profecto ducit XI in latitudine

*) l. in altero.

1) Die Buchstaben fehlen in der Figur des Manuscripts.

2) Die Figur des Rechteckes bedarf keiner Erläuterung. Von den 42 Dreiecken, in welche der Kreis getheilt ist, werden je 2 diagonal gegenübergelegt, so dass sie ein Rechteck bilden, was freilich nur annähernd richtig. Das gesammte Rechteck besteht somit aus denselben 42 Dreiecken wie der Kreis, nur in anderer Weise geordnet.

in longitudine uero XIIII gerat(?) que in se multiplicate CLIIII componunt manifeste ostendit quantum inter se spatii circularis ambitus comprehendat. Veruntamen nulli potest dubium esse quin ex hac resolutione subtiles geometre regulas illas collegerint quas percipiunt ad inueniendam aream circuli aut diametri medietate medietatem circuitus utendi aut totam diametrum quarta parte circuitus, aut totum circuitum diametri quarta aut quolibet alio modo ad idem ipsum proficiente. Quam regulam idcirco compendii causa inuentum putamus ut non semper necesse esset circulum resolutione quotiens uellemus arealem ejus quantitatem scientia tenere cum presertim circa ea subjecta sepe considerandum scirent que nullatenus resolutionem paterentur. Nec enim nisi in membranis et pelliculis et si quidem sunt ejusmodi exercitium commode non ualet. quibus igitur objectionibus supra memoratis satisfactum arbitramus simulque demonstratur qualiter illa media figura per quam circulo quadratum equalis(?) esse probatur ex ipso circulo et per diametrum ejus vel per resolutionem signatur. Iam igitur hujus scientie quasi fundamento quodam firmati consequuntur certis incerta et notis ignota perquiremus. Ac deinceps quemadmodum ex eodem quadrilatero in quod circulum resoluimus quadrati species promoueatur curabimus intimare. Hoc autem faciemus si prius confrugosa oratio alicujus proemii interpositionem lenigetur.

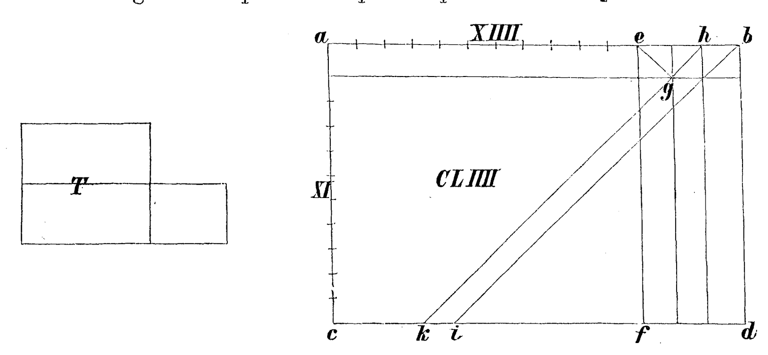
Prologus tertii libri.

Si tu is esses presul eximie cujus sue laudes animum delectarent et pascerent nulla facundia satis esset his quantum de te ipso tum de auis de proauis. deque uniuersis majoribus tuis non modo romanorum sed graiorum quoque principum illustrissimis de horum nobilitate de dignitate de gratia de potencia de copiis de amplitudine rerum de preclarissimis factis de uirtute de sapientia de meritis eorum jactari ualerent. Virgilius cupiens a parentibus magnificare augustum eneida XII libris conscripsit. Quanto pluribus quis esset si quisque uellet colligere quod primus quod secundus quodque tercius gessit octonum quorum primus ab henrico patre suo suscepit regnum. sed filio reliquit imperatori IIII. pater ap. theutones primus regnauit filius ap. ipsos primus imparauit. Et quibus nisi illis germania debet quod sibi cum tanto orbe ipsa esoluit tributum italia? Per quos alios nostri imperatores romani sceptri facti sunt successores? Vellem mi diceres o maro. Quid tale contulit nostro latio ille tuus ille primus ille magnus ille diuonatus eneas? Ignosce auguste quanto sit infra tuum genus piis et preclaris octonibus comparatum. Sed esto fuerit tale eneas ille quid tua refert? Tu enim eneam ut X millesimus attingas nepos. Putasne igitur octonum nepos si qualem tu uirgilium haberet qui eum

extolleret a laude parentum. putasne tuam famam quanta gloria obfuscaret? Ita quidem ut pote qui non millesima sed prima tamen preclari sanguinis proles existat. Verum hec uniuersa scientes ac religiose pontifex prudentes aspernaris sicut omnia in te pie humilitatis signa et opera attestantur bene memor quod neque nobiles neque sapientes sed ignobilia et contemptibilia mundi elegit deus. Quare cantus sui ita scribendo nequaquam attingere quod animum cupidum laudis insanum reddent tuis uero auribus suis fauoribus merito infestis offensionem incuterent. Itaque uerti stilum ad ea potius dictanda que sensum instruerent. ingenium acuerent sollertiam excitarent. haud ignorans in tantum tibi placet rationabilium studiorum utilitatem quantum minime de diligentia uales inanis gratie. ac uentose iactantie odiosam uanitatem..

Explicit prologus, incipit liber tercius.

Superiori libello qualiter a circulo quadrilateri species exiret ostendimus neque autem ex eo opus quidem difficile et laboriosum nec minus ipsa circuli quadratura intemptatum et*) in quo nisi geometrice subleuemus auxiliis necessario arbitrer deficiendum. Quis enim adhuc quadrandi tradidit rationem? Et quare ab omnibus partita nisi propter difficultatem ejus circuli iniunctam? Quam ob causam non paruis in hoc loco augustiis torquemur. et quocumque transire temptamus ueluti clauso



repellimur limine. Si enim illud quo longitudo latitudinem superat diuidamus dimidium uero relinquimus longitudini nne.(?) uelud angulari subducto trunca quedam nascitur figura. hoc siquidem in apposita peruidetur descriptione.

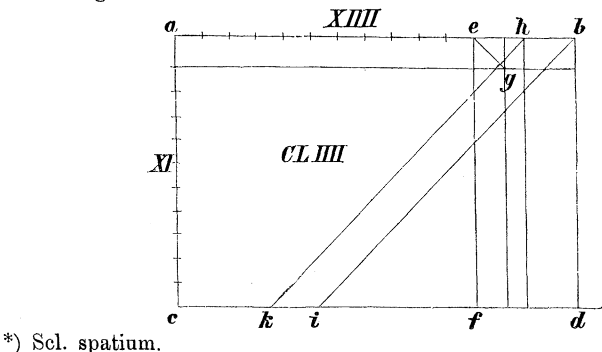
Quod si per obliquum sumere uelimus ejusdem spatii quantitatem quo temperamento fiet quatenus ne infra sit nec modum excedat? Puto manifestam esse dificultatem. Nec ut a nobis potest demonstratio detur breuissima. Quadrilateri latus scilicet *ab* diminuatur in partibus ad *e* signum. similiter *c d* latus ad signum *f* totidem partibus sit precisum. Igitur spa-

*) l. est.

tium inter *ef* et *bd* lineas diuidi opportet. quod fiet hac arte. Ducetur[1]) angularis ab *e* usque *g* ad cuius mensuram inter ipsum *e* et *b* affigetur *h* punctum sumptaque distancia eiusdem *h* ab *a* secundum ipsam *h k* et *b i* linee fiant. Quo facto si spatium quod includitur de medio subtrahatur figureque ad latitudinem apponatur dico ex quadrilatero productum esse quadratum.[2]) Et hoc modo illud quod ex circulo procedit in quadraturam redigitur. Ad finem uero arrepte disputationis in omni quadrilaterum uniuersalem quadrandi dabimus rationem. Hoc autem nomine appello quicquid excepto quadrato IIII latera et totidem rectos habet angulos. Sed hanc quo modo produximus quadrati figuram equalem asserimus circulo. Nam si quadrilatero nimirum equatur cuius uidelicet numerus processit equalis equalem circulo quis neget quin quadrilatero existat equale*) utrique spatio. Sed quadrilatero nimirum equalis cuius uidelicet nulla pars relicta sit exterior. Haut dubium igitur quin et circulo omnibus modis quantitate conferatur equali. Verum equatur utrique spatio solo non et numero. Non autem hoc dico — — — siquidem numerus omnibus his insit figuris cum ut prima et secunda sic et tercia. CLIIII pedibus constent

1) Die Figur des Textes, wie hierüber verzeichnet, ist mit dem Wortlaut unvereinbar, wonach $eg = eh$ sein soll, wie es die folgende Figur anzeigt. Ebenso soll $hk = ah$ sein, was nach der Fig. des Textes ebenfalls nicht zutrifft.

2) Das angegebene Verfahren besteht darin, die Diagonale eg des Quadrats, dessen Seite $= 1$ zu construiren und ihre Länge an die Seite $ae = ac = 11$ anzutragen. Dann soll die Summe beider d. h. $11 + \sqrt{2}$ die Seite des Quadrats sein, das mit dem Rechteck 154 gleichen Flächeninhalt hat. Der Beweis wird nur angedeutet: das Rechteck hd ist zunächst gleich einem Vierseit von gleicher Grundlinie und Höhe: nämlich hi, dessen Seite $hk = bi = ah$ oder der Seite des gesuchten Quadrats gemacht wird. Hieraus würde folgen, dass die Höhe dieses Vierseits hi von der Grundlinie $11 + \sqrt{2}$ gleich $\sqrt{2}$ sein müsste, denn die Fläche hi muss gleich dem an ah anzutragenden Rechteck sein, welches ch zum Quadrat vervollständigt. Dass dies jedoch nur angenähert der Fall ist, erkennt man ohne Schwierigkeit. Später wird übrigens gezeigt, dass der Flächeninhalt wirklich nahezu 154 ergiebt.



*) Scl. spatium.

uel assibus. Nec tamen quadratum numero equale dicimus quod numerus iste non ita recipere potest equalem multiplicationem laterum sicut circuli siue quadrilateri proprietate constitui. Sed rursus hic aliquis dicet: in minutiis hoc fieri posse. Licet dudum probauerim placet tamen adversus hanc opinionem aliam hoc in loco introducere argumenti rationem. Dico enim si quadrata equilatera constituuntur in minutiis nichil omnino et in numero equalia constitui. Nam quicquid multiplicant minucie idem numero quoque multiplicatur integro. Sit autem exemplo quadratis minutiarum cuius sint latera unitas et semis eo quod omnibus iste uideatur apertior. Hic uero tali constituitur modo. Multiplico 1 in se nascitur unum. Deinde semissem per eandem unitatem. His propositis II latera duco Rursus mihi prouenit unum. Quo iuncto superiori habeo II. Deinde semissem in se ipsum duco egreditur quadrans. Qui appositus II quadratum efficit. supradictum continentem in tota superficie sua. quadrantes IX. Similiter IX invenio non iam quadrantes sed asses. Si unitatem. semissem quod erat latus huius quadrati dupplicauero que dupplicatio III producit. Qui in se ductus nouenarium generat quadratum nihil a superiore in eo uidelicet quod IX partibus constat differentem.[1]) Ad hunc modum et quadratum circuli si minutiis constaret integro reperiri posse arbitramur. Sed ut manifestum est impossibile in integris eum reperire. Ne igitur requiras in minutiis nisi frustra fatigari malueris et inutili labore consumi. Adhuc aliud dicam. Si sint duo numeri alterum cum minutiis absque minutiis alterum, ille autem cum multiplicetur in se alterum uero ratione que in circulo seruatur accrescat: quam comparationem ad se habuerint summule in hunc modum producte fuerint utroque multiplicando secundum eandem proportionem intregro sumpto. Sit ergo numerus cum minutia VI. *g.* Item sit absque minutia VII. Rursus sint alteri duo uterque integer eadem proportione seruata id est XIII*) et XIIII. Assero ergo XIII*) in se XIIII uero iuxta regulam circuli ducto quo modo nascuntur numeri eandem inter se comparationem seruare quam et illi habent quorum alter a VI a VII utroque iuxta suam rationem multiplicato concrescunt.[2]) At uero nullos

---

1) $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1+1+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$

*) l. XII.

2) $14 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{14}{4} = 154$

$12 \cdot 12 = 144$

$7 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{77}{2}$

$6 \cdot 6 = 36$

reperimus integros numeros qui ad inuicem conseruent comparationem circuli et equaliter sibimet quadrati. Quid igitur in minutiis requirere labores quod numquam sunt inuenire natura? Sed et si ratione calculandi abacique peritia subtilissima illic reperire conuincetur quid hoc mensoribus et studio geometricali conferret? Quis enim redigeret sub mensuram tum obulum tum ceratem. tum calculum et harum particulas infinitas? Quod nos quidem ita impossibile rati sumus ut facilius concedamus quadraturam per minutias circulo equari quam easdem minutias sub dimensionem uenire posse. Iure igitur circa has illas querere recusans artem potius geometricam qua meciendo componi possit peruestigare curaui. Neque hoc temere proprioque arbitrio ac propter exemplum fecisse me sapiens quisque redarguat qui sciat geometras in multis mensura tam contemptos esse neque se inquisitione numerorum occupare ut puta cum interiores tres anguli duobus rectis componantur. aliaque permulta que longum esset enumerare.

Quis hanc equalitatem in numero hac non potius in spatio et mensura estimet requirendam? Neque hoc in equalibus dumtaxat faciendum uerum in duplis in triplis in quincuplis et in his que sexcuplam uel septuplam uel octuplam habent comparationem ut nulla earum in minutiis aut in numero requiratur magnopere seruandum. Dicet aliquis quomodo probas duplum e minutiis simplici quadrato non conferri? Superiore quidem ratione hoc quoque probo. Nam in qua comparatione erunt duo numeri quorum alter ex integro alter uero productus ex eo latere quod minutie componunt. eadem seruabitur in illis quoque summularum quarum latera omnino sunt integra sic tamen ut unum habeant proportionem ut si sint duo numeri IIII et V. Quorum alterius latus duo(?) alterius quinque. Item et duo numeri(?) XVI et XXV alterum IIII alterum V iuxta proportionem superiorum laterum id est duorum item duorum.(?) Sed ipsi quoque latera habentes dico in qua proportione reperiuntur IIII et V quadrans in eadem proportione et XVI et XXV reperire.[1]) Atque enim minorem in se habent minorisque medietatem et ipsius medietatis octauam.[2]) Ad hunc modum itaque si comparatio dupli et simplicis quadrati in minutiis

---

$154 : 144 \quad = \frac{77}{2} : 36.$

1) $4 : 6\frac{1}{4} = 16 : 25$ d. h. das Verhältniss der ganzen Quadrate überträgt sich auch auf ihre kleinsten Theile, wenn beide Quadrate in dieselbe Anzahl Elemente zerlegt werden. Besteht also zwischen den ganzen Quadraten kein rationales Verhältniss, so besteht ein solches auch nicht zwischen den Summen ihrer Elemente.

2) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{25}{16}$ d. h. es kommt bei jeder Zerlegung stets wieder das ursprüngliche Verhältniss heraus.

constaret nihilominus intregris terminis eandem facile esset inuenire. Sed quis in minutiis deprehendit dupli et simplicis quadrati comparationem? Nam simplo habente latus quod numero sit dimensum numquam in latere quoque dupli numerum inuenies ut si quaternarium cum sit quadratum duo habeat in latere quo numero dupli ejus latus notabitur?[1]) Quod si in latere dupli secundum integrum numerum facta est diuisio tum nimirum latera simplicis iuxta numerum impossibile est metiri ut puta XVI duplicis quadrati uel octo quaternario metimur[2]) latus. Quomodo putas latera simplicius partiemus? Quare cum omnis comparatio que ex minutiis creatur in integris et numeris existat cumque dupli relatio ad simplicem quadratum (in numeris illis)*) unquam**) numeris sit recepta hinc audaciam arripimus: Hoc demum concludendi quod ne per minutias quidem latera illorum ualeant comparari quamquam doctissimus uir Reginboldus asserat illatere dupli quincuncem et latus simplicis contineri.[3]) Quod et ipse et cum Gerberto noster racechinus fatetur. Hoc autem aliter in re esse tali probamus argumentacione. Omne latus dupli eiusdem mensure est cuius et diagonium simplicis quadrati. Omnis autem linea triagonis diagoni tantum solum modo maior esse libet laterali linea[4]) ut dico exemplum illa equaliter duplum efficiet quadratum cui nihil desit nihilque accedat. Hoc cum omnes geometrice discipline peritissimi attestentur tum et uisibili argumento si quis artem meciendi non nesciat. ita rem esse facillime comprobabit. Quod cum ita se habeat sumatur exempli gratia XXV quadratus. is retinet latus V de quo proficiamus diagonum eiusdem lateris quincunce sibimet adjecto. Est autem in V assibus duo asses untia proportio quincuncis. Hanc ipse quinarius recipiat erunt ergo VII untia.[5]) Hoc igitur

---

1) Wäre $2a^2 = b^2$, so wäre auch

$$(2a)^2 = 2b^2,$$

d. h. es müsste sowohl b^2 wie $2b^2$ ein Quadrat sein. Welches wäre dann die Seite des letzteren?

2) $2 \cdot 16 = 8 \cdot 4$.

*) Corrigirt.

**) nunquam.

3) $\left(1 + \frac{5}{12}\right)^2 = \left(\frac{17}{12}\right)^2 = 2\frac{1}{144}$ also um $\frac{1}{144}$ zu gross als der vermeintliche Werth.

4) Bezeichnet a die Seite, d die Diagonale des Quadrats, so ist: $d^2 = 2a^2$.

Die als linea triagonis bezeichnete ist dem Text zufolge die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und d.

Auffallend ist, dass bei Erwähnung dieser und ähnlicher geometrischer Sätze zum Beweise nur auf das durch die Praxis Ueberlieferte hingewiesen wird, ohne irgend eine Autorität dafür zu nennen.

5) $5 + 5 \cdot \frac{5}{12} = 7\frac{1}{12}$.

est diagonum propositi quadrati quantum ad magistri reginboldi sententiam. nempe ego cum omne diagonium nihil plus minusue nisi duplum equaliter prouehat uideamus sicut V in se ducti XXV, an eodem modo VII uncia in VII uncias ducti secundum tetragonicam multiplicationem quinquagenarium accumulant qui nimirum ad XX dupla proportionem confert.(?) Minime septies; namque VII XLVIIII multiplicant. Inde septies untia nouissime untia in untiam assem sextantem et dimidiam sextulam coaceruant.[1]) Quorum assis XLVIIII (adiectis) quinquagenarium pluritatem complicant. Superat quantitas sextantis et dimidie sextule (id ipsum) nihilominus integro numero licet approbare. Et quoniam ipse confirmat diagonium quadrati et latus eiusdem in tali proportione reperiri qualis est inter X ac XVII*) quorum duodenarium claudit et eius insuper V duodecimas quod appellant quincuncem**) utrosque in se XII duodecies et XVII decies septies congregemus. que summa proueniet? Nimirum ex priori *C* quinquaginta IIII (?) ex posteriore CCLXXXVIIII colligentur sed diagonium nihil a duplo relinquit nec amplius curare debet. At uero ducentum sexaginta XXXVIIII unitate excedunt duplam proportionem et CLIII***) per comparationem reducti.[2]) Tamen absque dubitationis scrupulo constet diagonum non habere in se (in) quincuncem et latus sui quadrati. Quare si in duplo quadrato mensura lateris ab hoc diagonio nihil distat manifestum est ita ut nullatenus refutari possit quid (ne ipsum quid) latus dupli minoris lateris eiusque quincuncem possit includere. Sed his tandem qualicumque modo finitis illud uolumus intimare quadrati formam vix stantibus difficultatibus receptam si quis nouerit equabilitatem collocare. ita sane ut quanto circulus quadrati (circulus) tanto quadrati latera circuli excessionibus superentur. His profecto preciosissimam illam et doctis uiris sepe ac diu perquisitam que uocatur geometrice peritia circuli quadraturam. Atque (hic) excollocatio quomodo et per artem fiat monstrare curabo. Sed hoc post modum fiet nec uero istic quiescao.(?)

---

1) $\left(7 + \frac{1}{12}\right)^2 = 49 + 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{144}$.

*) L. XII an XVII.

**) cf. unten.

***) Wohl: ejus CXLIIII.

2) Der Sinn dieser unklar ausgedrückten Stelle ist unzweifelhaft:

$2 \cdot 144 = 288$

$17^2 = 289$ d. h. das nach der im Text angegebenen Regel bestimmte Quadrat des doppelten Inhalts wird um eine Einheit zu gross gefunden.

Prologus quarti libri.

Cum singule rerum tullio in topicis auctore multas habeant causas ea que inter omnes principales existat preterquam cetere stolide sunt et nihil agentes quomodo materia et instrumentum nichil agunt si non manus artificis fuerit adhibita tu modo decus pontificum solus es si quidem in hoc opere placerent primaria ipsaque effugiens causa ego uero qualecumque instrumentum iure uidear quo tu sis abusus ad huius operis effectum. Abusus inquam quod inutile instrumentum. Siue instrumentum utile opus non esset bonum non posset cum presertim et materia sit integerrima et auctor ut melior nullus. An ne auctor ille qui incitator? Hic itaque auctor. numquid enim operarum mercede conducti romam condidisse dicuntur pro habita romuli memoria qui illos forsitan operarios mercede conduxit? Sed illorum potius obsoleta est omnis memoria. Quis enim scementa confecerit qui lapides portauerint. quis iecerit fundamenta quis illum murum compleuerit nemo recordari nemo dicere ualet siue et de diuinis exemplum petatur cuius illa ap. matheus vinea. Patrisne familias an eorum qui denarium accipiunt. Destinguit hunc matheum ipse his uerbis conducere inquit operarios in uineam suam. suam attendit non eorum. Sed apertius ipse pater familias suam esse testatur dum attendit ad illos. Ite et uos in uineam meam. in meam ite non in uestram. Ergo tu quoque cujus operis auctor. Quare nisi tibi qui pigrum et stolidum ingenium beneficiis impulisti si quid in hoc opere gratum existeret nulli debetur. Quisquis enim in nos retorqueret his quasi lime quasi serre quasi acie aut securi scriberem laudem quam artifex meruisset. Sed unum est in quo hoc ipsum tibi magis addicere queras quippe si dignis illud maiestatis tue patrocinio tueri. Ratus enim scriptor sua auctoritate ita umquam fretus fuit qui principium (?) defensionem non indigeret. horatius mecenatis presidio gaudet. amat pollio uirgilium. utrosque augustus fauet. terentius concitante emulorum inuidia odium pro gratia incurrisset nisi calliopius callidis argumentis accusatoribus restituisset. Mallius torquatus boetius vir cunctarum artium perfectione et consolari dignitate principum cum in latinos thesauros insignis quadruvii precium transtulisset quod a pythagora omnium ducum ueteris philosophie judicio probatum et excoctum esset frequenter tamen et humiliter orat quatinus patricii simmachi paterna gratia labor ille prouehatur. quod si tanti nominis jure preclarissimo labori suo absque fauore principium(?) diffisi sunt multo magis ego quem neque fortuna neque scientia commendat sine tuo presidio nihil habeo spei. Quo ego si fuero potitus tanto securior ero horatio marone ac ceteris quanto meliore*) — — —

*) Die folgende Zeile ist durch Verschimmelung unleserlich.

— — patriis melior tu maior augusto — — Quodsi de me senseris bene haut uereor male estimatione quisquam presumat. Certe ubi radius splendide auctoritatis tue uelut ipsius solis effulserit necessarium erit ignorantie mee tenebras non apparere. Ea posita circuli quadratura cur circulo quadratum principaliter et per se ipsum et in mensura comparetur iam placet continuam disputationem adjungere. Sed de ea altius ordiendum est tali principio.

Explicit prologus incipit liber quartus.

Omnium equalium formarum de his enim agitur alie sunt eiusdem forme alie diuerse. Eiusdem forme ut triangulum et triangulum, quadratum et quadratum, circulus et circulus. Porro diuise ut triangulum a quadrato aut triangulum a circulo aut item quadratum a circulo. Nam triangulum alias uno obtuso et II. acutis alias uno recto cum II reliqui sint acuti alias omnibus acutis constat. Quadratum autem IIII semper lateribus et totidem rectis angulis continetur. a quorum utroque circuli figura distat. cum eadem et angulos ignoret et unius linee circumitione ambiatur. Tales itaque communem mensuram non recipiant nec umquam ualet ipsarum quantitas arealis eodem circino deprehendi. Quomobrem sepe contingit dubitationem creari dum inter se comparantur utrum altera tantundem spatii comprehendat necne. Neque enim uidetur proposito circulo et quadrato siue item triangulo et circulo tantundem spacii continere eo quod hoc in acutos angulos continetur altera in rectos latius porrigatur III^ia^. angulorum nullis quasi faucibus obnoxia liberiori spacio dilatetur. Que dubitacio tamen maxime potest excludi certo scientie fine si hec in illorum redigatur figuram ut uidelicet uel triangulo si forte dubitetur prouehamus circulum uel quadratum uel cetere longilatere aut alia quarumlibet formarum prout opus fuerit in alias reducamus. Sed sciendum hanc reductionem nullatenus ad effectum perduces nisi per — — — gnito quod*) — — —

alie plus a se distant. Minus distant que uel longitudine uel latitudine concordant. Inter illas uero hoc modo maior distantia quod utroque sunt diuerse. Sciendum quoque quod minus distantes amplius distantium in medio uersentur. Quam ob rem ad illas nisi per has nulla suppetit facultas transeundi et quomodo ad diuersissima nisi per minus diuersa prouenias? Nullo id pacto natura promittente contingat. Sic a bono ad malum nisi per id quod neque bonum neque malum est. sic a iusto ad iniustum nisi per illud quod indifferens uocatur. sic a nigro ad album nisi per uenetum pallidum aut rufum aut per alia huiuscemodi non peruenitur. Idem et spetialissimorum a generatissimis distantia preaffirmat.

*) Wegen Verschimmelung ist die folgende Zeile unleserlich.

ubi nisi per subalternas species et genera neque ab his ad illa neque ab illis ad ista descendes siue conscendes. Quid cum et mollissimarum aquarum liquor(um) in lapideam cristallorum duritiam solidatur num id fieri potest nisi in glacialem rigorem constipetur? Infinita sunt in rebus extremis huius transitionis exempla. Verummodo ut idem indubitanter in eisdem figuris agnoscas de ipsis potius aliquot exempli causa proferemus uerum prius harum ipsarum formarum pressiore (?) uersus fuero dimensione*) hoc modo.

Omne quod habet dimensionem et est eiusdem quantitatis et equalis spatii aut equale aut maioris aut minoris. Quod nemo miretur quomodo eiusdem spatii esse possit quod sit maioris uel minoris. Quod enim sic maioris est si contingit ut in omnibus dimensionibus sit maioris nequaquam per omnes partes maioris existit. sed per aliquas partes amplius habebis longitudinis et latitudinis et per aliquos minus et tanto minus in aliis partibus quanto in aliis amplius retinebis quod posterius manifestum erit. Eadem ratione est de minore. Tamen contingit ut equales uel maiores uel minores et non forte — — — — — — — — — quibus excedatur uel aliquid dehabeant que enim tanto minus habent in aliis partibus quanto in aliis amplius. non omnino ab equalitatis comparatione recedunt. Latitudine enim his quantum et illis repperitur.

Sed cum sint III dimensiones id est longitudo latitudo et altitudo hec collecto cum equali et maiori et minori quibuscumque modis colligi possunt equalium figurarum XX et unum faciunt modos.[1])

Quia uero de planis figuris tractatio incidit quod in altum non ecrescunt altitudine reiecta quot modis AB complecti possit longitudine et latitudine potius requiremus. Harumque complexionum rationes et naturas quomodo uel diminui uel augeri debeant et altera in alteram resolui diligentius exequamus ut his ad cognitionem deductis conclusionibus primo circulum in quadrilaterum dein in quadratum religatur neque per se principaliter ualeat quadrari manifestius intelligatur. Hos complexionum modos circa literas *a. b. c.* loco equalis maioris minorisque appositas ostendemus *d.* et *e.* exceptis ad longitudinem latitudinemque significandam. Horum autem VIIII existere arbitramur.

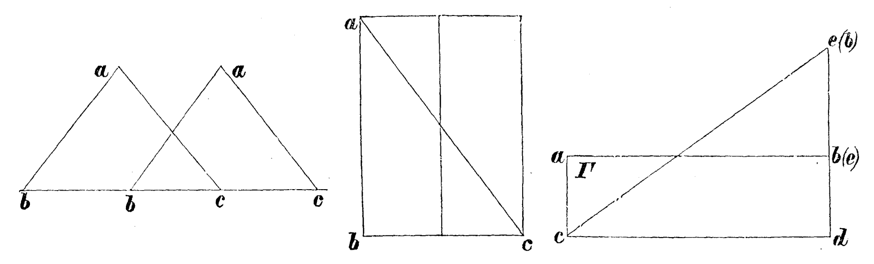
I	a	de
II	a	d
III	a	e
IIII	b	de
V	b	d
VI	b	e
VII	c	de
VIII	c	d
IX	c	e

*) discussione?

1) Nach Analogie des folgenden im Text gegebenen Schemas für 2 Dimensonen *d, e,* wenn dazu noch die dritte *f* hinzukommt, während *a, b, c* wie ebenda den Modus der Gleichheit des Grösser- oder Kleinerseins bezeichnen, hat man für je einen dieser drei Modi die 7 Combinationen: *dcf, de, df, ef, d, e, f,* woraus sich in Summa die Zahl 21 ergiebt.

Quod ita probamus ad *a* utrumque copulamus id est *d.* et *e.* solum pro hac *e* fiunt ergo complexionum III figure. Plures autem qui fierent? Nam cum sit *a* solum cui tum *d* tum *e* utrumque comparetur aut utrumque habebit aut unum aut alterum neutrum et non potest habere. Quomodo enim *a* idem equale esset si neque *d* neque *e* equale haberet? Tot modis et *B* signum maioris ad easdem literas id est *d e* potest componi et *c* minoris totidem nota. Quorum coniunctionum ratione nichil habetur diuersum. Quod si quis dicat maiorem neutro esse maiorem minorem neutro minorem hoc minime procedit ipsique nature repugnare conuincitur. Ex eo complectendum est (cum) equalis cum maiori cum minori — —*) — — — — — tractare modos complectendi secundum longitudinem et latitudinem altitudinis dimensione reiecta quod in ipsis partibus uideamus. Omnis enim eiusdem spatii figura — — —·— — figuris ad aliud extra relata aut equaliter est longa et lata aut equalis longa aut equaliter lata aut maior et longa et lata aut maior longitudine aut latitudine tantum. aut certe minor utroque aut minor longitudine dumtaxat aut mensura latitudinis sola quod subiecte declarant figure quippe circa quas secundum diuersam positionem acceptus omnes harum complexionum VIIII modi demonstrari non abnuunt.

Nunc igitur cum modos ipsos numero comprehendimus nec non exemplis omnia ad intelligentiam patescunt quod sit ratio ipsorum augendi dimi-



nuendique et quam prorsus habeant resolutionis naturam expedire curemus.[1])

Omnium que tam longa quam lata sunt altera nullatenus in alteram resoluitur. Cuius rei non alia causa uidetur nisi per omnia uidetur conueniens equalitas. Ergo hic modus a ratione auctionis et diminutionis excluditur.

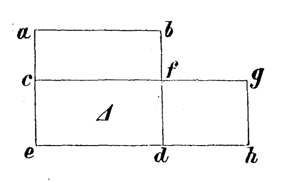
---

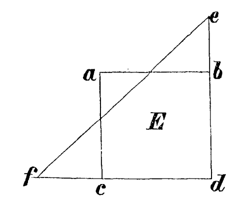
*) Ergo uolumus zu ergänzen.

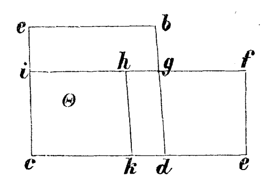
1) Die ganze Betrachtung bezieht sich auf die Verwandlung von Figuren gleichen Flächeninhaltes in einander. Sie hat wesentlich den Zweck zu zeigen, dass die Verwandlung des Kreises in ein Quadrat nicht unmittelbar geschehen könne, weil beide Dimensionen von Kreis und Quadrat verschieden (entsprechend Fall IIII oder VII). Man hat daher den Kreis zunächst in ein solches Vierseit zu transformiren, dessen eine Dimension oder Seite mit der des Kreises seinem Durchmesser übereinstimme, wodurch das Problem auf einen der Fälle II oder III reduzirt ist.

Quid enim ad explendam equalitatem alii quid prorsus equale est addas? Sed neque quid (?) auferre debebis. Sic enim equalitatis destrues comparationem.

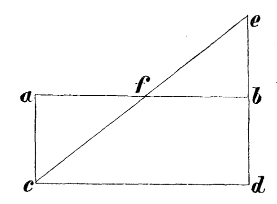
Restat ut ad alias transeamus et primo dicendum de illis que longo tantum aut lato equales existunt. Quibus omnibus — — — — — — omnino inherere uidetur ut — — — — — — opporteret eas uel augeri uel minui — — — — — una tantum resolutio fieri debeat ut si *aAC* trianguli latitudinem rescidas inter *AB* et inter *CB* per medium et adiungas

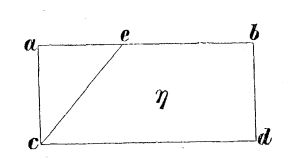


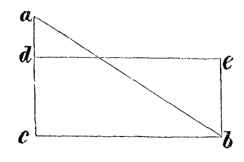




B ad *C* dico ex triangulo quadrilateri formam procreatam esse. Sin autem quadrilateri formam *ABCD* ab angulo *C* usque ad *e* quod est medium *BD* partiaris et *d**) iuxta *B* apponas. Rursus ex IIII laterum spacio triangularem formam procurasti unius scilicet reiectionis detrimento nec non unius auctionis additamento quadrilateri quidem longitudine diminuta trianguli uero latitudine recuperata. Videsne familiarem huiusmodi figurarum inter se transitionem? Quodsi iacente quadrilatero







inter *AC* et inter *BD* eadem trigoni superficies longitudine curret ad signum *de* autem *b* (?) apponitur rursus hoc modo ortogonium ex tribus ad IIII latera reduxisti quod idem poteris reparare si ab angulo *d* inter *ed* quadrilaterum diuidas ad signum *e* et *d* colligas ad *c* et his exemplis que sis equalis aut longitudine tantum aut latitudine altera in alterius compositionem transfiguratur.[1]) Nunc de his que sunt uel longitudine uel latitudine maiores minoresue consideremus. horum IIII sunt modi qui eo a superioribus distant quod illi quidem uulgares existunt ut pote qui in se

*) Wohl *e*. Die eingeklammerten Buchstaben dürften in Fig. *Γ* statt der des Originals zu setzen sein.

1) Obgleich die Buchstaben der Figuren denen des Textes nicht völlig entsprechen, ist der Sinn doch unzweifelhaft, wenn man beachtet, dass es sich um nichts weiter als die Verwandlung der betr. Figuren handelt.

ipsos facillime pateant. et a quouis imperito artis geometrice natura tantum monstrante et augeantur et minuantur. At hi IIII priori numquam ualeamus.*) — — — — — homines a homunculo administrari et necesse: a geometricis — — — — — quotiens aliquid spatiorum uel in agro uel in mensura uel in agrimensura uel unicumque fieri parte destinaueris equare ut si quadrilaterum siue stet siue iaceat quadrare uolueris quomodo uel eius longitudinem uel eius latitudinem equaliter poteris diminuere sin artem didiceris? Item si tetragonum uel longiorem uel latiorem reddere desideres ut sic tibi quadrilaterum restituatur id et per artis peritiam quodam modo perficies. Probet unusquisque cui hoc facillimum uideatur. Quare IIII ab illis distant. Ceterum unius resectionis dampnum**) sine dampno cum eisdem patiuntur et unius adiectionis accipiunt emolumentum. Nam quid superat in longitudine desumptum secundum suam rationem si quis eam non nesciat latitudinem emendat uel si latitudo superat ipsa quoque minuta lato equalitatem longitudini restaurat. Cur autem una omnes in se resectione transformantur rationem nobis uidetur esse eo quod in omnibus una dumtaxat reperiatur aut longitudinis aut latitudinis distantia. Sed cum de his disputationem prout potuimus ad finem perducta nempe ad reliquas duas que adhuc de IX supra complexiones animi uertamus intentionem. he igitur tanto difficilius reducuntur quanto se inuicem et latitudine et longitudine excedunt ipseque sole in equales suas non resoluuntur nisi per medias quasdam figuras. Cuius rei est causa quantum nobis conicere fas est adeo magna distantia utriusque dimensionis tum in lato quum in longo. Que distantia id sane efficit ut ad cognitionem equalitatis non proueniant nisi secunda uice mutilentur si forte fuerint maiores uel ex dupplici argumento fulciantur. si minores extiterint. In quibus et hoc est animaduertendum quod maiores non sunt omnino maiores sed dum in aliis partibus exteriores habeantur aliis partibus interiores existant. Quamobrem maiorum partium quantitas truncatur. unde minorum dampna quibus hec forma ab illa uidetur disparari resarciantur et truncantur quidem secunda uice quia nimirum partium longitudine partium latitudine auctores habentur. quatinus latum de lato emendetur et longum de longo compleatur. Eadem causa est cur minores secunda uice augeri epostulant quia uidelicet dum aliqua pars longitudini aliqua latitudini deficiat tam grande dampnum nisi secunda auctione restaurationem non capit. Sed igitur in talibus exercendi si quidem hec que oratione figuramus secundum aridi sermonis possibilitatem subtilius intelligere non dedignentur. Non enim res ex oratione sed oratio ex rebus illustratur. Nunc igitur ad circuli reuertamus expositionem dicti

*) Unleserliche Stelle in Folge Verschimmelung des Pergaments.

**) damnum?

cui precipue inter IX complexiones deputetur. Nimirum quadrilatero comparatur uel illi qui longitudini tantum est equale uel illi qui latitudine tantum non minuto? deputari ualet. habet enim XIIII in diametro tam per latus quam per longum quantum et quadrilaterum per II latera habet. Tamen facillime si quis aduertetur in hanc formam posse*) resolui. Sed quo tempore obsoleta est et antiquitatis geometrice facultatis exercitatio que scabies fere ante ipsum boetium omnes philosophorum greges ipso conquerente inuasit. nullo id existimare presumpsit uidelicet quod nulli uidebatur credibile ut circumferentis linee curuitas illa tenus extendi posset et ad rectitudinem aliquam tenus reduci. idem autem circulus relatus ad quadratum dum distat ab eo tam lato quam longo difficilius in ipsum resoluitur quod uidelicet ab eodem duobus dimensionibus disparatur. Quamobrem et primo resolutionem capit in quadrilaterum. unde non amplius quam una dimensione distat. ut eo resciso et illa distantia iam priuato regulare quadratum habeamus et his rationibus demonstratur cur circulus in quadratum — — — reduci non possit. hoc in loco liber iste suo fine claudatur.

Prologus quinti libri.

Haud me ipsum latet presul clarissime nostrum hoc studium non usquam quamquam ad dignam subtilitatem extenuatum multaque minus in eo reprehensioni pateret in ipsaque compositione uerborum nedum in rerum unitate quod partim accideret ex inculto ingenio ac raro scribendi usu dum magis procurando corpori quam stilo exercendo dediti sumus mimine recuso partim autem euenire ex nimia difficultate subtilissimarum rerum in quibus et perfectos uiros aliquando falli necesse est. nemo qui te (?) fellat decedit his alia pleraque impedimenta quam maxima. Primo officii cura tum prouincia familiaris rei et si parue deinde crebra inequalitas corpusculi mei postremo interioris hominis quam plures absque termino molestie concepte ex nouis et insolitis rebus quas repente emergere nostris diebus ad dissipationem honestarum rerum nemo tamen ferreis precordiis dolere non potest. Hec igitur res ueluti contra unum hominem legio armata. ita cetera eadem cuius tibi debitor sum deuotionis assistunt ut non tam indigandum**) sit quod in rebus aut uerbis peccatum offendat quantum illud est animaduertendum posse quemque ad scribendum inter tot curas tantasque omnium probationes uoluntatem applicare. quoniam flere quam studere potius libet. Quod certe fieri non posset nisi precipua uis tue dulcedinis hanc in omnibus amaritudinem ueluti mel absinthium temperaret.

*) posset?
**) indagandum?

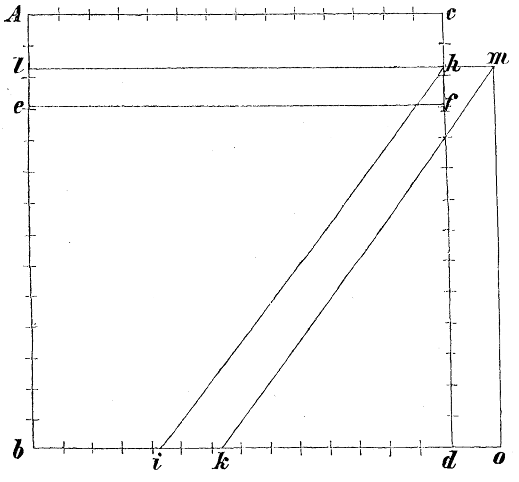
Explicit prologus. Incipit liber quintus.

Quoniam igitur in perquisitionem circuli quadrati ex circulo. quadrilaterum ex quadrilatero quadratum produximus queret forsitan aliquis contra ne a quadrato ad eandem quadrilateri formam umquam perueniri possit a circulo. Quod cui sit dubium cum non aliter in signis contingat atque solet euenire in qualibet massa plumbi ferri eris argenti auri ceterisque id genus quorum unumquidque ualet eodem pondere conseruato a quadrati forma si forte quadratum existat cum in trigonam. (nam) in pentagonam tum in aliam quamcunque maluerit artifex speciem conuerti et rursus a specie speciem ad pristinam qualitatem cum dentibus mallei retorqueri? Quid ipsum natura ceree molis potissimum non recusat quod ignei caloris in attactu facile amissa sui rigoris duricia nunc in longissimum tenorem distinctus nunc in modum pile eadem sese patitur retundari. et nunc ab hac figura in illam traduci nunc ab illa in hanc non est difficile reformari. Nichilominus exempli ratione tractabilitatem argilli nos instruit liuius. Tamen horatius protulit ita. Argilla quiduis unitatibus. Adhuc in liquoribus eandem naturam copia est perspicere. Nam sciatur aque uini mellis aliorumque id genus in uase rotundo ipseque rotundam conseruat figurationem. Eiusdem autem in uas oblongum transfusio necesse est longitudinis productionem suscipiat a quo ualet item priori forma restitui si reddatur eiusdem uasis rotunde capacitati. Ergo non est dubium ad similem modum omnem (!) spatium eiusdem quantitatis mutua transformatione uariari nec minus a quadratura ad circulum redire. qua articulari compositione quatuor angulorum cum totidem lineis figuram accipe. Verum difficillimum est eiusmodi negotium nec tandem sine labore inuenietur quomodo fiat quod facile cognoscitur quod ita fieri debeat. Nam dato quadrato circuloque magnitudinis ut par eidem circulus producatur num nouerit quis imprimis sitne lateri addendum aliquid an potius aliquid auferendum deinde quid demi qua ratione sumendum? Huius rei conforte ostendemus qualiter omnes figure quadrilatere in quadratas religantur manifesta erit et transformatio et reformatio. Ad perspiciendum autem qua arte quadrati formam in illo modo*) quadrilaterum quod processit reduci oporteat paucis ostendam cum nulla difficultas impediat licet inuentio sit inuoluta labore. proposito igitur quadrato $abcd$ latera superioris et inferioris in partes XIIII disparties et ex his III per lineam ef excludes atque ad ipsius linee caput ex ipsis lineis XIIII quadrabis unam juxta quam. I.**) ad mensuram eius quadrati diagonium posito supra f circino affigies punctum h sub illud quod est c. a quo ducetur linea ad appositum

*) fehlt in

**) primam?

sibi inferius i punctum*) excluso spatio quod inter ipsas hi et ac lineas includitur. quod si demiseris a latitudine figure. ad**) eodem modo inferueris ad reparandam longitudinem quo supra ablatum meministi. sed per obliquum dico quadratum in formam quadrilateram ut propositum fuerat redactum esse ueluti figura monstrat subiecta.



Equale est enim $aeha$ spatium $hlmn$***) spatio. Est autem totum quadrilaterum $lmbo$ cuius si diuidas eb minus latus in XI partes inuenies easdem et III insuper eiusdem quantitatis in lm quantitate maiore. Quare non est dubium reformationem hanc integre perfectum esse cum eadem profecto latera quam ante habuerunt representent comparationem[1]). Huius itaque rei demon-

*) $hi = Ac$ dem Früheren zufolge.

**) l. at.

***) Wohl $alch = hmdo$.

1) Die hier gegebene Construction der Verwandlung des Quadrats Ad in ein Rechteck, dessen Seiten das Verhältniss 11 : 14 haben, kommt auf die bereits früher (III. Buch) gegebene zurück. Auch hier würde man der Construction zufolge haben, da:

$$cd = 14$$
$$mo = 11 + \sqrt{2}$$
$$lm = \frac{14}{11}(11 + \sqrt{2}).$$

Soll das Quadrat Ad dem Rechteck lo gleich sein, so muss sein:

$$196 = \frac{14}{11}(11 + \sqrt{2})^2 \text{ oder:}$$

$154 = (11 + \sqrt{2})^2$ d. ist die frühere Form. In der That findet sich für die Quadratseite $11 + \sqrt{2}$ der Flächeninhalt:

$$f = 154{,}1.$$

In Wirklichkeit würde man übrigens das Verhältniss $\frac{ch}{hf}$, worauf es wesentlich ankommt, erhalten:

$$\frac{ch}{hf} = \sqrt{\frac{14}{11}}$$

statt wie im Text:

$$= \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

stratione completa nunc iam constitutio quadrature circuli describatur. Hec siquidem iuxta hanc regulam fieri debet. Dato ad quadratum circulo ductis per medium centrum lineis duabus primo secetur ipse in equas IIII portiones. Quo facto utraque linea XIIII diuidatur. Deinde autem iuxta punctum circuli quadratum fiat cuius singula latera ad unius XIIII mensuram sint protensa. Hoc uero quadratum diagono partiatur. Porro a diagonio dematur latus et quod restat in geminas particulas scindatur. Harum sumatur una. deinde a puncto utriusque linee siue diametri sexta pars undique uersus numeretur et huic illa particula aduingatur. atque ille locus diligenter punctis assignetur. Deinde per ea puncta linee ducantur quoad sibi inuicem concurrant. Igitur hoc completo inuenta est procul dubio circuli quadratura. Sed huius rationis dabimus exemplum. ut sicubi alicuius dubitacionis obscuritate caliget. exempli luce palam fiat.[1]) Sit item propositum *ahta* circulus et sint ducte per medium centrum linee due. altera ab *a* in *B* porro altera a *t* in *a* et sit utraque linea in partes XIIII distributa. et sit constitutum quadratum iuxta ipsum centrum quod habet per singula latera unam*) XIIII tocius diametri et sit quadratum illud diagonali linea diuisum quod est *ac*. De hac autem dempta sit mensura unius lateris *aB* remanet pars diagonii quantum est inter *Bc* hoc autem per medium diuidatur et sit ibi *e* punctum. Erit igitur medietas *ec*. Ea uero ad sextam a puncto diametri (centro) partem undique uersus adiuncta sit ubi linee per singula latera dirigantur quousque concurrant. Dico ergo constitutam circuli quadraturam. Nunc autem rationem subiecta figura demonstrat. In quam appel.
— —**) Quasi forte matutinum solem nubibus atexeret (?) quid nisi aliud equinoctium expectandum. Et si item illo die tempestas obuenerit quid nisi

1) Diese Construction schliesst sich nicht unmittelbar an das Frühere an. Denn die Anwendung des vorherigen Verfahrens würde für die Seite des dem Kreise gleichen Quadrats durch die Diagonale des ihm umschriebenen Quadrats ausgedrückt ergeben:

$$a = \frac{11 + \sqrt{2}}{14} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}}$$

während sich hier herausstellt:

$$a = 2d \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} + \frac{1}{6} \right) = d \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

wonach sein müsste:

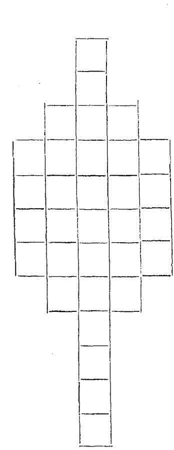
$75 = 53 \sqrt{2}$ was angenähert der Fall.

Man erhält übrigens nach dem jetzigen Verfahren:

$$a^2 = 196 \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 1 \right)^2 = 154{,}6\ ..$$

*) scil. partem.
**) Fehlen einige Worte.

rursus usque ad tercium uel ad quartum uel si ita contingit ad XXX equinoctium dilatione facienda. Cum impedimento tollendo quo pacto uno quodam die sole lucente meridies inuestigetur monstrare curemus. Sit enim positus gnomo in medio quolibet circulo. Is autem ita temperatus esto ut umbra illius paulo ante meridiem intra circinationem sese recipiat et



item paulo plus meridiem eandem excedat. fit isque punctis ubi umbra uel ingressa est uel egressa spatium illud inter II puncta per medium diuidatur. Ad quam medietatem ab eo puncto ubi gnomo affixus est ducatur linea. Nimirum hac arte centrum solis meridianum deprehensum affirmamus iuxtaque orologia regulare potes. sicut equinoctiali ita et ceteris quibusque tocius anni dierum curriculus. Cum igitur tanta sit dignitas circuli iure non ipse ad quadratum sed potius ad ipsum referri uidetur quadratum. His etenim finitis tandem ad excessuras ueniendum quarum in tantum difficilius uidetur ad inueniendum mensura ut plerique resectas particulas intrutinam mittant. libreque lancibus examinent equalitate(m). Dico igitur XX et VIII partes quot est centesima LIIII si ad quadrilaterum respicias. ab excessuris contineri. quarum dimidia pars excessuris circuli[1]) dimidia uero quadrati deputatur excessuris. Hoc autem probatur ita. Quadratura circuli constituta. tale circa gyrum circuli quadratum ascribe quod partes eius attingat extremas. Id perfecto in singulis lateribus CLXIIII mensuras iuxta diametrum circuli necessario retinebit. Hoc autem quadratum per singulos angulos X semis partibus excedit aream circularem. Cuius rei perspicatio in promptum est tibi. Nam quod decies*) XIIII C. X. C. VI reddant que est circulo ascripti continentia quadrati. Sed embadum circulare CLIIII continebat quos superant C et X. C. et VI. XLII.**) Hos autem X. LII in IIII partes equaliter diuide fiunt X et semis particulas inueniri.[2]) Igitur hoc ita probatum priori dubitacioni argumento duc: et quanto angulum interioris quadrati exterioris angulum uincat perquire. hoc autem fiet ita. Ab

---

1) Behauptet wird, dass der Ueberschuss des Kreises über das ihm gleiche Quadrat plus dem des letzteren über diesen = 28, wovon auf jede Fläche die Hälfte kommt.

*) quatuordecies?

**) 196 — 154 = 42.

2) Der Sinn ist ohne Schwierigkeit zu erkennen:

Die Fläche des dem Kreise = 154 umbeschriebenen Quadrats ist 196. Daher der Ueberschuss des vierten Theils des letzteren über den, jenes: $= \frac{196 - 154}{4} = 10\frac{1}{2}$.

angulo maiore illud quo minorem superat prescides id deinde ipsi minori comparabis et bis tantum inuenies. Quare minoris anguli continentia tribus semis particulis constat. Sed III. semis IIII. ducti XIIII ponunt. His autem dupplicati ut cum eis excessure circuli annumerati sint XXVIII restituunt. Ergo si hoc feceris probatur uti reor X et VIII*) partes in illis angulis continentes quibus se alterutrum excedit circulus et quadratum.[1]) Hoc itaque demonstrato illud et uolumus explicare quanto superent ab inuicem tetragonica forma et item quadrilatera quid monstratu dificillimum est. Est autem distantia hec XI pedes uel asses et totidem septunces paulo plus.[2]) Quantum uero plus diffinite monstrari non potest calculando. cadit enim in minutias eius-

---

*) l. XX et VIII.

1) Obgleich auch hier wegen der fehlenden Figur der Wortlaut stellenweise unklar, so kann der Sinn des Ganzen nicht zweifelhaft sein. Bezeichnet x die Kreisfläche, a das umbeschriebene, i das eingeschriebene Quadrat, so soll der gegenseitige Ueberschuss des Kreises und des ihm gleichen Quadrats, welches ihm concentrisch sich als Differenz aus der Fläche des Quadrats und dem arithmetischen Mittel des um- und einbeschriebenen Quadrats ergeben. Denn man hat:

$$a - x = 42$$
$$x - i = 56$$
$$2\left(x - \frac{(a+i)}{2}\right) = 14,$$ welcher Werth sowohl den Ueberschuss des Quadrats über den ihm flächengleichen Kreis, als auch umgekehrt den des letzteren über jenes ausdrückt, so dass die Summe beider $= 28$. Ein einzelner Theil ist somit $\frac{28}{8} = 3\frac{1}{2}$.

In Wirklichkeit hingegen ergibt sich der in Rede stehende Unterschied folgendermassen: Man erhält für eins der vom Kreise gebildeten 4 Segmente s die den Ueberschüssen des Quadrats gleich sind, da der Durchmesser des Kreises 14, die Quadratseite $\sqrt{154}$ ist:

$$s = 49 \; arc \; tg \sqrt{\frac{3}{11}} - \frac{77}{2}\sqrt{\frac{3}{11}}$$
$$= 3{,}452.$$

2) Man findet für den Ueberschuss des Quadrats vom Flächeninhalt 154 über das ihm concentrisch liegende Rechteck gleichen Flächeninhalts von den Seiten 11 und 14:

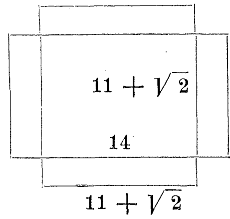
$$\varepsilon = (11 + \sqrt{2})\sqrt{2} = 17{,}4$$

Für den Ueberschuss dieses über jene:

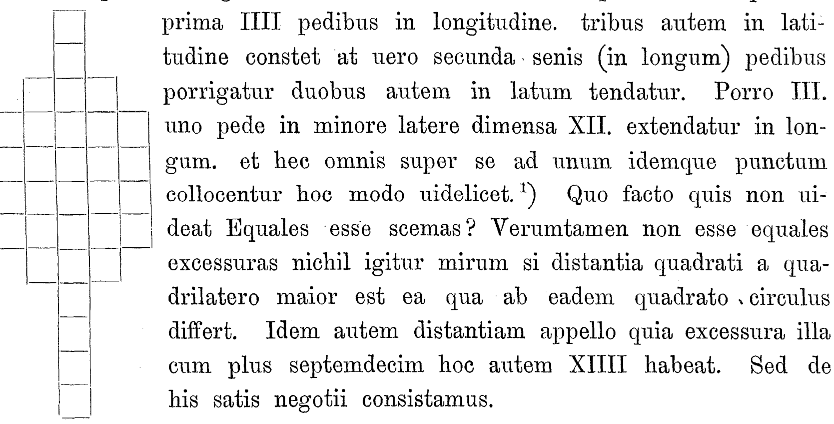
$$\varepsilon' = 11\,(3 - \sqrt{2}) = 17{,}6 \text{ oder ppt. } 17\frac{7}{12}$$

In Wirklichkeit müsste sich ergeben:

$$\varepsilon = \varepsilon' = 154\left(1 - \sqrt{\frac{11}{14}}\right) = 17{,}5.$$



modi que nulla ualeant comprehendi ratione. Sed hic forte aliquis in animi rationem ducatur cum his figuris circulus adequetur cur ille et quadratum minus se inuicem excedant. uel cur amplius isti sese superuadant. quin omnium eadem quantitas inuenitur. Quod facile poterit aduerti si quis aliarum respiciat configurationem formarum. Sint III equales forme quarum



prima IIII pedibus in longitudine. tribus autem in latitudine constet at uero secunda senis (in longum) pedibus porrigatur duobus autem in latum tendatur. Porro III. uno pede in minore latere dimensa XII. extendatur in longum. et hec omnis super se ad unum idemque punctum collocentur hoc modo uidelicet.[1] Quo facto quis non uideat Equales esse scemas? Verumtamen non esse equales excessuras nichil igitur mirum si distantia quadrati a quadrilatero maior est ea qua ab eadem quadrato circulus differt. Idem autem distantiam appello quia excessura illa cum plus septemdecim hoc autem XIIII habeat. Sed de his satis negotii consistamus.

Prologus sexti libri.

Cum multociens ad memoriam reduco in leuioribus studiis perfectissimi uiri quem plurimos annos attendi uerumtamen uereor nimis ne a partibus intentionem meam diuidentibus pro tam arduo incepto temeritatis (me?) accuset. Quid est enim obsecro thebais vel eneis illa papinii. statii sursuli. idem sursum canentis illa uirgilii maronis doctissimi poetarum quid igitur nisi leue quoddam et inane poetice fictionis inuentum. Et tamen dum in utrumque sudatur his VI annorum reuolutiones explicantur. Quod si ita est putasne quantis sit opus induciis ad integram expositionem circuli quadrature. Utique si difficultas musicorum sonorum eo usque pytagorice subtilitatis acu tamen euicerit eorum inuestigationi frustra studium applicasset nisi tandem diligentia illius mallei fabrorum diutissime desiderata ratione instruxisset, multomagis laboriosam huiuscemodi perquisicionem necessario fateri debemus. Nempe ut de ceteris reticeamus sola dumtaxat propositarum formarum diuisio. quanto diuisione monochordi artificio non uincat. Quare fortassis reprehensores non deerunt quod ego uiderer. animatus temeritate ad tam difficillimam rem prorupere non extimuerim. Ignosce pietas ignosce. date uenia queso quicumque non estis ignari trahi quemque omnium horum voluptate sua. Voluptate et ego si quid peccarem: peccaui. Ea nimirum

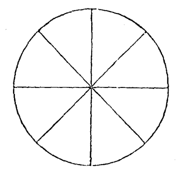
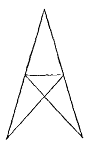
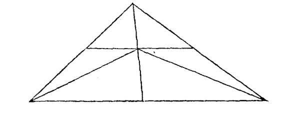
---

1) Hierher gehört offenbar die im Text bereits früher angegebene hier nochmals verzeichnete Figur.

voluptate qua satis superque delector in amore et gratia mecenatis mei patricii mei cesaris quoque siue potius augusti mei. Valida causa: amor secus(?) Quamobrem quibus*) — — — temeritatem sapiens asscripserit numquam. Sed nunc uideamus*) — — — circulo damus.

Explicit prologus incipit liber VI.

Ad equalitatem circuli et quadrati seu constituendam seu approbandam nichil ita prodesse puto quam si utriusque figure ars foret reperta diuisionis. Quapropter hanc rem scilicet interim in solo quadrato. altera adhuc a sensu nostro remota ut potero inuestigare conabor. Ingredietur a speculatione communi compendioso tractatu. Omnis diuisio formarum aut naturalis est aut arte perficiatur. Naturaliter est quod per se quisque facile nouit. Illam uero ad artem debemus peruenire que nulli est obuia nisi aut disciplina aut studio et exercitatione comparata. Sed naturalis duobus modis perfici uidetur aut enim a latere ad latum oppositum linee ducuntur quibus figure distribuuntur uel in duas uel in III uel deinceps consequentes partes. aut a puncto medium tenente locum eiciuntur. Verumque fieri potest in his formulis quod et punctum in medium clauditur et ipse IIII lateribus et rectis angulis includuntur. Sunt

nihilominus que lateribus carent ut circulus et sunt item quarum medietas puncto disignari non ualeat ut trigonus isosceles vel ut ambligonius in quo quis ita in medio punctum constituat ut ab omni angulo omnique latere equali differat interuallo? Quare hujus forme triangulum ab utroque remotum est diuisione. At uero circulus quod punctum ejus ab omni circumferentia equaliter distat eam recipiat quam fit a puncto exeuntibus lineis diuisionem. quia uero latera recusat a laterum diuisione alienum existit. Porro superficies quadrati dum sit rectangula et IIII lateribus inclusa a quibus equali distantia punctum in medio fixum inuenitur utrumque sectionis non refugit modum. Sciendum autem hanc diuisionem cum equas recipiat partes nullam in partibus proportionem habere ad exemplum uidelicet numerorum qui uel in duos binos partiuntur inter*) — — — uel III IIII VI VIII et cetera. cum uero*) — — — inter partes illarum posse aliquam inueniri comparationem. Quoniam si quis nos (?) forte uoluerit summam aliquam numeri secundum eas quarum habitudinem requirit partes distribuat. earum-

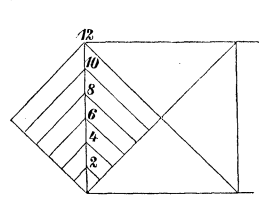
*) Wegen Verschimmelung sind die folgenden Worte unleserlich.

que partium adinuicem relatione perspecta facillime comprehendit ut si forte medietatis ad III partes comparationem requirat senarium bis itemque tum partiatur. Erit igitur medietas III tercia uero duo. Sed III ad II sesquialtera cognatione iunguntur. Sesquialteram ergo rationem haberent tertia pars et medietas. Eodem modo XII qui $\overset{a}{\text{III}}$ et $\overset{a}{\text{IIII}}$ haberent modo tantummodo quantum diuisis. tercie quarteque partis ad se relationem inuenies. Nam quomodo se habent IIII ad III eadem ratione tertia pars respicit quartam atque hanc insistentes uiam omnium partium proportiones absque ulla repperiemus offensione. Hec autem dicta sunt pro diuisione secundum naturam. At uero diuisio artis in equalibus lineis perficitur. Quarum in quadrato diagonium maxima reperitur relique autem quanto magis angulo accedit. magis magisque breuiantur. Porro in circulo diametros (?) maximum habent modum. Que uero ad ambitum propinquiore existunt maiore contrahuntur breuitate. Cuius quante sint utilitates ego quidem enumerare non possum. Hoc tamen dicam quot pedibus circulus quadratum excedat. nulla melius deprehenditur ratione. Nunc igitur qualiter area propositi quadrati que (?) circulo equamus per hanc diuidi possit inuestigare curabo. Primo et erit uidendum quot naturales includat tetragonos a pari numero productos. Naturales dico quod sunt et fasticii arteque compositi uelut ipse quem nunc habemus in manibus. Quot enim naturales erunt tot et lineas inuenies cetera. Hoc autem ut a maximo incipiamus CXLIIII demitur? C. Post hoc LXIIII. Subinde uero XXXVI hinc autem XVI et nouissime quaternarium opere et actu quadratum. Sed quot sunt isti? VI. Sex igitur lineas in CXLIIII tetragono easque certissimas habes. Quid tum? quid de reliquis faciendum. Utrumne monstrare possibile est? Puto quod aliqua adhuc inuestigare copia erit. Nam latus omnis dupli diagonium est simpli. Ergo XII cum sit latus CXLIIII tetragoni faciam ex eo diagonium. Eodem modo X cum sit latus C. quadrati diagonium fiat. Item VIII VI IIII II omnia hec latera pro diagoniis acceptis linee fiant ad eandem diuisionem idonee. Et harum quidem atque superiorum quot pedes unaqueque contineat breuissime succingatur. Ille enim dimidii sui quadrati harum uero quoque partes eiusdem includis. IIII. Suorum uero proprie quadratorum similiter ut ille dimidiam. Quorum item lateribus sumptis ad diagonia eadem consequitur ratio. Et hac arte inuenies omnes simpli ad duplum cognationem habentes. Sed huic exceptas qua ratione perquiremus? De quo genere est quidem III V VII XI et quecumque ad illam dupli et simpli non pertinent rationem.[1]) De quibus omnibus sat agendum est nobis ut et eas metiendi ars naturale sit. habita prius consideratione de III an

1) Der Inhalt des Vorherigen ist klar. Wenn die Flächen der Quadrate und ihre Seiten resp.:

nulla proportione iungatur ad alterinsecum positas. Nam IIII ad primam existit dupla. Inter quas II et III numquid ad ipsas et inter se aliqua proportione conferuntur? Et hanc quam esse dicemus? Ex illis quippe qui in usu habentur quosque diligentissimi numerorum inspectores memorie posterorum scriptis tradiderunt quis tante subtilitatis hic aliquando ostendat. Annon manifestum huiusmodi proportione neque in multiplici genere partiente inueniri? Si enim II. ad primam multiplex exisset et item III ad II. IIII. que ad III. profecto duplex ex III proportionibus multiplicis necessario constaret. Est enim IIII ad primum dupla. Sed hoc falsum esse quis nesciat? cui sit ignotum minimam esse omnium multiplicium duplicem proportionem?[1]) Quare ipsam impossibile est ex multiplicibus constare. Quod si non ex istis multo minus ex aliis supra memoratis quod et illa duplex proportio multo minor inuenitur. Restat ergo aut superparticulari proportione ad se conferantur aut superpartiente aut nulla. Prima superparticularem attemptemus. Inuenimus enim multiplicem ex tribus superparticularibus constitutum id est VI ad III comparatos inter quos IIII et V ut omnibus notum est sesquitertiam sesquiquartam sesquiquintam proportionem efficiunt. Quamobrem putet aliquis in diuisione quadrati inter I lineam et IIII que se inuicem duplici collatione respiciunt. talem secundam habere constitui quod prime $\mathrm{III}^{\mathrm{am}}$. habent partem talem deinde $\mathrm{III}^{\mathrm{am}}$. quod secunde contineat quartam cujus et $\mathrm{III}^{\mathrm{ae}}$. IIII linea suscipiat quintam. Sed nichil minus uerum. hoc autem ea ratio probat quod $\mathrm{VIII}^{\mathrm{am}}$ esse duplicem secunde opportet. Quippe quaternario precedit IIII. Omnes autem quaternario se precedentes duplices erunt ad illas relate quod se numeri iuxta naturalem ordinem consequuntur quem ad modum mox II sequitur I. Quare necesse erit ut ad ipsam secundam duplex inueniatur. VIII sicut ad I^{am}. quarta. Que si illud constiterit maior

$$12^2 = 144$$
$$10^2 = 100$$
$$8^2 = 64$$
$$6^2 = 36$$
$$4^2 = 16$$
$$2^2 = 4$$

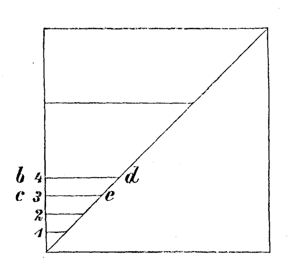


so kann man danach zunächst alle Seiten derjenigen Quadrate finden, deren Inhalt die Hälfte von jenem also resp. 72, 50, 32, 18, 8, 2 beträgt, indem man die Seiten 12, 10, 8, 6, 4, 2 als Diagonalen der zu suchenden Quadrate ansieht wie in Fig. Wie aber die Zwischenwerthe der Flächeninhalte 3, 5, 7. . . zu finden dazu bedarf es einer andern Construction.

1) Wäre $3 = m \cdot 2$
$4 = m \cdot 3$, so müsste
$4 = m^2 \cdot 2$ oder $m^2 = 2$ sein, was für m als ganze Zahl nicht möglich.

erit quam dupla. Impossibile enim erit prioribus IIII ita se ad inuicem habentibus posteriores et consequentes proportiones alterutrum non conseruare uidelicet ut linea V sesquisexta sit ad IIII. VI ad V sesqui-
am
septima VII ad VIII sesquioctaua ad VIII ad IX sesquinona? Tamen amplius conficitur quam proportio dupla. Quod ut liquido patefiat numero ad demonstrationem utamur. Sit itaque III quod III habetur quasi prima linea tum quarta velut II tum V loco tertie postremo VI pro linea VIII. Dico si illud confirmatum fuerit octauam quod non opportet ultra duplum maiorem esse secunde. Que autem erit secunda? Quatuor. Que octaua? X. Nam X a tribus VII distat loco.[1]) At uero X ad quatuor relati amplius quam duplum reddunt quantum est ipsius quaternarii pars dimidia. Non igitur prime linee pars tercia sumenda est nec prorsus inter ipsam et IIII tales sunt proportiones requirende quales inter III et VI. duplam faciunt comparationem. Quid igitur? ubi deinceps in omni genere superparticulari alias inuenies quamquam sole ad duplum aspirent. Id prorsus fieri non potest. Itaque sicut multiplices et ceterorum ita et uista*) inequalitatis proportio ab hac quam tractamus diuisione separanda est. Restat ergo aut in superparciens genus incidere aut minime iuxta proporcionum procedere rationem. Sed cunctis et superpartientibus pretentatis nusquam tales reperimus qui continuati huic apti sint diuisioni.[2]) Neque enim secunda linea duas tertias I aut III. quartas aut IIII. V. aut V. VI aut deinceps plures iuxta proprietatem partientis accipiet partes. Que et ipsum ab hac diuisione excludendum. Quid igitur agendum? Num quid credendum cunctis his remotis generibus rem ullam comparari? Sed forte erit cui hec comparatio per adiectionem et diminutionem fieri uideatur hoc modo. Constituta linea scilicet I. si ablata VI eius deinde ipsa per medium diuidatur adiectaque

1) Die Superparticule bedeuten offenbar das Vielfache vorher bereits gegebener Theile. Denkt man sich zwischen die Quadrate vom Flächeninhalt 1 und 4 oder den Seiten 1 und 2 noch die vom Inhalt 2 und 3 in gleichen Intervallen eingeschoben, so ist die Länge der jetzt 4. doppelt so gross, als die der ersten. Betrachtet man nun die dritte dieser 4 Linien als das erste, also die dreifache Länge der früheren Einheit als solche, so muss man, damit das obige Gesetz gilt, mit der letzteren Einheit messen, während die Beibehaltung der früheren naturgemäss falsche Resultate ergibt, wie es der Text deduzirt.



*) l. ista.

2) Die Superpartientes sind Theile der früheren. Das Resultat ist somit dasselbe wie im vorherigen Falle d. h. es ist möglich, dass die einzelnen Quadratseiten ihr natürliches Verhältniss 1 : 2 : 3 : 4 etc. behalten, wenn man die Masseinheit ändert, ohne zugleich danach die Linien zu bezeichnen.

medietate augeatur secunde linee eius quantitatem inuentam esse. Sin autem ab hac X pars rescidatur et pro hac ipsa quantum secetur quarte partis sue deinceps adiectione concrescat III^{am}. lineam inueniri a qua rursus XIIII subtracta VI que residui inuenta atque integre sue quantitati adiecta IIII^{am} lineam dimensam esse.[1]) Atque hoc ordine obseruato ut uidelicet in diminutione a VI incipientes eam semper auferamus partem que denominata est a summa quaternario auctiore (excedente) ut X a VI; XIIII a X quaternario auctiores existunt. rursus autem in adiectione a II. parte progredientes illa semper adiciamus que a paribus appellationem trahunt continuo ordine se sequentibus. eo modo omnes procul dubio quadrati lineas inueniri. Quod utrum procedat in lineis numeri pro lineis accepti demonstrabunt. Sit ergo quasi prima linea $\overline{\mathrm{MCCVIIII}}$. d. c. ab his aufero sextam. id est $\overline{\mathrm{CCI}}$. d. c. remanent $\overline{\mathrm{MVIII}}$. horum sumo medietatem id est $\overline{\mathrm{d.\ IIII}}$ hos addo prime summe hoc est $\overline{\mathrm{MCCIX}}$. d. c. fiunt. m. $\overline{\mathrm{dCCXIII}}$. d. c. qui pro secunda linea deputentur a quibus rursus decimam tollo uidelicet $\overline{\mathrm{CLXXI}}$. CCCLX. remanent $\overline{\mathrm{MdXLII}}$. CCXLIIII. Quibus subduco IIII^{am} quod est $\overline{\mathrm{CCCLXXXV}}$. dLX. easque $\overline{\mathrm{MdCCXIII}}$. d. c. adiungo fiunt $\overline{\mathrm{IIMXCIX}}$. CLX. hi autem priore linea computentur. a quibus item XIIII ab hoc partem huius XIIII : $\overline{\mathrm{CLIX}}$. dCCCCXL. inuenietur qua subtracta remanent $\overline{\mathrm{M.dCCCCXLIX}}$. CCXX. Quos item sexies diuido et inuenio VI. $\overline{\mathrm{CCCXXIIII}}$. DCCCLXXX atque his illi summe coniunctis que pro III linea erat idem $\overline{\mathrm{IIM}}$. $\overline{\mathrm{dCCCC\ .\ IX}}$. CLX exeunt $\overset{i}{\mathrm{M}}$. II $\overline{\mathrm{CCCCXXIIII}}$. XXX . hos igitur pro quarta linea appono.[2]) Sed quarta prime duplicem esse opportet. hi autem ad unum numerum comparati tantum exuberant supra duplum quantum est summa $\overline{\mathrm{IIII}}$ d. CCCXXX. quid idem uicium in lineis nihilominus euenire quis dubitet? Quam propter

---

1) Bezeichnen l_1, l_2, l_3 die bezüglichen Längen, so soll dem Text zufolge sein:

$$\frac{l_1 + l_1\left(1 - \frac{1}{6}\right)}{2} = l_2$$

$$\frac{l_2 + l_2\left(1 - \frac{1}{10}\right)}{4} = l_3$$

$$\frac{l_3 + l_3\left(1 - \frac{1}{14}\right)}{6} = l_4$$

$$\vdots$$

2) Das dritte Verfahren, das Verhältniss der Längen der Quadratseiten zu bestimmen, deren Inhalte resp. sich wie $1:2:3:4$ verhalten, besteht in einer Art

illarum dimensio secundum adiectionem et diminutionem procedere non ualet. Sed rursus hic quidem obiciatur deesse non puto. Dici enim potest ut totam istam exuberantiam in eam quantitatem disparciamus que colligitur ex his summulis per quas ipsa diminutio progressa est que sunt igitur iste summule nimirum VI . X . et XIIII. Sed quenam ex his quantitas colligitur? Utique XXX. Per hos igitur distribuamus $\overline{\text{IIII}}$. dCCCC . XXX. quo numero dupla proportio quarte ac prime linee superabatur.[1]) Egreditur pars XXX . CLXI. quam deinde primosexies multiplicemus fiunt. dCCCC . LXVI. Quos statim ab illo numero quem secunde linee retinent uicem id est $\overline{\text{m. dCCXIII}}$.

Reihenentwickelung. Bezeichnet man wie vorher schon die bezüglichen Linien, die jenen Flächeninhalten entsprechen, mit l_1, l_2, l_3, l_4, so soll den Text zufolge sein:

$$l_1 = 1209{,}600$$
$$\frac{1209{,}600}{6} = 201{,}600$$
$$\frac{1209{,}600 - 201{,}600}{2} = \frac{1008}{2} = 504$$
$$1209{,}600 + 504 = 1713{,}600 = l_2$$
$$\frac{1713{,}600}{10} = 171{,}360$$
$$\frac{1713{,}600 - 171{,}360}{4} = \frac{1542{,}240}{4} = 385{,}560$$
$$1713{,}600 + 385{,}560 = 2099{,}160 = l_3$$
$$\frac{2099{,}160}{14} = 149{,}940$$
$$\frac{2099{,}160 - 149{,}940}{6} = \frac{1949{,}221}{6} = 324{,}870$$
$$2099{,}161 + 324{,}870 = 2424{,}04 = l_4$$

der Theorie gemäss sollte nun $l_4 = 2 l_1$ sein. Dies ist aber nicht der Fall, sondern beide unterscheiden sich um:

$$2424{,}04 - 2419{,}200 = 4{,}830.$$

1) Man könnte nun auf den Ausweg verfallen, diesen Ueberschuss auf die 4 Linien im Verhältniss $6 : 6 + 10 : 6 + 10 + 14 = 6 : 14 : 30$ d. h. den Zahlen entsprechend zu vertheilen, welche die bezüglichen Zusätze geliefert, wodurch eine aus der andern entstanden. Danach ergibt sich:

$$\frac{4{,}830}{30} = 0{,}161$$

$6 . 0{,}161 = 0{,}966$ folglich die verbesserte 2. Linie
$1713{,}600 - 0{,}966 = 1712{,}634$. Ferner ist
$16 . 0{,}161 = 1{,}576$ demnach die verbesserte 3. Linie
$2099{,}160 - 2{,}576 = 2096{,}584$
$30 . 0{,}161 = 4{,}830$ demnach die verbesserte 4. Linie
$2424{,}04 - 4{,}830 = 2419{,}200$

welches wie verlangt wird, doppelt so gross wie die erste Linie l_1.

d. c. subtrahamus. Relinquitur M $\overline{dCCXII}$. dCXXXIIII. Quo ita diminuto ad XXX. reuertamus quod est CLXI. Rursusque non modo per VI. sed et per X. hoc est sedecies multiplicetur unum. concrescunt . $\overline{II}$. dLXXVI. Quorum subtractione illud qui(?) superat III^{am} . III^{am} (lineam) quo et suo habundat et secunde linee uicio emendemus. Supersunt $\overline{IIXCVI}$. dLXXXIIII. Et his ita ad legitimam mensuram redactis rursus XXX per VI. per X per XIIII. id est tocies in augmentum ducamus. Exque multiplicatione tota illa summa consurgit qua prime linee numerus a quarte linee numero superabatur. Hoc autem est $\overline{IIII}$. dCCCXXX. (qua tandem subtracta. ab ipso quarte linee numero id $\overline{IICCCCXXIII}$) relinquentur. $\overline{IICCCCXIX}$. CC. quem numerum manifestum est dupla relatione conferri ad $\overline{ICCIX}$. dc. hos numeros quorum

Partes linearum			
Sexta CCI. dc.	Decima CLXXI.CCCLX.	Quarta X. CXLIX.dCCCCXL.	
Priores linee a	blatione superflu	itatis corrigende	
$\overline{MCC.VIIII}$. dc.	$\overline{MdCCXIII}$.dc.	$\overline{II.XCVIII}$.CLX.	$\overline{II}$. CCCC. $\overline{XXIIIIXXX}$
Remanentia linearum ablatis partibus			Superhabundantia linearum
$\overline{D\ IIII}$	$\overline{M.d.XLII}$. CCIII.	$\overline{MdCCCC.XLIX}$.CC.^{XC}	$\overline{IIII}$. dCCCC. XXX
d. IIII.	$\overline{CCC.LXXX}$.V.d.^{LX}	$\overline{CCCXXIIII}$.dCCC^{LXX}	tricesime sunt habundantie
medietas	quarta	sexta	CLXI
Partes remanentium			
Sex tricesime	XVI tricesime	XXX tricesime	
dCCCC. LXVI.	$\overline{II}$.d. LXXVI.	$\overline{IIII}$.dCCC.XXX.	
Linee ablatione superfluitatis de superioribus correcte			
$\overline{M.CC.\ IX}$. dc.	$\overline{I.dCC.XII}$.XXX.^{IIII}	$\overline{II.XC.VI}$.dLXXX.^{IIII}	$\overline{II}$. $\overline{CCCC}$.$\overline{XIX}$. CC.

omnium radix est VI propter confusionem tollendam ita distinximus uti in subiecta formula patet. Quibus tamen promotis necessario usi sumus. eo quia non sunt inuenti minores qui tum integri in partes VI. et X. ac XIIII. diuidentur. tum diminuti II. IIII. VI. quoque reciperent portionem quorum

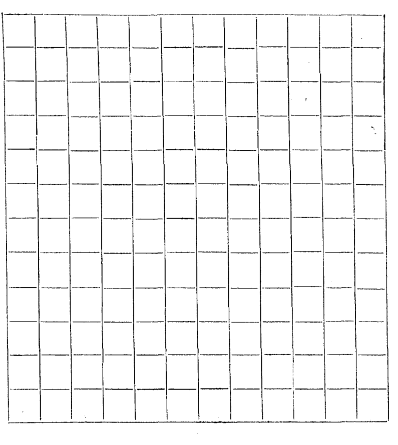
et exuberantia. tocies auferri non recusaret. Quoniam igitur de II. linea VI. de III. vero VI et X. porro de quattuor*) VI et X et XIIII idem. omnibus tricesimis quod et suo et secunde ac III. vicio laborabat abstractis quartam lineam primis inueniemus duplam sic earum legitima exigit dimensio. forte commodum uidebitur et omnino rationabile ut iuxta illam debeant metiri rationem. Que nimirum opinio in errorem adhuc exercitatis et ingeniis uix intelligibile. Ad quem deprehendendum ne quando ab illo decipiamus animum libet intendere. Ubi considerandum que prima linea eius quadrati latus existit. cuius secunda diagonum inuenitur. Hec autem comparatio non servatur in superiore descriptione a secundo ad primum I. a $\overline{\text{MCCIX}}$. dc. ad $\overline{\text{MdCCXII}}$. dCXXXIIII. Nam utroque in se multiplicato quadratus ille qui ex maioris multiplicatione concrescunt.(?) eum quadratum qui ex minore producitur plus quam duplo excedit. cum II linea duplum equaliter reddat prima uero simplum si utraque fuerit in latere sui quadrati constituta.[1]) Tandem manifestum est quod hec linee sicut iuxta proportiones uidelicet inequalitatum I (?) multiplicis et superparticularis et cum ceterorum metiri non possunt. Ita et non procedere ut per adiectionem et diminutionem mensurari consentiant. Quare aut earum mensuram necesse est ignorare aut rursus ad geometrice facultatis confugere adiumenta nec poterit quisquam obtendere quin per minutias debeant conferri. demonstrato iam superius quod omnis proportio que in minutiis constat possit et ad integros numeros transferri. Quare prius ab aritmeticis supputacionibus recedentes proportionem hanc siue potius mensuram per artem geometricam quod non usquam quoque aritmetice putamus addictam immo inquam prolibus propriam exercere considerationem perquirere studiamus. Ad quem ergo tendimus finem? Quid fieri opportet? Scilicet quemadmodum ille dubium reperte sunt per quadraturam naturalia sumentibus nobis diagonia singulorum ut tandem hec quoque simili reperiantur modo. Quadrabis enim VI eiusmodi particulas quales continet quaternarium quadratum aut nouenarium aut quilibet aliorum in hac figura et hac arte linea III inuenta erit. Item ut V inuenias quadrabis X. Septimam quoque inuenies eo quod est duplum ad septenarium in quadratum redacto. et si ubique eandem rationem obserues poteris reperire ad eundem modum reliquos omnes. Denique si in III. aut IIII aut V. aut alias deinceps partes quadrati spatium ab angulo partiri uolueris eadem te ubique ratione quadrandi iuuabit. quod manifestum erit eadem arte cognita quod ita monstrabitur ut in ipso limine sistamus uolentem ingredi

---

*) quarta?

1) Es sollte, wenn die angegebenen Längen richtig wären, $l_2{}^2 = 2 l_1{}^2$ sein. Man findet jedoch für jene Werthe eine Differenz von ppt. 9700.

figura vero subiciatur prius in quo de ea dicta sunt uel dicenda in ea clarescant.



Hinc iam ostendemus subiecto prius quadrato de quo hac tenus epactarum est ut eo sub oculo posito ratio eius clarior fiat. In hac figura*) ab angulo sinistro sursum ordinauimus lineas naturalium trigonorum a pari numero reiectis imparibus eo qui ad medietates non habeant ex integro numero denominatas. et linearum quadrati duo habentem in latere prima posuimus qui inter se et angulum centesimas quinquagesimas**) quartas quas brevius appellamus pedes uel asses continet duas. Quadrati uero habentis quatuor in latero secundum posuimus qui asses includit VIII. Eius uero qui VI. in latere tertiam includentem XVIII. Itemque eius qui VIII quartam continentem XXXII. Deinde eius qui XV sub quo sunt[1]) asses L. Postremo qui XII. VI cui subiciuntur LXXII. has autem omnes diximus notas. et per has alias inueniri posse ignotas. Quod ita est. Nam lateris quod protingit usque ad VI si posita fuerit mensura inter IIII et V habebis lineam XXXVI includentem. Eius uero lateris quod summitas V attingit in medio tertie et quarte mensura ponatur et inuenitur ti(?) linea XXV sub se continens. Item eius mensura qui ad caput citate quarte copulatur si ducta fuerit inter alteram et tertiam erit linea cui subiciantur XVI. Rursus illa pars lateris que ascendit usque ad III. ipsa quoque ponatur inter eandem III. et alteram et facta est linea habens sub se pedes VIIII. Adhuc longitudo lateris. secundam attingens inter ipsam signetur V. et hec linea continebit IIII. Denique et illa lateris particula ubi summitas prime linee finitur eidem subjecta unum dumtaxat includit pedem. Igitur hoc ordine omnis hec ratio procedit. ut principalis linee ipsa tetrago. Denique diuidentes medietatem linee (duo) a lateribus sumpte quartam

---

*) Die Figur ist unvollständig (cfr. die folgende Anm.).

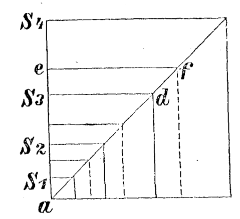
**) quadragesimas? 144 tel.

1)
$$s_1 = 2 \quad f = 2 \ (1 + 1)$$
$$s_2 = 4 \quad f = 8 \ (4 + 4)$$
$$s_3 = 6 \quad f = 18 \ (9 + 9)$$
$$s_4 = 8 \quad f = 32 \ (16 + 16)$$
$$s_5 = 10 \quad f = 50 \ (25 + 25)$$
$$s_6 = 12 \quad f = 72 \ (36 + 36)$$

eorum semper includant partem. his ita in hoc angulo demonstratis alteram in opposito angulo ostendamus artem. ut ubi ista defecerit uiuemus ab illa. Hic ergo si diagonium primi assis metiaris eaque mensura notes utrimque figure latus ducasque lineam a nota *B* usque ad notam *a.* habes quantitatem eiusdem assis artis diuisione receptam. Ad*) hoc modo constituta linea prima accipe dimensionem eius eaque sicut antea utrimque designa latus et a signo *c.* trahe lineam usque ad signum *d.* quo perfecto ducerit duo asses singulariter includens. eadem quoque in angulo altero recepto primo quadrato diuiso per mediam? ut notum fiat esse inter has quarum mensure existat et alius modus.[1]) Si iam ventum est ad tertiam hic standum

*) At?

1) Die beiden hier beschriebenen Methoden, um aus einer Reihe von Quadraten, deren Seiten oder deren Diagonalen der Zahl nach bekannt, durch geometrische Construction andere zu finden, kommen wesentlich auf dasselbe hinaus. Im ersten Falle denkt man sich die Seiten und Flächen folgenderweise geordnet: Statt der Quadrate und ihrer Seiten betrachtet man ihre Hälften d. h. die durch eine Diagonale entstehenden Dreiecke, was an der Untersuchung nichts ändert.



Bezeichnet man demgemäss mit s_1, $s_2 \ldots f_1$, $f_2 \ldots$ die resp. Quadratseiten und die Flächen der ihnen entsprechenden Dreiecke, so ordnen sich dieselben folgenderweise zu einander:

$$\begin{array}{ll} s_1 = 2 & f_1 = 2 \\ s_2 = 4 & f_2 = 8 \\ s_3 = 6 & f_3 = 18 \\ s_4 = 8 & f_4 = 32 \\ s_5 = 10 & f_5 = 50 \\ s_6 = 12 & f_6 = 72 \end{array}$$

Um hierin Zwischenwerthe zu finden, z. B. den Werth von s, welcher $f = 36$ entspricht, so hat man nur die Diagonale des Quadrats, welches 36 enthält, auf der Seite abzutragen, d. h. $ad = ae$, dann ist das $\triangle\ efa$ das verlangte. Analog mit den übrigen. (Die Seiten s_1 $s_2 \ldots$ sind, wie es der Text sagt, in geraden Zahlen gewählt um bei dieser Interpolation keine Bruchtheile zu erhalten.) Danach ergibt sich das vervollständigte Schema:

$$\begin{array}{ll} s_1 = \sqrt{2} & f_1 = 1 \\ s_2 = 2 & f_2 = 2 \\ s_3 = 4 & f_3 = 8 \\ s_4 = 3\sqrt{2} & f_4 = 9 \\ s_5 = 4\sqrt{2} & f_5 = 16 \\ s_6 = 6 & f_6 = 18 \\ s_7 = 5\sqrt{2} & f_7 = 25 \\ s_8 = 8 & f_8 = 32 \\ s_9 = 6\sqrt{2} & f_9 = 36 \\ s_{10} = 7\sqrt{2} & f_{10} = 49 \end{array}$$

quod arte qua nunc et prius usi sumus nichil hic proficere possumus. Quid ergo agendum? An cedendum difficultati? An a labore cessandum? Minime. Querenda enim ars quadrandi per quam in solum III. siue V et VI et VII et que curque adhuc recepte non sunt metiri possint. Hec autem ars ita se habet. Accipies de proposita VI asses unam per se figuram compones hoc modo.

Huius igitur figure minus maiori latus demes ad punctum *a* trahesque lineam ab eo usque *B.* et spacium quod superest diuides per medium *C. D.* linea. Quo facto ad mensuram lateris quod est sub *C* trahe lineas c. *e. f. g.* Erit igitur inter has spacium equale *a. B.* spatio spacium dico equale sed non per latus. fac ergo ut et latitudo sit equalis et eo resciso l. longitudine. latitudinique adiecto quadrasti figuram. Cujus absque dubio si diagonium accipias tertiam lineam inuenisti que pedes descripti supra tetragoni tenebit III. Ad hunc quoque modum quadrato denario inuenies V. et quod impares non se aptos exhibent ad quadrandum semper eis duplicatis quadraturam eodem modo perficies et quecumque linee requirantur sic poteris inuenire.

His finitis magnum nobis uidetur quousque huc peruenire potuimus quare disputatio conticescat hoc loco. Libet autem infine inuentam circuli quadraturam aliquot uersiclorum quasi coloribus depingere quatinus moris omnibus adornata ut fieri a nobis predigna fiat quod ante oculos tue reuerentie aparere mereatur.

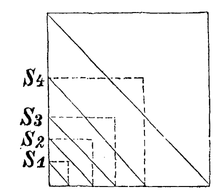
Liber franconis de quadratura circuli explicit. Incipit liber de eadem re.

Platonica miratione quo pacto quadratum duplicare debeat edicam ut fundamento mee narrationis posito cetera conuenientibus accumulare ualeam. Quadratum enim equalibus rectisque lineis puncto sibi in quadro connexis mi constituo diagonum ab angulo in angulum diduco que proportio uero talis consideratur. Diagonium habet unum latus in se et quincuncem eius

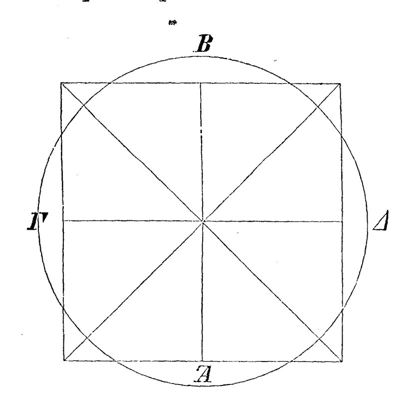
---

$$\begin{aligned} s_{11} &= 10 & f_{11} &= 50 \\ s_{12} &= 8\sqrt{2} & f_{12} &= 64 \\ s_{13} &= 12 & f_6 &= 72. \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Hinsichtlich der zweiten Construction, welche die nebenstehende Figur zeigt, ist Alles wie vorher, nur dass sich die Lage der Dreiecke geändert hat. Die noch fehlenden Zwischenwerthe des vorigen Schemas soll die folgende im Text gegebene Construction zu finden lehren. Leider ist durch das Fehlen der Figur das Verständniss derselben unmöglich. Dass sie jedoch von der bereits früher im III. Buch gegebenen der Verwandlung des Rechtecks in ein Quadrat nicht wesentlich verschieden sein kann, ist anzunehmen.



quem duplicare si uolo diagonium minoris faciam latus maioris. ecce duplum et simplum quadratum et hi in mensura inuenimus nusquam. Hactenus plato. Nam ut quadrato equale constituam triangulum spacio ipsius uerbi boetii exordiar. Iubemus inquit proposito IIII laterum spatium *A. B.* Sed quid absurdius quid ueritati contrarium. Quis ergo rationis aspectus quisue mentis uisus tantam possit ueritatis iniuriam ferre ut tribus lineis constitui possit quadratum cum tribus lineis totidemque angulis naturali ratione semper existat triangulum. Quadratum uero non minus quatuor lineis totidemque angulis consistere quis tam brutus animus qui nesciat. Iubemus inquit boetius proposita quatuor laterum spatio. Quid habet nisi quadratum et non triangulum. Et per errorem statim infert. Opportet ergo *A. B.* spacio equale triangulum constituere ut sit duplum *A. B.* spatio *c. d. e. f.* spacium. Ecce ex antecedentibus et sequentibus clarius luce patet. quod non trium laterum posuerat hoc boetius. sed quatuor A. B. quorum spatium quatuor litteris in c. d. e. f. stati duplicant. Ex quibus omnibus euidentissime constat idem uicium non manu boetii scilicet scriptoris aut quod magis est credendum cui (quidem) inuidentibus factum esse et quod hec disciplina in geometrica de qua hoc sumptum est in his regionibus penitus abolita idcirco error latens regnat per plurima. Quo abiecto ac interioris oculi aspectu adhibito mi ipse statuo quatuor laterum spatium A. B. cuius angularem lineam I in diagonium platonis auctoritate sumens. dupli latus facio spacii c. d. e. f. quod est duplum quadrati a. l. 'Idem primi uel supra dicti quadrati hoc primum duplum diagonio diuidens e. f. duos triangulos efficio unum c. d. f. alterum c. e. f. quia enim c. d. e. f. quadratum duplum A B quadrati certe c. d. f. triangulus equus est ipsi sicut et c. e. f. quia eius medietas est hoc modo nisi fallor. boetii ratione quadrato triangulus sit equus spacio ut he figure demonstrant. Item boetius de circuli quadratura eodem quoque modo inquit quesitum est si sit proposito circulo equum fieri quadratum quod aristotelis tempore scilicet prius non fuisse repertum. Cuius demonstrationem pretermittendam esse fatetur. eo quod longa fit quod nos nitimur compendiose deo fauente prout possumus exponere. Nam circulum mi statuo. cuius diametrum VII sit pedum circuitus uero XXII. quorum medietatibus in uicem multiplicatis aree XXXVIII . *s* . inuenio pedes. hec igitur geometricis uenusta circuli habetur regula. quadratum circuli satagimus coequari spacio ex ipso diametro VII. pedum V que septem pedis et



ducentesime partis*) quantitate quadrati facimus. et uideamus si hac lateris ratione poterimus aream quadrati implere XXXVIII . *s* . qui sit utique pedes aree circuli atque id abacizando applicare expedit. Dicamus igitur[1]) sexies VI. XXXVI et VI^{ies}. V^{as}. I. et V^{as}; VI^{ies} ducentesima trescentesime hoc ita se habere in singulari linea quisque studiosus probare potest et quod secuntur cetera in minutiarum linea V. VI. as. et V. et V. in V. XXV. et V. et in ducentesima millesima et ducentesima. sexies tres centesime. et ducentesima in V. millesima et ducentesima (XL millesima.) in ducentesima. XL millesima. Nunc uero quid sparsim confecimus in unum hoc modo aggregemus. XXXVI. et. as. atque . V . Item. as. et V. fiunt XXXVIII. et . II . V. item XXXVI. et. VI. centesime faciunt. prima. decimaque conjuncte duabus. V. que supersunt reddunt absque errore semissem pedem et secundum boetii preceptum quadratum circulo equaliter appono. videlicet ut angulis suis circulo quantitate emineat equali et circulus similiter lateribus quadrati ac media . V . interualla ipsius diametri que pedes nominantur. et utriusque extremi semissem ut sex sint deinde unamquamque extremam semissem in V. equas portiones seco quarumque X pedis spacio ex quibus in unoquoque latere sumo . X . unam et XL^{am} . X^{e} . alterius partem. hoc uero modo diuidimus . V . pedis et ducentesimam ob equalem circuli quadratique compositionem ut hec figura demonstrat.[2])

Huius enim designatione formule paululum libet intueri omnesque partes sub numeri quantitate in unum colligere et utrum totidem quales debet

---

*) wohl: VI et V^{ae}. et ducentesime partis.

1) $$\left(6+\frac{1}{5}+\frac{1}{200}\right)^2=\left(6+\frac{1}{5}+\frac{1}{200}\right)\left(6+\frac{1}{5}+\frac{1}{200}\right)=$$

$$\begin{aligned} &36+1+\frac{1}{5}+\frac{3}{100}\\ &\quad+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}\\ &\qquad+\frac{1}{1000}+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{40000}\\ \hline &38+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{500}+\frac{1}{40000}\right)=38\,\frac{1}{2}+\frac{81}{40000}\end{aligned}$$

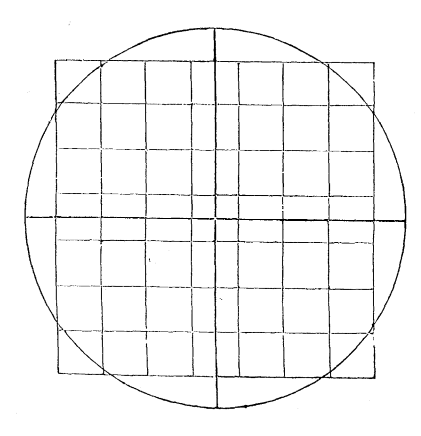
2) $$5+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{400}=6+\frac{1}{5}+\frac{1}{200}$$

$$\left[5+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{400}\right]^2=25+2\left(5\cdot2\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^2=36$$

$$36+2\left(5\cdot2\cdot\frac{1}{10}\right)=38$$

$$38+2\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{10}\right)=38\,\frac{3}{20}$$

habeat prouidere. Primum uero pedes integros ita quinquies . V . XXV. Post autem semisses qui in circuitu adiacent . XX . et facimus . X . integros pedes quos et XXV. uinctos fiunt. XXXV. deinde. III quadrantes qui in angulos sunt componunt unum pedem quem superioribus appositum fuit. XXXVI. sequuntur XX. decime ex quibus conficiuntur. X. V.[as] quod duos reddit pedes. qui ceteris adiuncti. XXXVIII. fiunt. Post modum uero VIII. uicesime que circa centesimas in angulum habentur faciunt .IIII..X.[as] que ipse . II . V.[as] tum uero . IIII . centesime que in ipsis angulis sunt . II . L.*) II. L. unam. XXV. conficiunt. sumantur et. XX. CCCC. que cum ipsi decimis esse noscuntur. et fiant. X. CC. et ipse. V. C. Octo uero octogentesime que circa angulos sunt. IIII. CCCC. et iste duas ducentesimas. hec autem due unam centesimam. Que V. iam dictis addita fiunt. VI. hoc modo. IIII. quinquagesimas. Sed. II. quinquagesime unam. XXV. Ecce. II. XXV. et una quinquagesima. X. faciunt. hec cum duabus quintis superius iam dictis semissem uc . . faciunt pedem due millesime sane et quadragesimo millesimo cum . IIII . centesimis ita sunt coniuncte ut. CCCC. X.**) Et sicut in quadrato eas esse sic in circulo haberi nulli dubium est. quamquam ob sui exiguitatem atque subtilitatem peruidi non possunt. Preterea circulum in IIII. eque partientes II. lineas in quadro per centrum ducimus in quarum summitate anguli quadrati ex diuiso uenientibus lineis contingunt ut supra dispositum est. Per quas igitur lineas altera proponitur regula que quasi actiua informatur a speculativa cuius si caruerit materia nulla ueritatis nititur fortitudine. hoc itaque



$$\left.\begin{aligned} 38\frac{2}{5} + \left(2 \cdot \frac{1}{10}\right)^2 &= 38\frac{2}{5} + \frac{1}{25} \\ 2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{400} = \frac{20}{400} &= \frac{1}{20} \\ 2 \cdot \left(2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{400}\right) = \frac{8}{800} &= \frac{1}{100} \end{aligned}\right\}$$

$$S^a = 38\frac{1}{2}$$

Dabei fehlt:

$$\frac{2}{1000} + \frac{1}{40000}$$

*) wohl IIII . C.

**) wie $\frac{1}{10}$ mit $\frac{1}{400}$ in obiger Formel.

sic se habet. Ac centro autem ad circularem usque lineam (IIII) in equa*) spatia ipsa recta linea secetur quibus . IIII . V. eiusdem quantitatis superaddatur punctumque ibi figatur in quo angulus terminabitur. et sic in ceteris tribus ut per puncta quadrati deducantur latera. hanc circuli quadrate que auctoritatem in sesquiquarta proportione retineat qui in priori contemplari teduerit.[1])

Cognita omnia consonantia fistularum in organis mensure ratio ita inuestiganda est: prima fistula ad arbitrium mensoris tendatur. eiusdem latitudinis omnes erunt. Secunda ita metiatur a prima. Vide latitudinis eius qui uocatur diametrum deinde in ipsa longitudine prime fistule excipiatur octaua pars diametri. Hinc usque ad plectrum sumuntur. XX. equales partes. Nona parte demota. VIII. partes que restant erit longitudo secunde. In secunde longitudine excipiantur $\overset{e}{\text{II}}$. $\overset{e}{\text{VIII}}$. partes diametri. reliquum diuidatur in IX. nona parte desumpta quod restat erit longitudo tercie. Tunc mensura reuertatur ad primam. In qua excipiatur tercia pars diametri. hinc usque ad plectrum diuidatur in IIII. Quarta parte desumpta erit longitudo quarte in qua completum est diatesseron duobus tonis semitonioque dimensum. Item reducatur dimensio ad primam. In eius longitudine excipiatur medietas diametri inde diuidatur in tria tercia parte ablata erit longitudo quinte. In cuius longitudine excipiatur $\overset{a}{\text{VIII}}$. pars diametri inde diuidatur in . VIII . nona parte detracta erit longitudo sexte. Inter hanc et septimam interponatur sinemenon. Ibi remittatur mensura ad quartam. In quarta excipiatur medietas diametri. quod remanet diuidatur in quatuor quarta parte sublata. quod remanet erit sinemenon. Deinde a mensura sexte disponatur septima. diametrum sexte partiatur in . VIII . Octaua parte excepta in longitudine reliquum diuidatur. in . IX . nona parte detracta quod residuum est erit longitudo septime. Octauaque ultima ad mensuram prime disponatur. Totum diametrum prime excipiatur. inde quod restat diuidatur in duo medietate sublata longitudo erit octaue. ad hanc erit diapente a quinta per tonum tonum semitonium et tonum. Eadem mensura in sequentibus. VII. seruetur. Ita fiet ut prima

---

*) in V?

1) Das Verfahren der Quadratur besteht darin, den Radius $\frac{7}{2}$ in 5 Theile zu theilen und 4 davon der Länge desselben hinzuzufügen. Diese Länge soll die Quadratseite sein. Man erhält daher den Flächeninhalt:

$$f = \left[\frac{7}{2}\left(1 + \frac{4}{5}\right)\right]^2 = 39{,}69$$

contineat duplum longitudinis octaue et insuper diametrum totum. Similiter octaua dupla XVe. cum diametro prima quadrupla est XVe. additis tribus diametris.[1] Quod si cuiquam dubium uideatur scilicet probabit. Prima fistula bis in se continet octauam insuper unum diametrum que octauam bis in se habet. XV et insuper diametrum unum. Si autem octaua fistula una longitudo bis habet in se XV^{am} et insuper unum diametrum necesse est ut due longitudines eiusdem VIII quatuor in se contineant XV et insuper duo diametra. Certum est (has) II longitudines VIIIe in prima fistula contineri et insuper unum diametrum. Relinquitur ergo II prima habet in se XV^{am} quater et insuper duo (?) diametra. Si autem velit organicum extendere mensuram ultra XV uel XVI. per tria alfabeta metiendum est Tercium ad instar duorum sicut mensurandum est secundum ad simulitudinem primi.

Quicumque cymbala facere uoluerit primum faciat. Etenim primum duas partes cere equales pondere ad s. et ad f. Ceram s. diuidat in VIII. partes et cere addat ad f. quantum est in VIII^{a}. parte et similiter diuidat ceram f. per VIII et tantum detur c. littere quantum est in summa f. et ejus VIII^{a} parte. Sic in reliquis de hac cera que tam diligenter ponderata est. nihil detur adiuga et

---

1) Bezeichnen $l^{I}\, l^{II} \ldots l^{VII}$ u. d resp. die Längen und Durchmesser der Pfeifen, so ist:

$$l' = l'$$
$$\left(l' - \frac{d}{8}\right)\frac{8}{9} = l''$$
$$\left(l'' - \frac{d}{4}\right)\frac{8}{9} = l'''$$
$$\left(l' - \frac{d}{3}\right)\frac{3}{4} = l^{IV} \text{ (diatesseron)}$$
$$\left(l' - \frac{d}{2}\right)\frac{2}{3} = l^{V}$$
$$\left(l^{V} - \frac{d}{8}\right)\frac{8}{9} = l^{VI}$$
$$\left(l^{IV} - \frac{d}{2}\right)\frac{3}{4} = \text{sinemenon}$$
$$\left(l^{VI} - \frac{d}{8}\right)\frac{8}{9} = l^{VII}$$
$$\left(l^{I} - d\right)\frac{1}{2} = l^{VIII}$$

Daraus folgt:

$$l' = 2\,l^{VIII} + d$$
$$l^{VIII} = 2\,l^{XV} + d$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$l' = 4\,l^{XV} + 3\,d$$

spitamina sed de alta cera fiant hec omnia. Stagnum cum cupro misceatur priusquam cymbalum aliquid fundatur. V.ta pars uel VIta sit stagnum ut clare sonent. Si uero fusa minus recte sonent lima vel cos adhibeatur.*)

Assumatur numerus quilibet acciplicetur**) triplicatus diuidatur in duas partes et ambe equales extiterint qualem nolueris absque illa differentia iterum triplicabis. Quod si inequales fuerint IX inueniri possint consideretur quociens IX. fuerit totiens binarium est sumendum. Obseruandum autem est ut priusquam numerus triplicatur et diuisus est et iterum medietas fuerit triplicata et de nouenario fuerit interrogatum. hoc et adiungatur. si aliquid super unum uel duos uel plures nouenarios remansisset. quod si aliquid remansit VI fuerunt et de his sumendum unum. hisque in summam redactis pronunciandus est numerus qui fuerat medietate conceptus. Verbi gratia Si duo fuerint animo concepti cum triplicabuntur VI faciunt VI diuisi in III. et III. resoluuntur. Res uero triplicati IX tantum efficiunt nec remanebit aliquid. Ergo fuerint medietate concepti et immo in omni hoc supputacionis ratione IX. II. semper figurant.[1]) et VI. numerus. Secundumque est quod omnis impar numerus qui assumptus fuerit ordine quo productum est triplicatur atque diuisus in senarium terminatur. par uero numerus in IX quod unitas secundum supradictum modum triplicata atque diuisa senarium producat. Binarium uero triplicatus atque diuisus nouenariumque hi due numeri. idem unus et duo paritatis et imparitatis dant . . . esse principia. Assumatur numerus quilibet . . . aut triplicatus diuidatur in duas partes et tunc ille qui numerus medietate conceptus interrogetur si ipsius numeri sit equa diuisio. Quod si pares ambas partes responderis nil sumatur. Si autem impares esse dixeris unum sumatur in hac prima diuisione ad memoriam diuinantis atque non pars diuisionis quando ambe equales fiunt absque differentia triplicetur. Si uero ipsa res fuerit maior pars triplicanda est atque diuidenda sicut superius in duas partes iterumque interrogandum si equale aut inequale (sit) facta (diuisio) si equale quidem facta est nichil sumendum. si autem inequale II sumendi sunt in secundam diuisionem et in medietate diuisionis. si equale fuit absque ulla partium differentia quot nouenarii sunt interrogandum. Quod si inequale fuit in maiori parte querendum est quorum quot IX inueniuntur tot quantum nos diuinata sumere

---

*) Anm. Auf dem Text steht von anderer Hand bemerkt:
primo tripla plus dimidiam triplicaque secunda pro quo nouena secans duo. tum de quibusque nouenis. (?) Si quid habes reliquum sex est pro quo dabis unum.

**) l. triplicetur.

1) Das Dreifache von 2 ist 6. Halbirt gibt 3. Verdreifacht: 9. Wäre die Zahl ungerade gewesen, so würde sich ein Bruch ergeben haben. Der Grund des hier dargestellten Verfahrens scheint übrigens ein rein empirischer zu sein.

debet. Verbi gratia. Si VI fuerit medietate concepti cum triplicati fuerint XVIII faciunt que in IX et IX diuiduntur et quod equalis est diuisionis nil sumendum IX iterumque (est) medietas huius diuisionis triplicati faciunt XXVII qui diuisi in XIII et XIIII resoluuntur et quod ista est secunda diuisio est inequale duo sumendi sunt tunc in maiori parte ipsius diuisionis hoc est in XIIII querendum est quociens IX possint inueniri. In XIIII IX semel sed de his IIII(?) a diuinante colligendis. qui duobus qui in secunda diuisione collecti sunt adiuncti VI faciunt. Senarium igitur in medietatem conceptum est: qua in re notandum est quod si ambe diuisiones paritati responderint nil ex eis sumendum. Si uero prima impar fuerit unum sumendum. Si secunda II unum uero quaternaris sigetonem continet quod in omni hac supputacione aio que in alia superiori contingere uidetur quod bis triplicatur et semel diuidatur quapropter in hac nouenarium quaternarium in illa uero binarium significat.

(dorica que sili designat nomine lingua)

EINE STUDIE

UEBER DIE

ENTDECKUNG DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE

MIT BERUECKSICHTIGUNG EINES WERKES
DES MARINO GHETALDI PATRIZIER RAGUSAER.
AUS DEM JAHRE 1630.

VON

EUGEN GELCICH
DIREKTOR DER NAUTISCHEN SCHULE IN LUSSINPICCOLO.

I.

Il Raguseo per diventar genio non ha
bisogno di sortir dalla patria, gli basta
imitar i proprî.

N. Tommaseo.

Unter den Culturstädten der vergangenen Jahrhunderte ragte das am östlichen Gestade der Adria gelegene Ragusa, seiner literarischen und wissenschaftlichen Thätigkeit wegen, in besonderem Glanze hervor. Der mächtige ausgedehnte Handel der ehemaligen Republik und der daraus hervorgehende ununterbrochene Contakt mit den Culturnationen des Ostens und des Westens, klärte die Geister, festigte den Willen und bereicherte die Bewohner der Republik mit den Schätzen der Wissenschaft. Wir sehen zu Anfang des XII. Jahrhundertes Jünglinge aus Ragusa die Hauptschulen des byzantinischen Reiches besuchen; im Laufe des XIII. Jahrhundertes errichteten die Benediktiner auf Lacroma eine Unterrichtsanstalt und im XIV. Jahrh. finden wir in Ragusa mehrere Lehrkanzeln durch Gelehrte aus Griechenland und Constantinopel besetzt. Aus diesen Schulen gingen Männer hervor, deren Ruf wohl den Stolz jener Stadt bilden und welche in der Geschichte der Wissenschaften und der Literatur bekannt sind. Um nur einige der berühmtesten Namen anzuführen, beginnen wir mit dem Jesuiten Boscović. Seine Leistungen auf dem Gebiete der Astronomie, seine Gradmessung, seine Theorie der zwei Kräfte, sein herrliches Werk „De philosophiae naturalis theoria etc.“ benöthigen keines weiteren Commentars. Die südslavische Literatur hat in Ragusa erst wahres Leben gefunden und die Osmanide des Gondola gilt heutzutage noch als ein Meisterwerk illirischer Dichtung. Aber auch die classischen Sprachen fanden in den Stay's, Kunich, Zamagna, Gagliuffi und vielen anderen eifrige Pfleger. Die lateinischen Werke des Stay über die Philosophie des Descartes und über jene Newtons wurden derart beifällig aufgenommen, dass der bekannte Ennius Quirinus Visconti vom Stay sagte, er sei ein Plato in den Kleidern Lucretius'. Vom XIV. Jahrh. an sehen wir stets einige Lehrkanzeln der berühmtesten Universitäten durch Ragusaner besetzt.[1] So haben wir als Rektoren zu Padua: 1397 Ragnina,

1) Skurla. Ragusa. Cenni storici.

1492 Rosa, 1579 Zlatarich, 1609 Brasso. — Als Professoren der Theologie: Giovanni Raguseo 1415, Serafino Bona 1408, Tralasso 1480, Giorgi 1492, Basegli 1511 alle zu Padua; dann zu Ofen in Ungarn Bona und Bassegli; zu Paris Stojkovich 1421, Bondemalich im XV. Jahrh. und Gozze 1564; zu Rom Mathias Bona im XVII. Jahrh. und Zuzzeri Bernhard 1762, zu Loviano der obgenannte Gozze und zu Wittemberg Mathias Francovich, der sogenannte Flaccus Illyricus 1544. — Als Professoren der Literatur und Philosophie: Giorgio Raguseo 1622 und Cerva 1631 beide zu Padua, dann Zuzzeri 1746 zu Sienna, Kunich 1794 zu Rom und Bologna, Remedelli im XVIII. Jahrh. zu Bologna, Stay 1801 zu Rom, Zamagna 1820 zu Mailand. — Als Professoren der Mathematik: zu Rom Boscovich Bartholomäus 1770 und dessen Bruder Rugerus 1787. Letzterer docirte auch in Paris und in Mailand. — Als Professoren der Medicin, zu Bologna: Galeotti 1394—1422, zu Padua Belleo 1601, zu Rom Baglioi 1705.

Es erblickte in Ragusa das Licht der Welt auch einer der berühmtesten Mathematiker aus dem Ende des XVI. und dem Beginn des XVII. Jahrhundertes, der Patrizier Marino Ghetaldi nämlich, mit welchem wir uns in diesen Blättern zu beschäftigen haben.

Im Jahre 1566 geboren, erhielt Ghetaldi in seiner Vaterstadt genügenden Unterricht in den klassischen Sprachen, sowie in der Mathematik und Philosophie. Seine späteren Werke, im perfekten Latein geschrieben, zeigen eine gewisse Eleganz des Styles, verbunden mit Correktheit und Sprachgewandtheit. Die Philosophie seiner Zeit konnte dem noch sehr jungen Marino durchaus nicht gefallen. Er erklärte die Mathematik als die einzige Wissenschaft, welche zur Erkenntniss der Wahrheit führen könne,[1]) daher er sich auch mit derselben vorzugsweise beschäftigte. Noch im frühesten Alter begab er sich nach Rom, um seine Studien zu vollenden und erwarb sich dort zuerst die Achtung, dann die Freundschaft einiger sehr berühmten Mathematiker, so des eigenen Lehrers Michael Coignet, dann des Federico Samniato und des Christoph Clavius. Der Kardinal Serafino Olivario konnte sich seiner engen Beziehungen zu dem jungen Ghetaldi nie genug rühmen. Ueberzeugt, dass, um die Wissenschaft zu fördern, es vor allem nöthig wäre, die geometrischen Werke der Alten zu ergänzen und herzustellen[2]), liess er sich durch seinen Lehrer Coignet dazu bewegen, sein „Archimedes promotus—seu de variis corporum generibus, gravitate et magnitudine comparatis. Romae apud Aloysium Zanettum 1603“ zu veröffentlichen. Fast gleichzeitig erschienen auch seine „Nonnullae propositiones de

1) Galleria degli Illustri Ragusei. Ragusa. Martecchini 1841.

2) Appendini. Notizie Sulla Storia e letteratura dei Ragusei. II. Seite 44 ff.

Parabola nunc primum inventae, et in lucem editae Romae apud Zanettum 1603." Beide Werke waren für die damaligen Zeiten von eminenter Bedeutung für die Wissenschaft, wie es auch Vossius in seiner Schrift: „Matematicarum scientiarum natura" gesteht. Damals war in den mathematischen Kreisen der Franzose François Viète berühmt, welchen Ghetaldi in Paris aufsuchte, um die Algebra speciosa, die sich erst Bahn zu brechen begann, zu erlernen. Zuerst war Ghetaldi Schüler des Vietas, dann wurde er sein inniger Freund und Verehrer, wovon man sich beim Durchblick des Werkes „De resolut. et comp. mathem." überzeugt. In der Vorrede zu letzterem Werke sagt Ghetaldi von seinem Meister, vir certe de rebus Mathematicis optime meritus: cui non solum nostra, sed etiam superior aetas haud scio an ullum huius scientiae laude parem, nedum superiorem invenerit etc.

Gelegentlich der Abwehr einiger Angriffe des Clemens Cyriacus nimmt Ghetaldi im zweiten Buch desselben Werkes auch seinen Freund Viète in Schutz, gegen welchen sich Cyriacus bezüglich des ersten Anhanges zum Apollonius Gallus in ziemlich ausgelassene Art ausgedrückt hatte.[1])

Durch das letztere Werk (Ap. Gallus) hatte sich Viète besondere Verdienste um den Fortschritt der Mathematik erworben, da die Schriften über die Berührung des Gelehrten aus Pamphylien, Apollonius von Perga, gänzlich in Vergessenheit gerathen waren. Aber nicht minder Bedeutung erhielt eine ähnliche Arbeit unseres Ghetaldi, deren zweiter Theil, unserer Ansicht nach, den Glanz seiner Talente am besten erweisen kann und welche gerade von den Historikern nicht genug gewürdigt wurde. Zunächst veröffentlichte er 1607 in Venedig sein „Apollonius redivivus, seu restituta Apollonii Pergaei Inclinationum Geometria. Venetiis apud Iunctam 1607." Und weil Viète sechs Berührungsaufgaben des Appollonius, welche durch die iniuria temporum, wie Ghetaldi sagt, förmlich verloren gegangen waren, ausgelassen hatte, so gab Ghetaldi in seinem Supplementum Apollonii Galli, seu exsuscitata Apollonii Pergaei factionum Geometricarum pars reliqua. Venetiis apud Vincentium Fioranum 1607" ihre Lösung. „Non igitur — sagt der Verfasser in der Vorrede dazu — exsuscitavit Apollonius Gallus universam Apollonii Paergei Factionum Geometriam; omisit enim sex problemata ad illam geometriam pertinentia: sed ea supplebimus, et sic Apollonius Gallus non sine Illyrico Apollonium Paergeum qui extinctus iniuria temporum, vel a barbaris oppressus iacebat, excitabit."

Vielleicht in Nachahmung der griechischen Philosophen des Alterthums, die ihm jedenfalls bekannt waren, machte er sich nach Vollendung seiner Studien in Paris auf Reisen, um die Gelehrten von ganz Europa kennen

*) Ghetaldi. De resolut. et comp. math. Seite 48 und ff.

zu lernen. Es begleitete ihn auf dieser sechsjährigen wissenschaftlichen Pilgerfahrt sein Busenfreund Marino Gozze, ein anderer Patrizier aus Ragusa, welcher wieder die Sprachen und den Charakter der verschiedenen Nationen Europas erforschte. Diesem Busenfreund widmete Ghetaldi sein nächstes Werk „Variorum Problematum collectio. Venetiis apud Vincentium Fioranum 1607."

Bemerkenswerth sind die folgenden Worte der Widmung: „Enim vero ingenii mei quasi ager haud scio, an potiorem quam te colonum agnoscet, qui dum me patria, corporis verius alumna, quam animi in alienas terras ingeniorum altrices una tecum extraxisti, quasi coluisti agrum. Quam autem gentem ac doctorum multiplicitatem sex annis una peregrinati non adivimus? Superiorem Germaniam omnem percurrimus, inferiorem totam Belgiumque lustravimus; duos annos consedimus in Brittania; Galliam deinde peragravimus, et Italiam universam; quas inter gentes quot ego Doctores nactus sum (nactus autem sum plures) tot agro tu quasi praefecisti operarios."

Auf seinen Wanderungen durch Europa ward Ghetaldi überall als grosser Mathematiker mit Enthusiasmus empfangen. An mehreren Hochschulen, darunter auch an der damals bedeutendsten von ganz Europa[1]), an jener von Löwen in Brabant nämlich, wollte man ihn durchaus als Lehrer haben.[2]) Aber seine übergrosse Bescheidenheit, welche an seinem Spruch „se malle scire, quam nesci, discere, quam docere"[3]) zu erkennen war, veranlasste ihn alle derlei Anträge zurückzuweisen. Diese Bescheidenheit hat auch Vossius bei der Gelegenheit hervorgehoben, wo er im früher erwähnten Werk den Apollonius redivivus und das Supplementum Apollonii Galli bespricht und wo er von ihm sagt, „se praeclara illa quae tradit non sibi sed Apollonio potius adscribit."

Nach Ragusa zurückgekehrt, brachte er den grössten Theil des Jahres in seinem väterlichen Erbgute, der jetzigen Villa Sarraca zu[4]), um teleskopische Beobachtungen der Planeten und um Versuche mit dem Brennspiegel anzustellen. Wenn man von Ragusa aus südwärts gegen Ragusavecchia längst der Küste fährt, so sieht man am Rand der Küste ungefähr $\frac{1}{2}$ Meile von Porto Casson, gegenüber Lacroma eine grössere, am Fusse der jetzigen

1) Die Universität Löwen in der belgischen Provinz Brabant, wurde 1426 gestiftet und war im XVI. Jahrhundert die bedeutendste von ganz Europa. Sie war von 6000 Studenten besucht.

2) Ljubić. Dizionario biografico degli illustri Dalmati. Vienna. Ad vocem Gh.—Appendicis Notizie sulla storia e letteratura dei Ragusei. II. 44 ff. — Nave Ragusea. Italia 1819. Seite 6.

3) Nave Ragusea. 6.

4) Ex Anmerkungen von Otto Fr. v. Reinsberg-Düringsfeld. Aus Dalmatien von Ida v. Düringsfeld.

Villa Saracca gelegene Höhle, von welcher der heutige Bauer noch und der rohe Fischer nur mit Abscheu und Grauen erzählen kann. Sie wird die „Spilla Betina" genannt, was soviel heissen will als Höhle des Zauberers. Da Ghetaldi besondere Studien über den Brennspiegel pflegte, so wählte er jene Höhle um die bezüglichen Experimente auszuführen. Auf eine entsprechende Distanz von der Grotte stellte er einige kleine Fahrzeuge in See, die er mit dem Brennspiegel (ähnlich wie Archimedes die Flotte des Marcellus) in Brand steckte. Von nun an mied jeder Fischer, jedes Fahrzeug die Nähe der verrufenen Höhle, denn es verpflanzte sich unter das Volk die Sage, der Zauberer besässe Mittel, um die Schiffe in entsprechende Nähe zu locken, um sie dann den Flammen preiszugeben. Die optischen Werke des Ghetaldi, „De speculo Ustorio" — „De radiis visus, et lucis in vitris prospectivis" — „De Iride" und „De inchoata Telescopii demonstratione" scheinen leider ganz verloren gegangen zu sein.[1])

Im Jahre 1627 starb Ghetaldi, nachdem er die höchsten Würden der Republik bekleidet hatte. Sein frühes Dahinscheiden verhinderte ihn, gerade den wichtigsten Theil seiner Studien fortzusetzen. Er konnte die Drucklegung jenes Werkes, welches den Gegenstand unserer Abhandlung bilden soll, nicht mehr erleben, und der aufmerksame Leser der Resolut. et Comp. Mathematica nimmt im Text Lücken wahr, welche darauf hinweisen, dass das Manuskript beim Tode seines Autors noch nicht ganz druckfähig gewesen ist. Ghetaldi war erst ungefähr 60 Jahre alt, als ihn der Tod hinwegraffte. In den letzten Tagen seines Daseins, nachdem er die Geometrie der Alten für sich und für seine Zeitgenossen zu neuem Leben gebracht hatte, legte er die Hand an jenes grosse Werk, welches nicht nur der Mathematik, sondern auch den gesammten Wissenschaften neue Pforten eröffnen sollte. Es handelt sich um die erste Anwendung der Algebra auf die Geometrie, um die Vereinigung und Verschmelzung derselben zu einem Gegenstande und somit um die Grundsteinlegung zu den späteren grossen Entdeckungen der Analysis. Das bezügliche Werk, drei Jahre nach dem Tode seines Verfassers und sechs Jahre vor der Drucklegung der Geometrie des Cartesius herausgegeben, trägt die Aufschrift: „Marini Ghetaldi, Patritii Ragusini Mathematici praestantissimi de Resolutione et Compositione Mathematica. Libri quinque. Opus Posthŭmum. Romae. Ex Typographia Reuerendae Camerae Apostolicae. MDCXXX. Da diese Schrift sehr ver-

1) In Ragusa gibt es noch sehr reiche Bibliotheken, deren Inhalt aber theils den Eigenthümern unbekannt ist und theils in verwahrloster Verpackung langsam vermodert. Der Verfasser hat Gelegenheit gehabt, sich hiervon mit eigenen Augen zu überzeugen. Die verlornen Werke des Ghetaldi dürften vielleicht doch früher oder später ausfindig gemacht werden.

schiedenartig beurtheilt wurde, so wollen wir im folgenden den Versuch machen, ihren wahren Werth zu bestimmen, beziehungsweise festzustellen, welche Rolle Ghetaldi durch dieses Werk in der Geschichte der analytischen Geometrie gespielt hat.

II.

Bevor wir unsere Untersuchung beginnen, wollen wir in möglichst gedrängter Art den Inhalt des zu besprechenden Werkes hier wiedergeben. Die Vorrede zum ersten Buch wird ihres Interesses wegen gänzlich nach dem Wortlaut des Textes reproducirt. Jedes Buch (Abschnitt) enthält zuerst eine kurze Einleitung, dann folgen die Propositiones, diesen wieder die Lehrsätze und schliesslich die Construktionen. Wo es nöthig erscheint, sind auch Lehrsätze und Bedingungen (determinationes) gegeben, unter welchen die Aufgaben möglich sind. Fälle, welche durch $+$ und $-$ unterschieden sind, werden einzeln behandelt. Die Bezeichnungsart ist jene des Viète. Die Zeichen $\pm$ sind überall angewendet. Die Multiplikation wird durch das Wort *in* ausgedrückt, die Division zumeist in Bruchform angegeben. Die Proportionen sind noch durch Worte geschrieben oder die Grössen einfach nebeneinander gestellt. Die Coëffizienten sind durch kleine Zahlen hinter den Buchstaben, das Quadrat durch den Buchstaben Q angegeben. Also z. B. die Proportion

$$A^2 : 2AB = \frac{x}{y} : 2m + n$$

wird wie folgt geschrieben:

$$\text{ut } AQ \text{ ad } A_2 \text{ in } B \text{ ita} \frac{x}{y} \text{ ad } m_2 + n,$$

oder mitunter auch einfacher:

$$AQ \quad A_2 \text{ in } B \quad \frac{x}{y} \quad m_2 + n.$$

Die Aufstellung der Aufgaben, die algebraischen und geometrischen Lösungen sind gewöhnlich so klar und deutlich gegeben, dass selbst der Anfänger, wenn er sich nur einmal die Bezeichnungsweise angewöhnt hat, das Buch gebrauchen könnte. Die uns vorliegende Ausgabe ist jedoch nicht ganz frei von Druckfehlern. Hin und wieder scheinen im Manuskript Lücken geblieben zu sein.

Einleitung zum I. Buch.

Marini Ghetaldi. De Resolutione et Compositione Mathematica. Liber Primus.

Omnes Mathematicae probationes vel a concessis ad quaesita, vel a quaesitis ad concessa progrediuntur. Quae a concessis progrediuntur ad quaesita, compositiones appellantur. Compositio enim est assumptio concessi per consequentia ad quaesiti finem, et compraehensionem quae vero a quaesitis progrediuntur ad concessa duplices sunt; vel enim concessa ponunt, vel destruunt; quae ponunt concessa, resolutiones vocantur: Est enim Resolutio, assumptio quaesiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Nam in resolutione id quod quaeritur, ut iam existens, et ut verum ponentes, per ea, quae deinceps consequuntur, procedimus ad aliquod concessum: quo opere quaesitam conclusionem, in proprias causas, per quas demonstratur reducimus: atque his resolutionibus compositiones opponuntur. Fieri enim potest, ut a concesso illo, per eadem resolutionis vestigia ad quaesitum revertamur. Quae vero destruunt concessa, deductiones ad impossibile nuncupamus. Deductio enim ad impossibile est assumptio eius quod quaesito contradicit tanquam concessi per consequentia, ad id, quod vero concesso oponitur. nam in deductione ad impossibile sumimus id quod quaesito contradicit, idq; supponentes progredimur, donec in aliquod absurdum incidamus, per quod suppositione destructa confirmetur id, quod a principio quaerebatur. Ex quibus patet Resolutionem a Deductione ad impossibile ratiocinatione tantum differre, nam utraque ab incognito ad cognitum eodem progressionis ordine procedit: sed Resolutio desinens in verum, concludit verum esse et quod supponitur: Deductio vero ad impossibile, desinens in falsum, falsum esse et quod supponitur arguit, et consequenter quaesitum verum esse.

Duplex autem est resolutionis genus alterum quidem ad Theoremata pertinet, eiusq; finis in sola veritatis inuestigatione consistit. alterum vero ad Problemata, cuius scopus est rationem constructionis, atque demonstrationis inuestigare: proposita enim Problemata construere docet, viamq;

ad constructionis demonstrationem ostendit. Sed omnia fere Theoremata, et Problemata, quae sub Algebram cadunt facillime resoluuntur, ac per resolutionis vestigia componuntur: non quidem vulgaris Algebrae beneficio; quae resolutionis vestigia omnino confundit; sed illius, cuius Auctor est Franciscus Vieta, vir certe de rebus mathematicis optime meritus: cui non solum nostra, sed etiã superior aetas haud scio an ullum huius scientiae laude parem, nedum superiorem inuenerit. etenim Resolutio procedens per species immutabiles, non autem per numeros mutationi, quacunque operatione tractentur, obnoxios; sua vestigia clara relinquit, per quae non est difficilis ad compositionem reditus: compositio enim in Problematibus, siue per Algebram, siue Antiquorũ methodo resolutis, a fine resolutionis, ad principium per resolutionis vestigia regreditur: in Theorematibus vero quorum veritas per Algebram exploratur, eodem ordine quo inuenta est Theorematis veritas, demonstratio procedit. At Theoremata vel Problemata, quae sub Algebram non cadunt qualia sunt ea, quae per comparationem angulorum demonstrantur, resoluuntur, et componuntur methodo ab antiquis tradita, cuius exempla extant in libris Archimedis, Apollonii, et Pappi, aliorũmq; veterum ac recentium. Et quamũis ea methodo omnia Theoremata et Problemata resolui, et componi possint; tamen ea, quae sub Algebram cadunt, pletumque facilius ac expeditius per Algebram resoluuntur, ac deinde per resolutionis vestigia componuntur. Haec omnia exemplis, atque etiam praeceptis ubi locus exiget perspicua fient. Primum igitur proponam. Exempla ad inuentionem Theorematum, eorumq; demonstrationem pertinentia; deinde ad resolutionem, et compositionem Problematum; primis enim quatuor Theorematibus in Problematum resolutionibus et compositionibus saepe utemur.

Im Folgenden geben wir den Gang der Propositio Prima und des Theorema I an und werden die übrigen zehn Lehrsätze nur kurz anführen.

Propositio Prima.

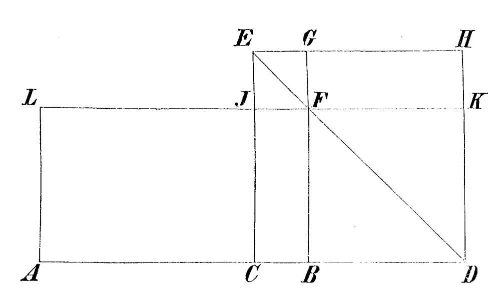
Eine gerade Linie wird in zwei beliebige Theile getheilt und über die Summe und die Differenz dieser zwei Theile ein Rechteck construirt. Wie lässt sich die Fläche dieses Rechtecks durch andere über die Theile dieser Linie construirte Flächen ausdrücken?

Es sei die gerade Linie in zwei Theile A und B getheilt, während $A > B$ ist. So hat man algebraisch $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. Die Fläche $A^2 - B^2$ ist also dem Rechteck gleich, welches mit $(A + B)$ und $(A - B)$ als Seiten construirt wird. Daraus wird gebildet der

Lehrsatz I.

Theilt man eine gerade Linie in zwei beliebige Theile, so ist das Rechteck, welches aus der Summe und der Differenz der beiden Abschnitte construirt wird, gleich der Differenz der über beide Theile construirten Quadrate.

Folgt nun der Beweis, welcher wie folgt geführt ist. Theilt man die gegebene Grade AB in zwei beliebige Theile AC, CB und verlängert man die AB bis D, so dass $CD = AC$ sei. Ich behaupte, dass das Rechteck aus AB und BD gleich der Differenz der Quadrate über AC und CB ist. Beschreibt man über CD das Quadrat CH und führt man die Diagonale DE, so schneidet diese die parallel mit CE gezogene BG im Punkt F. Durch F ziehe man die $KFL \parallel AB$. Ebenso construire man $AL \parallel DK$. Das Rechteck AJ ist gleich dem Rechteck BH, denn es ist $AC = DH$ und $CJ = BD$. Addirt man zu den Rechtecken AJ, BH das gemeinsame Rechteck BJ, so ergibt sich, dass das Rechteck AF gleich der Summe der Rechtecke CF und BH ist, daher AF gleich dem Gnomon $JFGHDCJ$. Aber das Gnomon gibt nichts anderes als die Differenz der Quadrate CH und JG. Das Rechteck AF ist also nichts anderes als die Differenz der Quadrate CH und JG, was zu beweisen war.



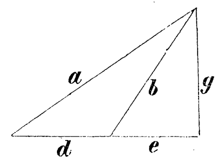
Dieser Lehrsatz kann auch folgendermassen aufgestellt werden:

$$(a + b)\ (a - b) + b^2 = a^2,$$

welche Beziehung im fünften und sechsten Lehrsatz des II. Buches der Euklidischen Elemente enthalten ist.

* * *

Die übrigen zehn Lehrsätze, welche jedesmal zuerst algebraisch ermittelt, dann geometrisch nachgewiesen werden, sind in der algebraischen Form folgende:



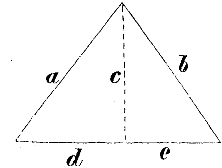
$(a - b)\ (a - b) = a^2 + b^2 - 2ab.$ Propositio II.

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$ „ III.

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2.$ „ IV.

Sind a, b, d die Seiten eines stumpfwinkligen Dreiecks, so hat man, wenn $g \perp d$ ist:

$a^2 = b^2 + d^2 + 2ed.$ Propositio V.



Sind a, b, d die Seiten, c die Höhe eines spitzwinkligen Dreiecks, so hat man:

$a^2 + 2de = d^2 + b^2$ Propositio VI.

Eine Gerade $2b$ ist in zwei Theile d und $(2b - d)$ getheilt, und zwar so, dass d die mittlere geometrische Proportionale zwischen $2b$ und $(2b - d)$ ist. Man hat: $2b : d = d : 2b - d$, woraus $4b^2 - 2bd = d^2$. Es ist aber: $(d + b)^2 = d^2 + b^2 + 2bd$ oder: $(d + b)^2 = 4b^2 - 2bd + b^2 + 2bd = 5b^2$.

Hat man daher: $2b : d = d : 2b - d$, so ist: $(d + b)^2 = 5b^2$ } Propositio VII.

Man hat aus obigem:

$$\left.\begin{array}{r} (d + b)^2 = 5b^2 \\ b^2 = b^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} d^2 + 2bd = 4b^2 \\ d^2 = 4b^2 - 2bd \\ d^2 = 2b(2b - d). \end{array}$$

Folgt daher: $2b : d = d : (2b - d)$.

Ist eine gerade Linie in zwei Theile b, d getheilt und ist das Quadrat des einen Theiles b der fünfte Theil des Quadrates der ganzen Geraden, so ist der andere Abschnitt d die mittlere geom. Proportionale zwischen $2b$ und $(2b - d)$ . . . Propositio VIII.

Eine Gerade sei nach stetiger Proportion getheilt und zwar so, dass der grössere Abschnitt $2b$, der kleinere d sei, dann hat man:

$(d + b)^2 = 5b^2$ . . . Propositio IX.

Eine Gerade b sei nach stetiger Proportion getheilt; der kleinere Abschnitt sei d; man hat:

$b^2 + d^2 = 3bd$ . . . . Propositio X.

Eine Gerade b ist nach stetiger Prop. getheilt; der grössere Abschnitt sei a. Man hat: $b : a = a : a - b$ oder $a : b = b - a : a$ und $a + b : b = b : a$. Propos. XI.

Es folgen nun die Construktionsaufgaben, welche algebraisch gelöst und sodann geometrisch construirt werden. Die algebraische Lösung nennt Ghetaldi „Resolutio“, die geometrische Construktion „Compositio“. Auch hier lässt die Klarheit der Darstellung und die Einfachheit der Entwickelung nichts zu wünschen übrig und es scheint uns, als ob wir ein für Mittelschulen bearbeitetes Lehrbuch vor Augen hätten. In Kurzem geben wir die gelösten Aufgaben an, ohne jedoch die Folgesätze anzuführen.

Problema I. Eine gerade Linie derart in zwei Theile zu theilen, dass $a - b = c$ sei.

II. Eine gegebene Gerade derart verlängern, dass die verlängerte Gerade zur Verlängerung ein gegebenes Verhältniss bilde. (Der gegeb. Theil muss $>$ als die Verlängerung sein)

III. Eine gegebene Gerade b um einen Betrag x verlängern, so dass das Verhältniss $b + x : b - x$ einem gegebenen Verhältniss $R : S$ gleich sei. (Der gegebene Theil muss kleiner sein als die Verlängerung.)

IV. Eine gerade Linie b in zwei Theile (x und $b - x$) derart zu theilen, dass $x^2 - (b - x)^2$ gleich einem gegebenen Quadrat sei.

V. Eine gegebene Gerade derart zu theilen (x und $b - x$), dass das Verhältniss $\frac{x\,(b - x)}{x^2}$ einem gegebenen Verhältniss gleiche.

VI. Eine gegebene Gerade derart zu theilen (x und $b - x$, $x > b - x$), dass $b\,(b - x) = 2\,a^2 - a\,b$ sei.

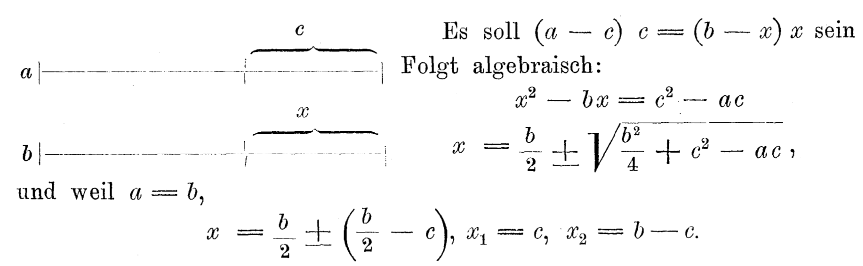
VII. Eine gegebene Gerade derart zu theilen (x und $b - x$), dass $x\,(b - x) = [x - (b - x)]^2$ sei.

Marini Ghetaldi de Resolutione et Compositione Mathematica. Liber Secundus.

Die Einleitung, welche wir nicht speciell anführen zu müssen glauben, zeigt, wie ein Bruch durch eine Proportion ausgedrückt werden kann. Einige Beispiele, welche angeführt werden, sind folgende: Der Bruch $\frac{b^2}{d} = a$, kann wie folgt zerlegt werden: $d : b = b : a$. Der Bruch $\frac{bd + gd}{a} = f$, in $a : (b + g) = d : f$ etc.

Die Propositionen fehlen hier und es werden sogleich die Lehrsätze behandelt, welche lauten:

Theorem I. Zwei gegebene Geraden werden derart getheilt, dass das Rechteck über die Abschnitte der ersten Geraden dem Rechteck über die Abschnitte der zweiten Geraden gleich sei.



Es soll $(a - c)\ c = (b - x)\ x$ sein
Folgt algebraisch:

$$x^2 - bx = c^2 - ac$$

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2 - ac},$$

und weil $a = b$,

$$x = \frac{b}{2} \pm \left(\frac{b}{2} - c\right),\ x_1 = c,\ x_2 = b - c.$$

Theorem II. Es sind die Geraden a und b gegeben und zwar $a = b$ und es soll: $c^2 + (a - c)^2 = x^2 + (b - x)^2$ sein, so wird auch $c = x$.

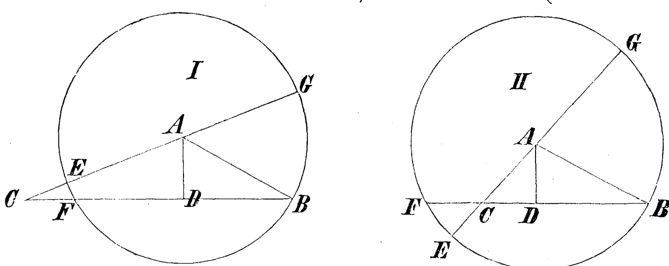
A |———— C ————| B
D |———— F ————| E

Theorem III. Macht man $AC = DF$ und ist $AC \,.\, AB = DE \,.\, DF$, so muss $AB = DE$ und $CB = FE$ sein.

Theorem IV. Macht man $AC = DF$ und es sei: $CB : FE = DE : AB$, so muss auch $CB = FE$ und $AB = DE$ sein.

Theorem V. Sind die Rechtecke $AC.\ CB$ und $DF.\ FE$ einander gleich und ist $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FE}^2$, so muss auch $AC = CB$ und $DF = FE$ sein.

Theorem VI. Ist ABC ein Dreieck, AD die Höhe (Fall I und Fall II)



und beschreibt man mit der Seite AB einen Kreis, welcher die Seite AC in E, die Basis in F schneidet, das Rechteck ECG wird dem Rechteck FCB gleich sein.

Theorem VII. Ist eigentlich nur ein Folgesatz des Theorem V, indem bewiesen wird, dass $EC : CF = CB : CG$.

Nun folgen die Construktionsaufgaben.

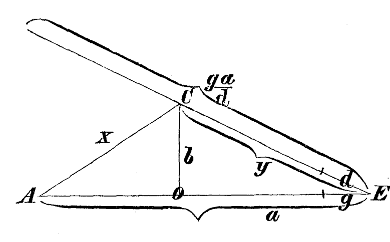
Problem I. Ein Rechteck zu construiren, welches einem gegebenen Quadrat gleich ist und dessen Seiten sich so verhalten wie $R : S$.

Die Quadratseite sei B. Ist A eine Seite des Rechtecks, so muss sein: $A : x = R : S$, daher die zweite Seite $x = \frac{AS}{R}$. Ferner laut Problem: $B^2 = Ax = \frac{A^2 S}{R}$, daher:

$$R : S = A^2 : B^2.$$

Problem II. Eine gegebene Gerade derart zu theilen, dass die Summe der Quadrate der Abschnitte sich zur Differenz dieser Quadrate wie $R : S$ verhalte.

Problem III. Es ist gegeben die Höhe eines Dreiecks, die Differenz der Basisabschnitte und die Differenz jener Seiten, welche den Scheitel der Höhe bilden. Es ist das Dreieck zu construiren.



Algebraische Auflösung nach Ghetaldi. Gegeben die Höhe b; die Differenz der Seiten CE und AC sei d und die Differenz der Basissegmente sei g. Man nimmt die Aufgabe als gelöst an und es sei a die Basis des gesuchten Dreiecks. Man hat zuerst: $d : g = a : x$, woraus $x = \frac{ag}{d}$ und daher: $d : g = a : \frac{ag}{d}$. Nun ist aber zufolge Buch I Theorem IV:

$\frac{g^2a^2}{d^2} + d^2 = 2x^2 + 2y^2$ und $2x^2 + 2y^2 = 2AO^2 + 2OE^2 + 4b^2$ daher:
$\frac{g^2a^2}{d^2} + d^2 = 2AO^2 + 2OE^2 + 4b^2$ aber $2AO^2 + 2OE^2 = a^2 + g^2$ daher
$\frac{g^2a^2}{d^2} + d^2 = a^2 + g^2 + 4b^2$ und: $\frac{g^2a^2}{d^2} - a^2 = 4b^2 + g^2 - d^2$, oder endlich $\frac{g^2a^2 - a^2d^2}{d^2} = 4b^2 + g^2 - d^2$, welche Gleichung in eine Proportion verwandelt gibt: $g^2 - d^2 : 4b^2 + g^2 - d^2 = d^2 : a^2$
und:

$$\sqrt{g^2 - d^2} : \sqrt{4b^2 + g^2 - d^2} = d : a.$$

Diese Aufgabe hat Ghetaldi auch im Apollonius behandelt, wofür ihm Cyriacus den Vorwurf machte, bei derselben keine genaue Beweisführung geliefert zu haben, indem die Aufgabe unter Umständen auch unmöglich werden könnte. Diesen selben Vorwurf machte übrigens Cyriacus auch dem Franz Viète, ohne, wie es scheint, das Problem genauer beachtet zu haben, da er sich sonst überzeugt hätte, dass die unmöglichen Fälle einleuchtend sind und keiner näheren Erklärung bedürfen. Ghetaldi, welcher die Veröffentlichung seines Werkes nicht mehr erlebt hat, benutzte diese Stelle, um sich und Viète gegen die Angriffe des Cyriacus zu wahren. Auch benutzte Ghetaldi dieselbe Gelegenheit, um Viètes Problem auseinanderzusetzen.

Problem IV. Gegeben die Höhe eines Dreiecks, die Summe der zwei Seiten wovon keine die Basis ist und die Differenz der Basissegmente; es soll das Dreieck construirt werden.

Problem V. Gegeben die Differenz der Basissegmente eines rechtwinkligen Dreiecks und die Differenz der Katheten, das Dreieck zu bestimmen.

Problem VI. Gegeben die Differenz der Basissegmente eines rechtwinkligen Dreiecks und die Summe der Katheten, das Dreieck zu bestimmen.

Problem VII. Gegeben die Differenz der Seiten eines Dreiecks und die Differenz der Basissegmente, gegeben ferner die Differenz der grösseren Seite, welche in der Differenz einbegriffen ist, mit der dritten Seite das Dreieck zu bestimmen.

Sind a, b, c die Seiten, m, n die Basissegmente und ist $a > b$, so ist gegeben: $a - b$, $m - n$ und $a - c$. Hier werden vier mögliche Fälle behandelt.

Problem VIII. Gegeben die Basis eines rechtwinkligen Dreiecks und die Differenz der Katheten; es ist das Dreieck zu bestimmen.

Problem IX. Problem VIII aber anstatt der Differenz die Summe der Katheten.

Marini Ghetaldi de Resolutione et Compositione mathematica. Liber Tertius.

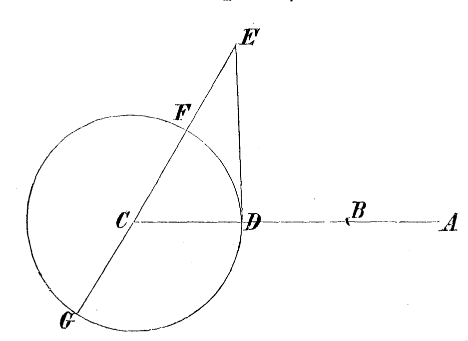
Im III. und IV. Buch kommen unreine Gleichungen zur Behandlung. Die geometrische Construktion der Gleichungen zweiten Grades wird hier zuerst durch einige Lehrsätze (Canones) erläutert. Wir geben die Einleitung dieses Capitels wortgetreu wieder.

De ijs, que ad Resolutionem, et Compositionem pertinent, existentibus simplicibus laterum, aut quadratorum aequationibus; superioribus libris satis me dixisse censeo. Venio nunc ad explicanda ea, quae in Resolutionibus, et Compositionibus occurrunt, quando in aequationibus quadrata affectionibus implicantur. Sed prius dicam quomodo huiusmodi aequationes explicentur.

Multi sane auctores de explicandis quadratorum affectorum aequationibus scripserunt, ijque omnes praeter Diofantum, ac Petrum Nonium, una eademque Methodo, aut parum distanti utuntur, quamuis diversas afferent demonstrationes. Diofantus quidem non curat quadratum aequationis a comite, hoc est a data magnitudine in quam ductum est liberare, ut ex se subsistat, quemadmodum notat Bachetus, sed praecipit duci homogeneum comparationis in eundem comite quadrati, et reliqua perfici, ut suo loco dicetur. quo fit ut magnitudines ad plano plana ascendant, ac proinde longiori operatione, et ad geometricas compositiones minime apta aequatio

explicetur. Petrus autem Nonius sumit totam coefficientem longitudinem, non autem dimidiam prout communis Methodus docet; sumit quoque quadruplum homogeneum comparationis, et sic explicata aequatione exhibet duplum latus quaesitum, ex quibus Compositio fit dificilior. hanc Methodum Nonius excogitavit, ut fractiones numerorum vitaret, quae quoniam in Geometricis locum non habent, nihil est quod nos cogat ea Methodo uti. Communi igitur Methodo, quae est simplicissima utar, eamque Geometrica ratione demonstrabo, alijs tamen medijs, atque alij scriptores; per haec enim media commodior a Resolutione ad Compositionem fit regressus, ipsaque Compositio clarus, ac facilius demonstratur, ut exemplis manifestum fiet.

Canon primus. Ist $a^2 + ab = z^2$, so hat man nach den Regeln der Algebra: $a = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{z^2 + \frac{1}{4} b^2}$. Folgt nun die geometrische Darstellung.



Soll $AB^2 + AB \, . \, CB = DE^2$ sein, so theile man die BC in zwei Theile und errichte die $DE \perp CB$. Von C aus beschreibe man mit dem Halbmesser CD einen Kreis und verbinde C mit E. Man hat dann $\overline{DE}^2 = EF \, . \, EG = EF \, (EF + FG) = EF^2 + EF \, . \, FG$.

Daher: Forderung

$$AB^2 + AB \, . \, CB = DE^2.$$

Nachgewiesen . . . $EF^2 + EF \, . \, FG = DE^2$.

Weil aber $CB = 2CD = 2CF = FG$ folgt $EF^2 + EF \, . \, CB = DE^2$. Schliesslich also EF die Gesuchte AB.

Canon secundus. $a^2 - ab = z^2 \, . \, . \, . \, . \, . \, a = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} b^2 + z^2}$.

Canon tertius. $ab - a^2 = z^2 \, . \, . \, . \, . \, . \, a = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} b^2 - z^2}$.

Die gelösten Aufgaben sind folgende:

1. Gegeben eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks und die Differenz der Basissegmente, das Dreieck zu bestimmen.

Diese Aufgabe liefert zwei Construktionsfälle. Ist die grössere Kathete gegeben, so muss die Differenz der Basissegmente kleiner sein als die gegebene Kathete; der zweite Fall, wenn die kleinere Kathete gegeben ist, bleibt immer bestimmt und enthält drei verschiedene Auflösungen.

2. Gegeben eine Kathete und das nicht anliegende Basissegment. Drei Auflösungen.
3. Gegeben die Differenz der Katheten und die Höhe.
4. „ „ Summe „ „ „ „ „

5. Eine gerade Linie nach stetiger Proportion zu theilen.
6. Es sind ein Kreis und ein Punkt gegeben. Man soll über diesen Punkt eine Secante von gegebener Länge ziehen. Die beiden Fälle, der Punkt ist innerhalb oder ausserhalb des Kreises, sind beide erläutert.
7. Gegeben ein Halbkreis mit seinem Diameter und eine auf den Halbmesser errichtete Senkrechte. Es soll vom Endpunkte dieser Senkrechten eine gerade Linie derart gezogen werden, dass der Abstand von der Peripherie des Kreises einer gegebenen Geraden gleich sei. — Es sind 6 Fälle möglich, welche alle erläutert werden. Wie jedesmal, so wird auch hier stets angegeben, unter welchen Umständen die Aufgabe unbestimmt bleibt.

Marini Ghetaldi de Resolutione et Compositione mathematica. Liber Quartus.

Enthält die Fortsetzung der quadratischen Gleichungen, von welchen die schwierigeren Fälle behandelt werden. Die Lehrsätze, welche den Constructionsaufgaben vorangehen, sind folgende:

Theorem 1. Hat ein inneres oder ein äusseres Glied einer Proportion einen grösseren Werth als die anderen Glieder, so ist das zweite innere oder äussere Glied kleiner als alle anderen Glieder. Der Beweis wird einfach auf folgende Art geführt: Hat man $a : b = c : d$ und ist a das grösste Glied, so ist offenbar auch $a > b$ und damit die Proportion bestehe, auch $c > d$. Nun ist aber auch $a > c$, daher auch $b > d$, folglich $d < b$ und $d < c$ oder d das kleinste Glied.

Theorem 2. Ist die Summe der äusseren Glieder eines Verhältnisses grösser als die Summe der inneren Glieder, oder die Differenz der ersteren grösser als die Differenz der letzteren, so sind die äusseren Glieder das eine das grösste, das andere das kleinste Glied der Proportion. Dasselbe gilt natürlich auch bezüglich der inneren Glieder, wenn ihre Summe oder Differenz grösser ist als jene der äusseren Glieder.

Theorem 3. Ist die Summe oder Differenz der inneren Glieder gleich der Summe oder der Differenz der äusseren Glieder, so ist das grössere äussere dem grösseren inneren, das kleinere äussere dem kleineren inneren Glied gleich.

Die gelösten Aufgaben sind nun folgende:

---

1) Der Beweis wird nicht geführt, da dieser Lehrsatz in Euclides bewiesen wird („hoc manifestum est ex propos. 36 et 35 tertis elementorum“).

Problem I. Es ist ein Quadrat zu bestimmen, welches sich zu einem gegebenen Quadrat wie $a : b$ verhalte.

Problem II. Es sind zwei Halbkreise gegeben, deren Halbmesser sich auf derselben geraden Linie befinden. Es soll von einem Endpunkte der Basis dieser Halbkreise eine gemeinschaftliche Sekante derart gezogen werden, dass der Abschnitt dieser Sekante, welcher zwischen den Peripherien der beiden Halbkreise enthalten ist, einer gegebenen geraden Linie gleich sei.

Die vielen Fälle, welche hier möglich sind, findet man im Apollonius redivivus behandelt. In den Comp. et Resol. sind nur achte derselben gelöst. Dieses Problem nimmt volle 130 Seiten des Werkes ein.

Problem III. Gegeben die Basis eines Dreiecks und die Differenz der Schenkel mit der Höhe. Das Dreieck zu bestimmen.

Am Ende dieses Buches wird als Anwendung des III. Problems ein Vorschlag gemacht, wie man den Durchmesser der Erde bestimmen könnte. Die gegebenen Lösungen sind jedoch keiner Richtigkeit fähig.

Marini Ghetaldi de Resolutione et Compositione Mathematica. Liber quintus.

Ist in vier Capitel getheilt. Im ersten Capitel sind jene Aufgaben behandelt, welche keine geometrische Lösung erfordern. Im zweiten die unmöglichen Aufgaben (Problemata impossibilia, ex quorum Resolutionibus cognoscitur eorum impossibilitas). Im dritten sucht er die Aufgaben zu behandeln, welche *vana*, *seu negatoria* sind und quorum Resolutiones indicant talia esse Problemata. Endlich im vierten jene Aufgaben, *quae sub Algebram non cadunt* und welche somit so gelöst werden, wie es noch die Alten thaten.

Dieses Buch wird uns wohl am meisten zu reden geben.

I. Abschnitt. Hier ist das bekannte Archimedische Verfahren behandelt (wovon Vitruv im 3. Cap. des IX. Buches berichtet) um die Menge Goldes und Silbers in der Krone des Hiero von Syrakus zu bestimmen. Andere, dieser ähnlichen, Aufgaben kommen ebenfalls zur Sprache. Zu diesem Abschnitt gehören auch einige Aufgaben aus der arithmetischen Progression, welche, wie Kästner sagt, zu Beginn des XVII. Jahrhunderts „noch nicht bequem ist behandelt worden.“ Der eigentlichen Aufgabe lässt Ghetaldi vier Lehrsätze vorangehen, welchen das eigentliche II. Problem folgt. Letzteres lautet: Es sind mehrere Geraden gegeben, welche einander um gleiche Unterschiede übertreffen. Man kennt die kürzeste und die längste derselben, sowie die Länge, welche alle diese Geraden zusammengenommen ausmachen. Es soll jede einzelne dieser Geraden bestimmt werden.

Die Lösung nach arithmetischer Progression würde sehr einfach sein, indem das erste und letzte Glied, sowie die Summe aller Glieder bekannt ist, und man die Differenz sucht. Die Lösung nach Ghetaldi ist aber folgende:

Nach Ghetaldi.

Sind die betreffenden Grössen a_1, a_n, d und s_n, so hat man aus den vorangehenden Lehrsätzen:

$$2s_n : a_1 + a_n = a_n - a_1 + d : d$$

Aus der Proportion folgt.

$$2s_n d = a_1 a_n + a_n^2 - a_1^2 - a_1 a_n + a_1 d + a_n d$$

$$2s_n d = a_n^2 + a_n d - a_1^2 + a_1 d$$

$$2s_n d - a_n d - a_1 d = a_n^2 - a_1^2$$

und

$$d(2s_n - a_n - a_1) = a_n^2 - a_1^2$$

woraus:

$$2s_n - a_n - a_1 : a_n + a_1 = a_n - a_1 : d.$$

Nach der arithmetischen Progression.

welche Prop. man auf folgende Art erhält:

Es ist $2s_n = (a_1 + a_n)n$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

daher $nd = a_n - a_1 + d$

und $n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$

wodurch

$$2s_n = (a_1 + a_n)\frac{a_n - a_1 + d}{d}$$

oder

$$2s_n : a_1 + a_n = a_n - a_1 + d : d$$

Aehnlicher Aufgaben werden noch mehrere gelöst.

II. Abschnitt. Problemata impossibilia, ex quorum Resolutionibus cognoscitur eorum impossibilitas — diese Aufgaben sind folgende:

1. Eine gerade Linie so zu schneiden, dass das Rechteck unter ihren Theilen mit dem Quadrate des Unterschiedes der Theile so viel betrüge als der Theile Quadrat.

Die gegebene Linie sei $2b$ und der Unterschied der Theile $2a$, also die Schnitte $b + a$ und $b - a$. Es wird nun verlangt, dass: $(b + a)(b - a) + (2a)^2 = (b + a)^2 + (b - a)^2$ sei.

Löst man diese Gleichung für b, so erhält man: $b = a$ *quod est absurdum.* In der That ist diese Theilung nicht möglich, da der Schnitt dem

Ganzen gleich sein müsste. Aehnliches ergibt die Lösung folgender, im selben Abschnitt enthaltenen Aufgaben.

2. Eine Grade a derart theilen, dass $3x(a-x)+(2x-a)^2=a^2$ sei.

3. „ „ „ „ „ „ $a(a-2x)+x^2=a(a-x)$ „

4. „ „ „ „ „ „ $a(a-2x)=(a-x)^2$ „

5. „ „ „ „ „ „ $2a(a-x)=a^2+(a-x)^2$ „

6. Es ist die Grundlinie eines Dreiecks gegeben. Die Differenz der Basissegmente soll das Doppelte der Differenz der unbekannten Seiten betragen, und die Differenz der Seiten soll doppelt so gross als der Unterschied zwischen der grösseren Seite und der Basis sein.

7. Eine Gerade a derart theilen, dass $\frac{a(a-x)}{2}+a(a-x)=a^2+(a-x)^2$ sei.

8. „ „ „ „ „ „ $2a(a-x)=a^2+2(a-x)^2$ „

9. „ „ „ „ „ „ $3x(a-x)=a^2.$ „

III. Abschnitt. Problemata vanum, seu nugatorium appellatur, cum id quod Problema fieri iubet quacumque ratione fiat Problemati satisfit, vel cum Problema infinitis modis construi potest. So der Wortlaut des Textes. Dazu muss aber bemerkt werden, dass diese beiden Erklärungen durchaus nicht gleichgültig sind, und es ist anzunehmen, das Ghetaldi eine solche Verwechslung nicht übersehen hätte, wenn er die Drucklegung des Manuskriptes noch erlebt hätte. Es gibt viele Aufgaben, welche auf unzählige Arten gehen, nicht jedoch auf jede. Die Lösung der bezüglichen Aufgaben führt auf identische Gleichungen.

1. Eine gegebene Gerade ist derart zu theilen, dass das Rechteck über die ganze Gerade und über die Differenz der Theilungsschnitte, und das Quadrat des kleineren Theilungsschnittes zusammengenommen, dem Quadrat des grösseren Schnittes gleich sei. Man hat:

$$a(a-2x)+x^2=(a-x)^2$$
$$a^2-2ax+x^2=(a-x)^2$$

eine identische Gleichung.

2. Es soll

$$(a-x)^2+x^2=(a-2x)^2+2x(a-x)^2 \text{ sein.}$$

3. $$x(a-x)+\frac{(a-2x)^2}{2}=\frac{a^2}{4}$$

4. Ueber eine gegebene Basis ist ein Dreieck derart zu construiren, dass die Differenz der zwei Schenkel der halben Basis gleich sei.

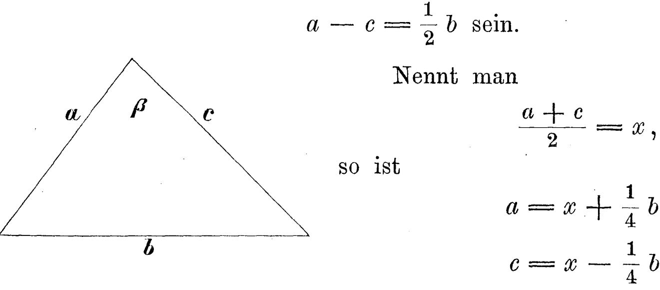
Ghetaldi erhält hier eine identische Gleichung und verwechselt stark die unbestimmte mit der unnützen Aufgabe. Da Kästner diesen Fall sehr ausführlich behandelt hat, so wollen wir seine Bemerkung folgen lassen. „Wenn Ghetaldi sagt: „Problema vanum ac nugatorium, nam super eadem

base innumera triangula constituentur, in quibus differentia crurum aequalis erit dimidiae basi, ut in hac quae sequitur compositione perspicuum erit" und dieses nun durch eine Construktion zeigt, so nennt er unnütz, was unbestimmt ist."

„Ich will die Auflösung nach meiner Art vortragen, den Satz, welchen ich dabei brauche, vom Verhalten zwischen den Seiten eines Dreiecks und einem Winkel, hat freilich Ghetaldi nicht angewandt."

Folgende ist die Auflösung nach Kästner. Es soll

$$a - c = \frac{1}{2} b \text{ sein.}$$



Nennt man

$$\frac{a + c}{2} = x,$$

so ist

$$a = x + \frac{1}{4} b$$

$$c = x - \frac{1}{4} b$$

und

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

oder

$$2x^2 + \frac{1}{8} b^2 - 2\left(x^2 - \frac{1}{16} b^2\right) \cos \beta = b^2$$

Da man hier zwei Unbekannte x und β hat, so findet man, wenn β beliebig genommen wird:

$$x = \frac{b \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\beta}{2}}}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$$

oder wenn x nach Gefallen gewählt wird:

$$\cos \beta = \frac{1 - \frac{7}{16} \frac{b^2}{x^2}}{1 - \frac{1}{16} \frac{b^2}{x^2}}$$

5. Ueber eine gegebene Basis ist ein Dreieck derart zu construiren, dass die Differenz der Basissegmente der doppelten Differenz der zwei Seiten gleich sei. — Eine ebenfalls unbestimmte Aufgabe.

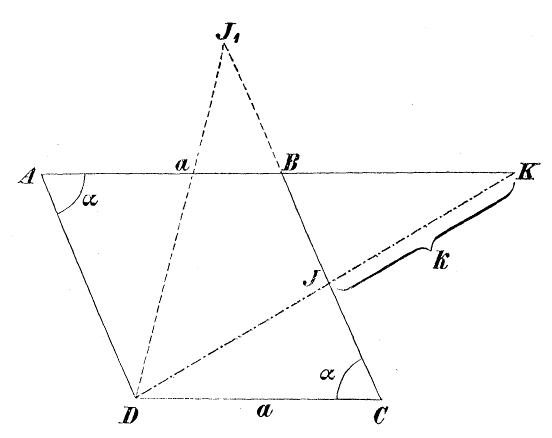
IV. Abschnitt. De Resolutione et Compos. Problematum, quae sub Algebram non cadunt. So leitet Ghetaldi den letzten Abschnitt seines Werkes ein: Exempla Resol. et Comp. sub Algebram non cadentium, extant multa in libris Pappi Alexandrini, et Apollonji Pergaei, et Archimedis; quare potui ad ea exempla studiosos remittere, nisi quod institutio mei operis hanc quoque sui partem desiderabat; subijciam igitur aliquot Pro-

blemata, quae sub Algebram non cadunt, eaque resolvam, et componam, methodo, qua veteres in resolvendis et componendis omnibus Problematibus utebantur.

Hier handelt es sich also um Aufgaben, deren algebraische Lösung Ghetaldi nicht gekannt hat. Die erste dieser Aufgaben ist:

1. Es ist ein Rhombus gegeben, von welchem eine Seite verlängert wird. In dem Aussenwinkel, der dieser Art entsteht, ist eine Gerade von gegebener Länge derart zu legen, dass sie verlängert durch jenen Winkel gehe, welcher dem Winkel gegenüber liegt, über dessen Spitze die Seite verlängert wurde. (Rombo dato, et uno latere producto aptare sub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quae ad oppositum angulum pertingat.)

Ghetaldi gibt von der Aufgabe eine geometrische Analysis, dann die Construktion und den Beweis dazu. Alles jedoch nach Art der Alten noch. Kästner hat die Aufgabe folgendermassen gelöst.



Die Seite AB wird also verlängert, und es soll die DK derart gezogen werden, dass JK einer gegebenen Länge k gleich sei. Es ist $BC = a$. Setzen wir $CJ = \frac{1}{2}a + x$, so ist $BJ = \frac{1}{2}a - x$.

Es ist ferner, weil $AD \parallel BJ$:

$$KJ : JB = KD : AD$$

oder

$$k : \frac{1}{2}a - x = k + DJ : a$$

woraus folgt:

$$\alpha) \qquad DJ = \frac{\left(\frac{1}{2}a + x\right)k}{\frac{1}{2}a - x}$$

$\triangle DCJ$ gibt:

$$\beta) \qquad DJ^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}\,a + x\right)^2 - 2\,a\left(\frac{1}{2}\,a + x\right)\cos\alpha$$

Setzt man die Werthe α) und β) nach Quadrirung von α) einander gleich, so erhält man eine Gleichung des vierten Grades. Es gibt also vier Werthe von x, welche einer solchen Gleichung genügen. Um diese Werthe zu erklären*) denke man sich die Gerade DK um den festen Punkt D derart gedreht, dass sie mit DC alle möglichen Winkel von 0 bis 360^0 einschliesse. Bei der Drehung von 0^0 bis zum Winkel CDB wird es eine Lage der Linie geben, für welche $JK = k$ sein wird. Setzt man die Drehung fort, so wird es bis zum Winkel CDA eine andere Lage der DK geben, für welche ihre Verlängerung von der Seite AB bis zur Begegnung mit der verlängerten $BC = k$ wird, und somit einen zweiten Werth von x. Denkt man sich eine zweite Gerade CD um den Punkt C gedreht, so erhält man auch zwei Durchschnitte mit der Seite DA und dadurch noch fernere zwei Werthe von x. Während also die Gleichung sogleich alle vier möglichen Fälle angibt, löst und betrachtet Ghetaldi einen einzigen derselben, welcher sich eben in der Figur von den übrigen aussondern lässt.

Die anderen Aufgaben, welche behandelt werden, sind folgende:

2. Es ist ein Rhombus $ABCD$ (frühere Figur) gegeben. Es soll vom Punkte C aus eine Gerade derart gezogen werden, dass jene Strecke derselben, welche von der Verlängerung der Seiten AB und AD begrenzt wird, einer gegebenen Gerade gleich sei. Natürlich muss die gegebene Strecke grösser sein als die über C auf AC geführte Senkrechte zwischen den verlängerten Seiten AB und AD.

3. Gegeben die Basis eines Dreiecks, die Differenz der beiden anderen Seiten und der von letzteren eingeschlossene Winkel.

4. Wie 3. nur anstatt der Differenz die Summe der Seiten.

5. Gegeben die Differenz der Basissegmente, die Summe der zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel.

6. Wie 5. nur anstatt der Summe die Differenz der zwei Seiten.

7. Gegeben eine Seite, ein anliegender Winkel und die Differenz der zweiten einschliessenden Seite und der Basis.

8. Wie 7. nur anstatt der Differenz die Basis.

Alle diese Aufgaben, zu deren Lösung Ghetaldi eine Menge Sätze aus Euklides braucht, lassen sich mit Zuhilfenahme der trigonometrischen Funktionen sehr leicht lösen.

Dieser der Inhalt des Werkes „de Resol. et Comp. mathematica“, welches wir nun besprechen wollen.

---

*) Lösung und Erklärung nach Kästner.

III.

Das Werk des Marino Ghetaldi „De Resolutione et Compositione Mathematica“ hat ohne Weiteres eine Menge Schriftsteller dazu veranlasst, diesen Gelehrten, welchen wir nunmehr allerdings als einen der berühmtesten Mathematiker des XVI. und der ersten Dezennien des XVII. Jahrhunderts kennen gelernt haben, als den Entdecker der analytischen Geometrie zu proklamiren. Es sei hier gleich bemerkt, dass *Montucla*, der bekannte Verfasser der *Histoire des sciences mathematiques*, ein leidenschaftlicher Franzose, welcher ausser sich geräth, sobald er auf Descartes und auf die ihm vorgebrachten Beschuldigungen zu sprechen kommt, unserem Ghetaldi die Ehre zulässt „in der Geometrie der Alten sehr bewandert gewesen zu sein.“ Ein ähnliches schreibt auch Kästner, der jedoch die *Comp. et Resolut.* „ganz nach dem Verfahren der griechischen Geometer, nur dass in der Analysis Buchstabenrechnung angewendet wird“, hehandelt findet.

Hören wir nun die Meinung anderer Autoren.

Ljubić sagt in seinem „*Dizionario biografico degli illustri Dalmati*“ ad vocem Ghetaldi: In quest' opera (de Resolut. et comp. Mathem.) sette anni prima che uscisse in luce la Geometria o piuttosto l'algebra di Cartesio, Marino applicava l'algebra alla geometria, e quindi si meritò di aver distinto posto tra quelli uomini grandi, a cui le scienze sono debitrici dei loro maravigliosi progressi. Con tal veste spinse egli la risoluzione delle equazioni determinate fino al quarto grado. Hier müssen wir sofort eine bedeutende irrthümliche Beurtheilung des Werkes hervorheben, indem Ghetaldi die Gleichungen des IV. Grades eben nicht aufgelöst hat und die bezüglichen Aufgaben als solche qualificirte, welche sub algebram non cadunt. Ebensowenig hat er die cubischen Gleichungen zur Sprache gebracht. Ljubić hat also das Werk nicht gekannt und daher die Bedeutung desselben übertrieben.

Cusani. La Dalmazia. Milano. Pirotta 1846, Band I. Seite 271 erwähnt nur kurzweg „Al Ghetaldi si attribuisse il merito d'aver primo applicata l'algebra alla geometria, e l'analisi alle Curve.

Auch hier also ein bedeutender Irrthum, indem sich Gh. mit der Untersuchung der Curven gar nicht beschäftigt hat.

Appendini. Notizie sulla storia e letteratura dei Ragusei. Band II. S. 44 ff. „Tutti generalmente attribuiscono a Cartesio la lode di avere il primo applicata l'algebra alla geometria, nel che volendo essere troppo parziali per il gran matematico francese si mostrano ingiusti col Raguseo. Egli è indubitabile che Cartesio fù il primo ad applicare le analisi alle curve e di dimostrarne le proprietà costruendo le equazioni superiori al

secondo grado. Ma è certo egualmente indubitato, che il primo passo, dirò così fu fatto da Marino Ghetaldi colla costruzione delle equazioni del primo e secondo grado.

In der *Galleria degli illustri Ragusei*, *Martechini 1841*, lesen wir: „sotto gli auspici del porporato, uscì alla luce l'opera stessa (de comp. et resol. math.), nell' anno 1630, sette anni prima che Cartesio facesse fare il più gran passo alla scienza coll' applicare l'analisi alle curve e alla dimostrazione delle loro proprietà. La prima spinta a questo passo gigantesco fu data in una guisa la più potente e luminosa dal Ghetaldi, anzi la grande scoperta era gia fatta da lui, quando venne alla luce la grand' opera del Cartesio; e certamente se il Ghetaldi fosse vissuto di più, avrebbe portato sempre più innanzi i suoi gloriosi trovati e potea nascere fra il geometra raguseo e quello della Turena, una gara non dissimile dall' altra che nel secolo XVIII pose in guerra i partigiani dei due grandi matematici della Germania e della Gran Brettagna per decidere quale dei due fosse l'inventore del calcolo differenziale.

Auf Seite 6 einer Broschüre mit dem Titel „*Nave Rugusea*" *Italia 1819*, findet man folgende Stelle: „Noi non parleremo delle opere di Ghetaldi, che raccomandano alla posterità i di lui superiori talenti; di queste se ne da contezza dagli eruditi scrittori di ogni tempo. La sua opera de Resolut. et comp. Mathematica etc., fa vedere l'applicazione della Geometria alla risoluzione delle equazioni determinate fino al quarto grado, opera, che segnò al gran Cartesio le tracce meravigliose di spiegare colle equazioni algebraiche, la natura e proprietà delle curve, allorchè per la prima volta publicò la sua geometria in Parigi nel 1637. Nach dem unbekannten Autor dieser kurzen Biographie des Ghetaldi hätte also letzterer dem Cartesius die Bahn vorgezeichnet, welcher er bei der Entdeckung der Analysis der Curven gefolgt wäre. Dieselbe Broschüre enthält eine Elegie, welche gelegentlich der Stapellassung eines Schiffes mit dem Namen „Marino Ghetaldi" verfasst wurde, und worin zu lesen ist:

„Perge inde ad Gallos, et cur, dic, Gallia cur te
Gallia magnorum magna Virum genitrix
Mirandis praestantem orsis, nec laudem egentem
Invidiae stimulis laus aliena ferit?
Ecce suis qui Cartesium ad majora repertis[1])
Impulit, ignotas edocuitque vias,
Et tu tam pulchros retices non aequa labores,[2])
Dum cives merito tollis ad astra tuum?
Talibus, atque aliis tibi cura sit usque Ghetaldi,
Quoquo ieris, famam extendere, cara Ratis etc.

Ad 1) und 2) sind folgende Anmerkungen gesetzt:

1) Vide Riccatum et Wolfium. Primus acceptam refert Ghetaldo perfectam rationem, qua aequationes primi et secundi gradus, postquam resolutae fuerint, ad Constructionem Geometricam duci possunt, earumque radices reales determinari. Alter autem, Ghetaldum facem Cartesio praetulisse, aperte asserit.

2) Clar Montucla, qui in eximia sua rerum Mathematicarum Historia *insignem Mathematicum*, et Tractatus de *Inclinationibus Restitutorem* vocat Ghetaldum, quin tamen memoret *Apollonium redivivum, Archimedem promotum,* et opera de *Luce et Iride,* loquens de *Constructionibus Geometricis* non solum de Ghetaldo nostro nullam mentionem facit, sed Cartesianae laudis plus aequo studiosus, celeberrimum etiam praeterit Ghetaldianum opus de Comp. et Resol. Math. editum Romae 1630, septem nimirum ante annos, quam Cartesius suam ederet Geometriam.

Giulio Bajamonti sagt auf Seite 6 seines *Elogio dell' Abate Ruggiero Giuseppe Boscovich* II. Auflage. Neapel MDCCXC. Presso Donato Campo: „Marino Ghetaldi, patrizio Raguseo nel cominciamento del passato secolo, promosse le dottrine di Archimede sulla Gravità e grandezza dei vari generi di corpi, trovò parecchie nuove proposizioni sulla parabola e venne a delineare le prime tracce della scienza analitica.“

Ein ganz neues Werk: *Ragusa*, *Cenni storici compilati da Stef. Skurla. Agram 1876* enthält die Notiz: . . . Marino Ghetaldi, chiamato dall' acuto Paolo Sarpi angelo di costumi e demonio in matematica, fù il primo che abbia applicata l'algebra alla geometria.

Viel vorsichtiger als alle die genannten Autoren war *G. Alessandro Goracuchi*, welcher in der Ecloga per l'anno *MDCCCLXXVIII* unter *sommità letterarie ragusee* nur einfach anführt: „Ed in vero incominciando da quella parte dello scibile umano che a buon diritto vien detta la scienza per eccellenza, Ragusa ebbe un Marino Ghetaldi, che prima di Cartesio stampava le sue osservazioni sull' applicazione dell' algebra alle costruzioni geometriche.“

Alle diese Urtheile sind mehr oder weniger durch eine Bemerkung des *Riccati* entstanden, welcher sich über die Anwendung der Algebra auf die Geometrie, wie folgt ausdrückte: Haec pars, nondum absoluta, ac penitus et voluta est, nisi a Marino Ghetaldo Ragusino in opere posthumo inscripto: De comp. et resol. mathem. ecc. Ineo siquidem dilucidam Methodus ediscitur, qua aequationes primi et secundi gradus, postquam resolute fuerint, ad geometricam constructionem duci possunt, earumque radices reales determinari. Ebenso vortheilhaft drückt sich im Sinne des Ghetaldi *Wolf* in seinem *De scriptis mathematicis* Cap. IV, §. 5 aus, wo er sagt: Cartesius

arithmeticam litteralem et regulas algebrae descripsit ex Harrioto, et *quemadmodum* Oughtredus in Clave, atque Marinus Ghetaldus in libris quinque de resolutione et compositione mathematica, arithmetica Vietam ad geometriam elementarem applicarunt, et constructiones aequationum simplicium ac quadraticarum dederunt; ita ipse (Cartesius) Harriotoeam ad geometriam sublimiorem transferens, curvarum naturam, per aequationes algebraicas explicare coepit etc. Letztere Bemerkung veranlasste den Professor der schönen Literatur an der Universität zu Pavia „Vincenzo Monti“ in seinen Vorlesungen im J. 1803 sich ziemlich scharf über den Cartesius auszudrücken, welchem er vorwirft, dem bekannten Spruch: benignum est et plenum ingenui pudoris fateri per quos profeceris, niemals gefolgt zu sein.[1])

Wir glaubten, dass eben diese Meinungen verschiedener Historiker unsere Leser interessiren werden, da sie ein deutliches Bild des Urtheiles enthalten, welches in vielen Kreisen bezüglich der Entdeckung der analytischen Geometrie herrscht, und weil — wie es uns dünkt — der Mühe werth ist, sich zu überzeugen, wie eine irrthümliche Bemerkung eines Geschichtschreibers von Jahrhundert zu Jahrhundert verschleppt wird. Ausserdem nehmen wir es uns vor, durch die gegenwärtige Abhandlung die Irrthümer in der Beurtheilung der Verdienste des Ghetaldi bezüglich der Anwendung der Algebra auf die Geometrie zu beheben und womöglich den wahren Werth des Werkes de resol. et comp. etc. festzustellen, ein Grund mehr um die Quellenangaben anzuführen, welche wir zu widerlegen gedenken.

IV.

Wollen wir über Gethaldi's Werk ein Urtheil fällen, so müssen wir die Geschichte der Mathematik durchblättern und den Entwickelungsgang der Analytik als solche in raschen Schritten verfolgen. Dadurch werden wir wohl am besten in die Lage versetzt, uns Kenntnisse über den Stand dieser Wissenschaft zu Ghetaldi's Zeiten zu verschaffen, und es wird uns leichter ausfallen ein richtiges und unpartheiisches Verdict zu fällen.

Schon die griechischen Geometer haben nicht nur Begriffe der Analy-

---

1) Newton hat es nicht verschmäht, dem Italiener Grimaldi seinen Antheil bei der Entdeckung der Brechung und Decomposition des Sonnenlichtes zu überlassen. Dem grossen Cartesius, dem wir eben das Prädikat „gross“ vorsetzen um durchaus nicht den Glauben zu erwecken, dass wir dessen hohe Verdienste schmälern wollten, wird aber vorgeworfen, sowohl bei Erklärung des Regenbogens, als auch bei der Aufstellung des Brechungsgesetzes fremde Resultate und Entdeckungen benutzt zu haben, ohne die Quellen anzuführen, aus welchen er die bereits gemachten Wahrnehmungen schöpfte.

sis gehabt, sondern dieselbe auch angewendet. Die Belege zu dieser Behauptung findet man vor Allem in Euklid's Elemente XIII 5, wo er folgende Definition gibt: „Analysis ist die Annahme des Gesuchten als zugestanden durch die Folgerungen bis zu einem als wahr Zugestandenen"[1]), welche Definition Bretschneider bis auf Eudoxus zurückführen zu können glaubt.[2]) Nach der Tradition der Alten ist aber kein anderer als Platon derjenige, welcher die Analysis entdeckt und sie den Geometern zum Bewusstsein gebracht hat. Es berichtet hierüber Diogenes Laertius, indem er sagt: Platon führte zuerst die analytische Methode der Untersuchung für Leodamas von Tasos ein. Ebenso liest man in einer Notiz des Proklus: Es werden auch Methoden angeführt, von denen die beste die analytische ist, die das Gesuchte auf ein bereits zugestandenes Princip zurückführt. Diese soll Platon dem Leodamas mitgetheilt haben, der dadurch zu vielen geometrischen Entdeckungen soll hingeleitet worden sein. Die zweite Methode ist die trennende, die, indem sie den vorgelegten Gegenstand in seine einzelnen Theile zerlegt, dem Beweise durch Entfernung alles der Construktion der Aufgabe Fremdartigen einen festen Ausgangspunkt gewährt; auch diese rühmte Platon sehr als eine für alle Wissenschaften förderliche. Die dritte Methode ist die der Zurückführung auf das Unmögliche, welche nicht das zu Findende selbst beweist, sondern das Gegentheil desselben bestreitet und so die Wahrheit durch Uebereinstimmung findet.[3]) Soviel über die Kenntnisse der Bedeutung und des Werthes der Analysis im Alterthum. Was die Anwendung der Analysis anbelangt, so beschränkt sie sich wohl nur auf die problematische Analysis, welche den methodischen Weg zur Auflösung von Problemen zeigen soll.[4]) Die Aufgabe wird nämlich als gelöst betrachtet und dann mit allen Mitteln der Synthese eine Relation gesucht, welche mit bekannten Mitteln ein zwar bereits hypothetisch angenommenes, aber in der That gesuchtes Stück der Figur aus den von vornherein gegebenen construirbar macht. Nun ist letzteres Stück auch gegeben und es wird die Relation dieses zu einem neuen Stück, dann zu einem dritten etc. gesucht, bis man die ursprünglichen Bestimmungsstücke bestimmt.

„Mit dieser Analysis ist nun aber die Lösung des Problemes noch nicht vollendet, vielmehr folgt nun überall noch eine Synthesis (compositio),

1) Cantor. Vorl. über die Geschichte der Mathem. Leipzig 1880. Seite 189. Bd. I. — Hankel, Geschichte der Mathem. im Alterth. und Mittelalter. Leipzig 1874. Seite 137.

2) Bretschneider. Geom. vor Eukl. 168. Hankel nennt die bezügliche Bemerkung Bretschneiders scharfsinnig.

3) Cantor a. a. O. Seite 188—189.

4) Hankel a. a. O. S. 141.

welche zunächst die „Construktion“ in strenger Ordnung, wie sie zu geschehen hat, dann deren synthetische „Demonstration“ gibt. Die Construktion folgt im Allgemeinen, wenn sich nicht zufällig Vereinfachungen ergeben, durchaus dem Gange des zweiten Theiles der Analysis, der „Resolution“; der Beweis aber schlägt den umgekehrten Weg des ersten Theiles der Analysis, der „Transformation“ ein.“[1]) In der Literatur der Griechen findet man nie die Analysis allein gegeben.

Obwohl vielleicht nicht ganz zur Sache gehörig, so glauben wir, da wir eben daran sind, die geschichtliche Entwickelung der Analysis zu verfolgen, eine Stelle aus Hankel's Geschichte hier folgen zu lassen, welche sich auf die letztere Bemerkung bezieht und welche den mathematischen Geist der griechischen Geometer so trefflich charakterisirt.

„Wenn wir in den Schriften der Alten — sagt Hankel Seite 148 seines Werkes — die Synthesis überwiegend und überall, wo eine Analysis gegeben wird, nicht nur diese mit peinlicher Sorgfalt ausgeführt, sondern ihr auch eine vollständig durchgearbeitete Synthesis in feierlichster Weise folgen sehen, die alles in umgekehrter Ordnung noch einmal sagt, so können wir uns dies nur aus der eigenthümlichen Richtung der griechischen Mathematiker erklären, welche ihre Leser weniger in den wissenschaftlichen Gedankengang einzuführen suchten, der sie von selbst zu dem wahren Resultate führen musste, als vielmehr zu der Anerkennung des Resultates mit logischer Gewalt zu zwingen. Es muss diese Maxime der griechischen Philosophen und Mathematiker, ihre Resultate durch einen trockenen dogmatischen Syllogismus zu beweisen und auf dessen formelle und recht handgreifliche Bündigkeit einen hohen Werth zu legen, als eine allgemeine griechische Nationaleigenthümlichkeit angesehen werden, welche in der bei Gelehrten und Dilettanten früh sich kundgebenden Neigung zu dialektischen Klopffechtereien ihr interessantes Seitenstück hat. Denn dass nur, um ihre Wissenschaft solchen sophistischen Zänkereien zu entziehen, die Mathematiker die höheren Theile der Geometrie mit so schwerfälligen Panzern umgeben und sich selbst mit diesem unnützen Ballast beschwert hätten, ist nicht zu glauben. Die Sache liegt vielmehr so, dass diese, uns so lästige Form ihren Geisteskräften die angemessene war; denn sie besassen mehr scharfsinnigen Verstand, um sich auf schmalem Wege durch alle Hindernisse allmählich hindurchzuwinden, als jenes Vermögen des Geistes, von Einem Punkte aus ein ganzes Gebiet intuitiv zu überschauen. Nur ein Geist, wie Platon, bei dem umgekehrt die Intuition überwog, konnte die analytische Methode ihrer grossen Bedeutung nach erkennen.“

Die fünf ersten Sätze des XIII. Buches der Euklidischen Elemente,

---

1) Hankel a. a. O. 144.

welche als Eigenthum des Eudoxus betrachtet werden[1]), bringen den goldenen Schnitt in Verbindung mit der analytischen Methode. Man findet ferner die analytische Methode in dem Berichte des Eutokius über die Würfelverdoppelungen des Menächmus etc.

Solche Thatsachen schliessen jeden Zweifel über die ersten Begriffe der Analysis und über die ersten Anwendungen der analytischen Methode aus, und man könnte höchstens noch Fragen aufstellen, ob Platon oder ob Euklid, ob Eudoxus oder andere Gelehrte des Alterthums den Grundstein zu diesem Gebäude gelegt haben; auf alle Fälle bleibt es nachgewiesen, dass diese Begriffe zum mindesten aus den Zeiten der griechischen Geometer stammen.

Aber selbst die Benutzung der Coordinaten kann aus dem grauesten Alterthum abgeleitet werden, denn wenn Cantor sagt, dass es thöricht wäre die Quadratenzerlegung der Aegypter als den bewussten Anfang eines Coordinatensystems erkennen zu wollen, so sieht er zum mindesten in jenem Vorgang die Gewohnheit einer geometrischen Proportionslehre. Cantor hat, wenn wir seine Schreibart richtig deuten, jenes „bewusste“ nicht ohne eine bestimmte Absicht hingesetzt und seinen Lesern die richtige Auslegung des Satzes überlassen. Wir für unseren Theil sind geneigt, wenn nicht einen bewussten, doch zum mindesten einen unbewussten Anfang eines Coordinatensystemes hierin zu erkennen.

Eine ganz deutliche Anwendung der Coordination findet man im ersten Buch der Kegelschnitte des Apollonius von Perga. Wir können uns hier über die Art und Weise des Apollonius, den Kegel zu schneiden, nicht näher einlassen, da wir sonst unser Thema über Gebühr ausdehen, weisen aber den wissbegierigen Leser auf Cantor's „Vorlesungen“, worin ganz ausführliche Daten enthalten sind.

Den unumstösslichsten Beweis, dass sich die Alten der Coordinaten zu bedienen wussten, liefert uns aber Hipparch, der die geographische Lage eines Ortes durch Länge und Breite bestimmte. Und wir dürften vielleicht nicht fehlgehen, wenn wir behaupten wollten, dass Heron von Alexandria die Bestimmungsmethode des Hipparch nur nachahmte, als er sich in der Feldmesskunst rechtwinkliger Coordinaten bediente. Hierüber lesen wir in Cantor's vorzüglichem Werke.[2])

„Die Aufnahme eines Feldes erfolgt (nach Heron) durch Absteckung eines Rechteckes, welches 3 seiner Endpunkte auf der Umgrenzung selbst besitzt. Die Seiten dieses Rechteckes werden nun freilich mit den Grenzen des Feldes nicht zusammentreffen, aber die zwischenliegenden Grenzstrecken

1) Cantor a. a. O. 208.
2) A. a. O. Seite 323.

bestimmen sich durch die senkrechten Entfernungen einzelner Punkte derselben von den Rechtecksseiten unter genauer Bemerkung derjenigen Punkte der Rechtecksseiten, in welche jene meist kleinen Senkrechten eintreffen. Der geschickte Feldmesser wird nach Heron's ausdrücklicher Vorschrift es so einzurichten wissen, dass die Grenze zwischen zwei zur Bestimmung ihrer Endpunkte dienenden Senkrechten leidlich gradlinig aussieht. — Wenn wir noch so vorsichtig uns davor hüten wollen, neue Gedanken in alte Methoden hineinzulesen, hier müssen wir ein bewusstes Verfahren mit rechtwinkligen Coordinaten erkennen."

Die Vermuthung, dass Ptolemäus auch dem Begriffe der Raumcoordinaten nahe gekommen sei[1]), wollen wir ganz übergehen, um zur Feldmessung der Römer überzugehen. Die Decimanus und Cardo der römischen Agrimensoren und des Augurs, waren nichts anderes als zwei aufeinander senkrechte Geraden, welche unser heutiges Coordinatensystem repräsentirten. Cantor hat im Gegensatze zu anderen Ansichten gezeigt, dass Cardo zweifelsohne die Angel bedeutet, um welche das Weltall sich dreht, also die Weltaxe. Der Decimanus, den der Augur senkrecht auf die Cardo zog, war dann offenbar nichts anderes als die Ostwestlinie.

Der Sprung, den wir nun zu machen haben und der uns vom römischen Zeitalter zum X. Jahrhundert führt, erklärt sich durch den langen Stillstand, zu welchem die mathematischen Disciplinen vom Verfall des Römerreiches oder besser gesagt von der römischen Periode an, verurtheilt waren. Einem Auszuge aus der Naturgeschichte des Plinius im X. oder XI. Jahrh. verfasst, fand man eine Zeichnung beigefügt, welche als eine graphische Darstellung unter Zugrundelegung des Coordinatengedankens erkannt wurde. „Wir stellen nicht in Abrede — sagt Cantor —, dass hier der Anfang zu einer Betrachtungsweise vorhanden ist, die am Ende des XIV. Jahrh. an Wichtigkeit und Verbreitung gewann und das Wort latitudines, welches Plinius noch als Breite braucht, mit dem Sinne der Abscissen begabte, aber in der Zeit, in welcher jene Figur entstand, fällt es uns schwer, an das Bewusstsein ihrer Tragweite zu glauben." Und selbst was hierüber im XIV. Jahrhundert geschehen ist, nennt Hankel Anticipationen moderner Gedanken, deren Ausbildung eine oft sehr mangelhafte ist, und welche unter einem solchen Kram von scholastischen Subtilitäten und mathematischen Trivialitäten versteckt sind, dass wir nicht zu dem Gefühle kommen, es habe hier einmal auch ein blindes Huhn ein Körnchen gefunden. — Wie es dem sei, Thatsache bleibt es, dass Nicole Oresme ziemlich ausführliche Abhandlungen über die Coordinaten geschrieben hat.[2])

1) A. a. O. Seite 357.

2) Max Curtze. Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme. Berlin

Sein Tractatus de latitudinibus formarum ist in der Geschichte der analytischen Geometrie jedenfalls epochemachend. Aus Curtze's Abhandlung erfahren wir wie folgt über den Inhalt des Werkes. „Oresme nennt „Forma“ jede Erscheinung in der Natur, jede Bewegung, Veränderung der Wärme u. dgl.; die Latitudo soll ermöglichen, die Erscheinungen geometrisch darzustellen. Diejenige Grösse, von welcher die Forma abhängig gedacht wird, trägt Oresme als „longitudo“ auf einer geraden Linie von einem festen Punkte aus auf; die Grösse, welche die Abhängigkeit der „Forma“ von der longitudo ausdrückt, als „latitudo“ auf in den entsprechenden Punkten der „longitudo“ errichteten Senkrechten. Die Endpunkte der Senkrechten denkt er sich dann durch krumme Linien verbunden in stetigem Zuge. Er hat also damit ein rechtwinkliges Coordinatensystem hergestellt, genau so wie Descartes das seinige entwickelt. Die Abhandlung selbst behandelt nun zuerst die Eintheilung der „figurae“ in Arten, dann die Bestimmung aller der Figuren, welche überhaupt zur Darstellung der „latitudines formarum“ dienen können. Dabei sei bemerkt, dass Oresme nur die Punkte einer Curve im I. Quadranten kennt, da ihm natürlich negative Abscissen oder Ordinaten unmöglich sein mussten; auch der Fall, dass einer Abscisse zwei Ordinaten zukommen, der z. B. bei einem Kreisabschnitte grösser als der Halbkreis eintreten würde, wenn die Sehne als „longitudo“ benutzt wird, ist ihm unmöglich; einer „longitudo“ entspricht stets eine und nur eine „latitudo.““

Eine weitere Abhandlung des Oresme „Tractatus de Uniformitate et difformitate intensionum“ behandelt denselben Gegenstand jedoch wahrscheinlich in noch ausgedehnterer und erweiterter Gestalt.[1]).

Angesichts solcher Thatsachen glauben wir beruhigt behaupten zu können, dass Oresme durch seine Werke den Grundstein zur analytischen Geometrie des Descartes gelegt hat, denn wenn die Behauptung Curtze's wahr ist, dass die Ausgaben und Handschriften des Tractatus de latitudinibus bis weit in's XVI. Jahrhundert reichen, so ist immer die Hypothese gestattet, dass sie auch zu Descartes Zeiten noch bekannt und vielleicht in Verwendung waren. Wir können hier die Bemerkung Hankel's nicht unerwähnt lassen, welcher die Frage gar nicht untersuchen will, ob der Gedanke des Coordinatenprincips nicht vielleicht noch früher ausgesprochen worden sei. Uns genügt aber, constatiren zu können, dass Oresme zweifelsohne hierüber geschrieben hat. Und dass dieses Princip nicht unbeachtet

---

1870. Der Verfasser dieser Zeilen ist dem Prof. Cantor zu Heidelberg sehr zu Dank verpflichtet, da er von genanntem Herrn auf diese Schrift aufmerksam gemacht wurde.

1) A. O. a. Seite 11.

geblieben sei, sondern dass man demselben ein gewisses Gewicht beilegte, beweist so sehr der Umstand, dass die Vorlesungen de latitudinibus an der Kölner Universität vom Jahre 1398 an obligatorisch wurden.[1])

Bisher haben wir die Entwickelung der Analysis und das Princip der Coordinaten jedes für sich betrachtet und zwar aus dem einfachen Grunde, da uns die Geschichte bis zu diesem Zeitraume keinen Fall liefert, worin man über eine Vereinigung der Algebra mit der Geometrie jedwelche Spur entdecken könnte. Nun gelangen wir aber zur glücklichen Renaissance-Epoche, die auf unserem Gebiete doch so manches aufzuweisen hat. Indem wir zur Algebra zurückkehren, finden wir in den Werken des Leonardo da Pisa und in der Summa de arithmetica et geometria des Luca da Borgo eine vollständige Darstellung des damaligen Wissens gegeben. Das Liber abaci des Leonardo ist die Fundgrube gewesen, aus der die Algoristen und Algebristen ihre Weisheit geschöpft haben; es ist dadurch überhaupt die Grundlage der neueren Wissenschaft geworden und verdient wohl eine etwas nähere Betrachtung.[2]) Die Algebra des Luca da Borgo schloss mit der Erklärung, dass die Auflösung der Gleichungen $x^3 + mx = n$, $x^3 + n = mx$ ebenso unmöglich sei als die Quadratur des Kreises. Die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades war somit der Stein der Weisen, an welchem die zukünftigen Mathematiker zu nagen hatten. Und die bezüglichen Versuche zur Lösung der kubischen Gleichungen geben vielfach zu dem Versuche Anlass, Aufgaben der Algebra durch Zuhilfenahme geometrischer Construktionen zu resolviren.

Libri, der Verfasser der Histoire des sciences Mathematiques en Italie, sieht den Giovanni Battista Benedetti, welchem u. A. Mazzuchelli (Scrittori d'Italia) bedeutenden Ruhm spendet, als den Begründer der analytischen Geometrie an. In seinem Werke „diversarum speculationum", gedruckt 1565, hat er nämlich mehrere Aufgaben der Arithmetik durch geometrische Construktionen aufgelöst. Der wissbegierige Leser findet zwei dieser Aufgaben in Libri's genanntem Werke abgedruckt.

Die nächste Anwendung der Algebra auf die Geometrie scheint Nicolaus Tartaglia gemacht zu haben. Als nämlich Scipio Ferro aus Bologna die Auflösung der Gleichungen III. Grades und zwar des speziellen Falles $x^3 + mx = n$ (capitulum cubi et rerum aequalium numero) entdeckt und diese Entdeckung dem Antonio Fiore mitgetheilt hatte, schlug letzterer verschiedenen Geometern die Lösung einiger Aufgaben vor. Dasselbe System befolgte ein gewisser Tonini da Coi oder da Colla, welcher seinen Fachgenossen schwierige Probleme vorlegte, die er selbst nicht lösen konnte.

1) Hankel a. a. O. Seite 351.

2) A. a. O. Seite 343.

Tartaglia setzte seinen ganzen Eifer daran, um diese beiden Mathematiker, welche er als Prahler bezeichnete, zu bekämpfen,[1]) und es gelang ihm dies vollständig. Tartaglia hat uns über seine Auflösungsart nichts hinterlassen, doch sagt er, zur Entdeckung der Auflösungsformeln für die Gleichungen des III. Grades durch die Zuhilfenahme geometrischer Construktionen gelangt zu sein.

Auch Cardani gibt geometrische Beweise als Grundlage der Auflösung der Gleichungen ein.[2]) So hat er z. B. den Fall $x^2 + 6x = 91$ geometrisch gelöst und die eine Wurzel der Gleichung $x = z$ ganz richtig gefunden.[3])

Die Entdeckung des Cardani über die mehrfachen Wurzeln der Gleichungen — wenn sie ihm angehört —, sowie die Entdeckung der + und — Zeichen derselben, war von grosser Bedeutung für die spätere Entwickelung der analytischen Geometrie, worauf wir im übrigen noch zurückkommen werden.[4]) Auch Bombelli hat sich damit beschäftigt, seine Gleichungen geometrisch zu construiren.

Wir gelangen endlich zu François Viète, dem Begründer der logistica speciosa (aus Fontenay in Frankreich 1540 gebürtig). Indem wir seine Verdienste um die Algebra und um die Lösung der höheren Gleichungen übergehen, heben wir nur dasjenige hervor, was zur Anwendung der Algebra auf die Geometrie direkten Bezug hat. Dazu gehört vor Allem die

---

1) Näheres in Hankel. 360 u. ff. — Vergleiche auch Libri's Histoire etc.; — Bossut übersetzt von Fontana. Saggio sulla storia generale delle Matematiche. Seite 72 u. ff.

2) Wir können uns hier über den Streit des Cardan und des Tartaglia nicht einlassen, glauben aber denselben nicht ganz unerwähnt lassen zu können, da die Vermuthung nahe liegt, Cardan habe auch die geometrische Construktion dem Tartaglia entlockt.

3) Sutter, Geschichte der Math. Bd. I pag. 164.

4) Es ist, wie wir sagten, nicht unsere Sache zu untersuchen, ob dem Tartaglia oder dem Cardan diese Verdienste zukommen. Es genügt uns, nur jene Entdeckungen hervorzuheben, welche Ghetaldi und Cartesius zur Verfügung hatten. Ueber die Entdeckung der $\pm$ Zeichen derW urzeln äussern sich: Montucla. Hist. des sciences mathem. Bd. 1. Seite 594—595: „Cette découverte, qui avec une autre de Viète est le fondement de toutes celles d'Harriot et de Descartes sur l'analyse des équations, cette découverte dis-je, est clairement contenue dans son ars magna.

Libri fügt hinzu Bd. 3. Seite 173 „Sa construction, de l'équation général de 3. degré mérite d'être remarquée, car elle renforme la première idée de la représentation générale du rapport qui existe entre deux quantités, par le rapport qui tient les abscisses et les ordonnées dans une courbe quelconque. Dagegen macht Hankel Seite 371 darauf aufmerksam, dass Cardan die selbständige Bedeutung negativer Wurzeln durchaus nicht gekannt habe.

Zurückführung der Gleichungen auf Proportionen. Die Gleichung $x^2 + bx = c^2$ verwandelte er in die Proportion $x : c = c : x + b$; dadurch ist eine algebraische Aufgabe in eine geometrische verwandelt, indem es sich gegenwärtig nur um die Bestimmung einer der äusseren von drei Proportionallinien handelt, von welchen die mittlere und die Differenz der äussern ($b = [x + b] - x$) gegeben ist. Ein ähnliches Verfahren wendet er auch auf die Gleichungen des III. Grades an, wobei er Beziehungen zwischen der Construktion dieser letzteren und der Auflösung der beiden alten Probleme, der Verdoppelung des Würfels und der Dreitheilung des Winkels fand.[1])

Diese Anwendung der Algebra auf die Geometrie unterscheidet sich wesentlich von den Leistungen Tartaglia's und Cardan's, indem wir hier zum ersten Mal die Algebra speciosa eine Rolle spielen sehen. Die Vorgänger Viète's gaben den zur Lösung des Problemes nöthigen Linien Zahlenwerthe und begnügten sich mit der Auffindung des Zahlenwerthes der Unbekannten. Keiner von ihnen dachte aber an eine vollständige geometrische Construktion des Problems, worin eine allgemeine Lösung enthalten worden wäre. Viète starb 1602 zu Paris. 16 Jahre nach dem Tode Viète's schrieb der italienische Mathematiker Cataldi sein Werk, Algebra discorsiva numerale et lineare, Bologna 1618, wovon der III. Theil den Titel führt: Algebra lineale o geometrica, aggiunta nella quale nelle operationi algebratiche invece del' operare con i numeri, si adoprano le linee. In diesem Abschnitt wird die allgemeine geometrische Auflösung der Gleichungen von der Form $x^2 + ax = b$; $x^2 = ax + b$ und $x^2 + b = ax$ gegeben.[2])

V.

So haben wir in rascher Folge die Geschichte der Mathematik durchblickt, und indem wir jene Momente derselben, welche sich auf die Entwickelung der analytischen Geometrie und auf die Anwendung der Algebra auf die Geometrie beziehen, hervorgehoben haben, sind wir endlich zu unserem Ghetaldi gelangt, dem wir nun einige Zeilen zu widmen haben.

Ghetaldi war, wie wir sahen, ein eifriger Pfleger der Mathematik. Der damaligen Sitte folgend, machte er sich in seinen Jugendjahren auf Reisen um seine Kenntnisse zu erweitern und um die Bekanntschaft der damaligen ersten Universitäten zu machen. Erst in seinen letzten Lebensjahren, jedoch noch im frischen Mannesalter, machte er sich daran, sein Werk „de reso-

---

1) Montucla a. a. O. Seite 605 u. ff.
2) Libri a. a. O. Bd. 4. Seite 95.

lutione etc." zu verfassen; der frühe Tod machte seinem Lebensgang ein Ende und so konnte er nicht einmal die Drucklegung des bereits begonnenen Werkes erleben. Alle seine Werke beweisen uns zur Genüge, dass er sich vorzüglich nur mit der Geometrie beschäftigte, während er die Algebra, auf literarischem Gebiet wenigstens, gar nicht cultivirte. Wir bemerken ferner, dass zur Zeit seiner Abwesenheit aus dem elterlichen Hause, er in erster Linie die Geometrie der Alten pflegte, dass er bemüht war, die Werke der Alten für sich und für seine Zeitgenossen zu restauriren, Verdienste, die allerdings Berücksichtigung verdienen. Auf seinen Reisen und während seines Aufenthaltes auf den verschiedenen Universitäten muss er aber jedenfalls über die Leistungen der Analysten vollständig in Kenntniss gesetzt worden sein, ja wir sehen aus der Vorrede zu seinem Werke „de resolutione" und aus seiner Vertheidigung gegen die Angriffe des Cyriacus, dass er sogar zu den persönlichen Freunden Viète's gehörte. So äussert sich Ghetaldi auf Seite 48 des mehrmals genannten Buches:

„Idem vitium non accuratae demonstrationis notat Cyriacus in Problemate secundo Francisci Vietae in Apendicula prima ad Apollonium Gallum etc.... Verum cum ipse quoque moleste ferrem, quod tanti viri laudes, non sine aliqua temeritatis nota, ut leuissime dicam, Cyriacus ausus sit imminuere, non possum non ostendere, quam longe absit a vero in suis animaduersionibus iudicium Cyriaci. Nempe hoc a me postulat singularis quidam meus in Vietam amor, atque obseruantia, atque adeo arctissima amicitiae, coniunctionsique necessitudo, quae mihi cum illo Parisijs intercessit, mutuis officijs confirmata. huc accedit, quod cum Cyriacus in uno, eodemque libello, et Vietam, et me de non accurata demonstratione accusauerit, inofficiosus essem, si omissa amici causa meam tantum defenderem.

Ein gelehrter Mann wie Ghetaldi muss also, wie wir eben sagten, von den Leistungen Tartaglia's, Cardan's etc. wohlunterrichtet gewesen sein und da er zuerst Schüler und dann Freund des Viète war, hat er auch die Verwandlung der Gleichungen in Proportionen und somit ihre Auflösung durch geometrische Construktionen bereits in Paris erlernt. Hat er auch die Schriften *Cataldi's* in Händen gehabt oder von denselben, beziehungsweise von der geometrischen Construktion seiner Gleichungen nur Kunde erhalten, so blieb ihm nur wenig zu thun, um sein Werk zusammenzustellen. Wir brauchen also nicht speciell hervorzuheben, dass Ghetaldi weit nicht derjenige war, welcher die Algebra zum ersten Mal auf die Geometrie angewandt hat, dass somit die vielen von uns angeführten Historiker sich in der Beurtheilung seines Werkes bedeutend geirrt haben. Aber dessenungeachtet gebührt dem Ghetaldi eine ehrenvolle Stelle in der Geschichte der Mathematik, und wir glauben nicht zu übertreiben, wenn wir die Ver-

fassung jenes Werkes als eine besondere Leistung hervorheben. Worin bestehen also die Verdienste des Ghetaldi und welchen Werth kann man seiner letzten Leistung zuschreiben? Wir glauben berechtigt zu sein, wie folgt zu schliessen und zu urtheilen. Als Mann der Wissenschaft und von eminent-mathematischen Talenten begabt, begriff Ghetaldi sofort, dass der Mathematik neue Bahnen eröffnet waren. In seine Heimath zurückgekehrt, scheint er die gesammelten Erfahrungen sozusagen geordnet, und dadurch erkannt zu haben, dass die Anwendung der Algebra auf die Geometrie als die Pforte eines neuen Weges zu betrachten sei. Er muss begriffen haben, dass die Verschmelzung beider Gegenstände zu einer einzigen Wissenschaft reiche Früchte tragen müsste, er hat vielleicht geahnt, dass diese neue Methode das ganze bisherige System der Mathematik umwälzen wird. Denn hätte er nicht ähnliche Gedanken gehabt, so würde er es vorgezogen haben, die vor ihm bereits betreten gewesene Bahn noch weiter zu verfolgen, um sich durch neue Entdeckungen Ruhm zu verschaffen. Er hat aber vorgezogen, das bereits erkämpfte Wissen zu ordnen, systematisch zu regeln, und durch zweckmässige Behandlung populär zu machen. Sein Werk trägt den Charakter eines förmlichen Lehrbuches vollständig an sich. Aber auch in wissenschaftlich-meritorischer Beziehung unterscheidet sich Ghetaldi durch seine „de Resolutione" von allen seinen Vorgängern wesentlich. Denn bisher war die Anwendung der Algebra auf die Geometrie rein nur ein Mittel zum Zweck; man bediente sich der geometrischen Construktion um bei der Lösung der höheren Gleichungen eher zum Ziel zu gelangen, ohne jedoch dieser Verschmelzung der Algebra mit der Geometrie eine weitere Wichtigkeit beizulegen, und auch ohne daran zu denken, diese Methode systematisch für weitere Zwecke in Aussicht zu nehmen. Man bediente sich der geometrischen Construktion eben nur im Falle der Noth, und man construirte mit ihrer Hilfe die Gleichungen des III. Grades ohne zu denken, dass auf gleiche Art jede andere arithmetische Aufgabe lösbar sein müsste. Und diese Verdienste sind eben dem Ghetaldi einzig und allein zuzuschreiben. Indem er von der Summe und Differenz ausgegangen ist, hat er die Gleichungen des ersten und zweiten Grades in geregelter Folge behandelt und systematisch dargestellt. Mit wenigen Worten, Ghetaldi hat die Anwendung der Algebra auf die Geometrie als Gegenstand eines besonderen Studiums angesehen und die Bahn verzeichnet, welche seine Nachfolger zu verfolgen hatten. Die ersten Bücher der Geometrie des Descartes, welche im übrigen um volle sechs Jahre später als die Geometrie des Ghetaldi erschienen ist, enthalten somit durchaus nichts Neues, sondern nur dasjenige, worüber Ghetaldi schon geschrieben hatte. Wir bedauern, dass das Werk des Ghetaldi älteren bedeutenden Historikern, wie einem Montucla, so gänzlich unbekannt war;

doch ebenso unbegreiflich erscheint uns die Thatsache, dass selbst ganz moderne Geschichtsschreiber wie Sutter, unseren Mathematiker so gänzlich ignoriren.

Da wir den Inhalt des Ghetaldischen Werkes ziemlich ausführlich gegeben haben, so halten wir eine nähere Discussion desselben für überflüssig. Nur hätten wir noch beizufügen, dass Kästner's Bemerkung: „Ghetaldi habe das Verfahren der Alten befolgt" sich nur auf den Umstand basirt, dass jeder analytischen Lösung auch synthetische Beweise folgen.

Ghetaldi hat auch die Gleichungen des IV. Grades nicht gelöst, wie mancher Historiker behauptet. Der Fall, welcher sich darauf bezieht, wird zu den Aufgaben gezählt „quae sub Algebram non cadunt." Sehr beachtenswerth scheint uns der Umstand zu sein, dass Ghetaldi die Archimedische Aufgabe, wovon Vitruvius lib. 9. Cap. 3 berichtet, so wie Aufgaben aus der Progressionslehre geometrisch löst. Die letzten Aufgaben des Ghetaldi, worüber er sich ausdrückt: quae sub algebram non cadunt, eaquae resolvam, et componam, methodo, qua veteres in resolvendis et componendis omnibus Problematibus utebantur, wären alle sehr leicht durch die Trigonometrie zu lösen gewesen.

Doch schon Kästner hat den Ghetaldi hierüber gerechtfertigt, indem er sagte, dass „zu seiner Zeit waren Vergleichungen zwischen trigonometrischen Linien die einem Winkel gehören und Seiten des Dreiecks nicht gewöhnlich, was sich also durch solche Vergleichungen ausdrücken liess, fiel nicht unter seine Algebra. Nach der strengen Bedeutung von algebraisch hatte er recht, weil trigonometrische Funktionen zu transcendenten Ausdrücken führen."

VI.

Da uns unsere Leser geduldig bis hierher gefolgt sind, wollen wir noch einige Worte dem grossen Mathematiker Descartes widmen.

Wenn Wallis seinem Landsmann Harriot übertriebene Verdienste zugeschrieben hat, so ermangelte anderseits Montucla nicht, ihm — wenn wir uns so ausdrücken dürfen — die Leviten dafür zu lesen. Hat aber Wallis übertrieben, so war Montucla seinen Landsleuten Viète und Descartes gegenüber, jedenfalls auch nicht wortkarg. Merkwürdigerweise macht man dem Descartes soviele Vorwürfe, dass sich Monti veranlasst sah von ihm zu sagen, dem bekannten Spruch: benignum est et plenum ingenui pudoris fateri, per quos profeceris, niemals gefolgt zu sein. So sind mehrere Gelehrte über ihn indignirt, da er sich Entdeckungen über den Regenbogen zuschreibt, die schon vor ihm durch den dalmatinischen Prima, Erzbischof de Dominis gemacht wurden. Auch der Satz seiner Optik „Nempe est in

refractione: ut sinus anguli inclinationis unus ad sinum anguli inclinationis alterius, ita sinus anguli refracti in una inclinatione ad sinum anguli refracti in altera — scheint nicht sein Eigenthum zu sein. Nach mehreren geschichtlichen Thatsachen scheint es nämlich, dass Willibrord Snellius, ein holländischer Mathematiker, welcher 1590—1626 gelebt, der Entdecker des Brechungsgesetzes sei. Snellius soll das Gesetz in anderer Form als in jener $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ = constant, in einer Optik niedergeschrieben haben, welche seines frühen Todes wegen nicht herausgegeben werden konnte. Vossius und Huyghens versichern, dass sie den Satz des Snellius mit eigenen Augen gesehen hatten. Arago will diese Ehre unbestritten seinem grossen Landsmann überlassen. Thatsache ist es, dass Hortensius, ein Freund des Snellius, das Brechungsgesetz an der Universität öffentlich lehrte. Descartes lebte nun viele Jahre in Holland und war u. A. auch mit Huyghens Vater sehr gut bekannt, in dessen Haus er den Gelehrten Hollands begegnete.[1])

Zur Geometrie des Descartes zurückkehrend müssen wir vor Allem gestehen, dass dem grossen französischen Mathematiker und Philosophen unbestritten die grosse Ehre zukommt, die Coordinatengeometrie der Curven begründet, entdeckt und in sichere Bahnen geleitet zu haben. Ob er Oresme's Leistungen gekannt habe oder nicht, sind wir nicht im Stande zu beurtheilen, dass an der Kölner Universität die Vorlesungen de latitudinibus schon lange vor Descartes gehalten wurden, haben wir bereits gesehen. Auch haben wir auf Curtze's Schrift basirt hervorgehoben, dass sich die Werke Oresme's bis weit in dem XVI. Jahrh. verpflanzt haben. Ist das Princip de *latitudinibus* auch in Holland und Frankreich zur Vorlesung gelangt, und hat sich diese Sitte noch im XVI. und XVII. Jahrh. erhalten, dann muss allerdings vorausgesetzt werden, dass Cartesius hievon Kunde hatte. Jedenfalls war ihm von grossem Nutzen die Vervollkommnung der Analysis, vorzüglich die Kenntniss der mehrfachen Wurzeln, der Gleichungen und ihrer positiven und negativen Bedeutung. Es schmälern unsere Aeusserungen und Vermuthungen nicht im geringsten die grossen Verdienste des Franzosen, da er jedenfalls die Curven zum ersten Mal den Gesetzen der Analysis unterwarf, sie mit dem Coordinatenprincip in Verbindung brachte, wodurch er so eigentlich die analytische Geometrie begründet hat. Er ist ausserdem bei diesem ersten Schritt nicht stehen geblieben, er hat aber die Curven untersucht, ihre Tangenten construirt etc. etc.

Weder Descartes noch seine Vorgänger ahnten aber, dass die ersten Begründer der analytischen Geometrie die Araber waren, da es gar nicht möglich ist vorauszusetzen, dass Descartes über die Leistungen der Araber

1) Bruhns. Astronomische Strahlenbrechung.

Kenntniss hatte. Aus diesem Grunde machten wir auch keine Erwähnung der letzteren. Zur Vervollständigung unserer Arbeit sei nur ganz kurz erwähnt, dass die Araber ihre Aufgaben über die Kegelschnitte schon um 6 Jahrhunderte vor Descartes durch Anwendung der Coordinatengeometrie lösten.

Wir sind zum Schluss unseres Elaborates gelangt. Uns lag durchaus nicht die Absicht zu Grunde die Verdienste des Descartes zu schmälern. Wir haben nur versucht, jene Entdeckungen hervorzuheben, welche ihm zu seiner Leistung behilflich sein konnten. Was unseren Ghetaldi aber anbelangt, glauben wir nachgewiesen zu haben, dass er schon vor Descartes die Algebra auf die Geometrie in systematisch geordneter Folge anwendete, wodurch der I. Theil der Descarte'schen Geometrie eine Errungenschaft des Ragusäer Patriziers war. Das Coordinatenprincip scheint dem Ghetaldi ganz fremd gewesen zu sein. Ghetaldi verdient immerhin durch sein Werk besondere Berücksichtigung und es gebührt ihm, wie wir sagten, eine ehrenvolle Stelle in der Geschichte der Mathematik. Wir wollen Wiederholungen vermeiden, weshalb wir nicht nochmals die Bedeutung seines Werkes, so wie wir urtheilen zu können glaubten, anführen, hoffen aber, dass die zukünftige mathematisch-historische Literatur den bedeutenden Mann aus Ragusa zum mindesten anführen wird — anderseits wünschen wir jene Uebertreibungen, wovon wir viele Beispiele geliefert haben, und welche sich bis in unsere Tage verschleppten, eliminirt zu sehen.

DESCARTES

UND DAS

BRECHUNGSGESETZ DES LICHTES.

VON

DR. P. KRAMER
IN HALLE A. D. S.

Ob Descartes das Brechungsgesetz des Lichtes selbstständig gefunden habe oder nicht, war eine Frage, die seiner Zeit die Geschichtsschreiber der Physik lebhaft beschäftigt hat, die aber heute, wie es scheint, für eine erledigte gilt. Wohin man sich wendet, begegnet man entweder der einfachen Angabe, dass das berühmte Gesetz dem Holländer Willebrord Snell verdankt wird, was ja auch dem Thatbestande gewiss entspricht, oder der vollständigeren, dass Snell es zwar entdeckt, Descartes aber zuerst veröffentlicht habe. So erscheint Descartes erst an zweiter Stelle. Die historische Forschung hat sich damit gegen ihn als selbstständigen Entdecker des für die Dioptrik grundlegenden Gesetzes entschieden. Indess trifft man auch immer wieder die mehr oder weniger offen ausgesprochene Vermuthung, dass er sich wider besseres Wissen für den Entdecker jenes Gesetzes ausgegeben und den Namen des holländischen Gelehrten absichtlich verschwiegen habe. Am schärfsten spricht sie noch zuletzt Poggendorff in seinen Vorlesungen über die Geschichte der Physik aus und zwar so scharf, dass man unmittelbar dadurch angeregt wird, nochmals zu den Quellen aufzusteigen, um zu prüfen, wie es denn mit den Akten dieser grossen Streitfrage eigentlich bestellt ist. Finden sich dabei wichtige Momente bisher ausser Acht gelassen, so mag darin eine Rechtfertigung dafür liegen, dass, trotz der scheinbaren Erledigung der ganzen Sache, diese im Nachfolgenden noch einmal zum Gegenstand einer Untersuchung gemacht worden ist.

Descartes erscheint bei Poggendorff in keinem günstigen Lichte. Er wird zwar geschildert als ein Mann von ausgezeichneten Gaben und grosser Beweglichkeit des Geistes, aber „voll brennenden Ehrgeizes in der Wissenschaft zu glänzen [1]), dabei auch von sehr reizbarem Gemüth und etwas zweifelhaftem Charakter, Eigenschaften, die ihn in mannigfache Streitigkeiten mit seinen Zeitgenossen verwickelten.“ Nach einer solchen allgemeinen Charakteristik wird man denn auch nicht durch die Darstellung überrascht, welche Poggendorff seinem Verhalten in Sachen des Brechungsgesetzes zu Theil werden lässt. Nachdem er nämlich, wie billig, des Descartes Bedeutung für die Erkenntniss des Regenbogens, namentlich der Grösse der Kreisöffnung desselben hervorgehoben, fährt er folgendermassen fort:

„Leider ist hier aber sein Verdienst mit einem Makel behaftet, von

dem ihn selbst seine eifrigsten Vertheidiger nicht haben rein waschen können. Jener Theil der Theorie ist nämlich nicht zu geben ohne Kenntniss des Gesetzes von der Brechung des Lichtes, dass beim Uebergang des Lichtes von einem Mittel in ein anderes die Sinus der Winkel, welche die einfallenden und gebrochenen Strahlen mit dem Loth auf der Trennungsfläche machen, in einem constanten Verhältniss stehen. Dieses Gesetz giebt nun Descartes in seiner Dioptrik und zwar als sein Eigenthum ohne zu erwähnen, dass der bereits 1626 verstorbene Prof. Snell in Leyden dasselbe aufgefunden hatte.“ „Snellius stellte dieses Gesetz $\left(n = \frac{\operatorname{cosec} r}{\operatorname{cosec} i}\right)$ auf in einem Werke, das leider nicht das Licht der Welt erblickte, wodurch er beinahe um die Ehre der Entdeckung gekommen wäre, denn Descartes, der es kennen lernte und es 1637 in seiner Dioptrik veröffentlichte, galt lange Zeit als Entdecker desselben. Allein Isaak Voss (Vossius geb. 1618 zu Leyden und gest. 1689 als Kanonikus zu Windsor), der gelehrte Kritiker, und Chr. Huyghens, der berühmte Physiker, die beide das Snell'sche Werk im Manuscript gesehen haben, sprechen ohne Rückhalt den Verdacht aus, dass Descartes das Werk gekannt habe, was schon dadurch sehr wahrscheinlich wird, dass Descartes über 20 Jahre in Holland lebte und unter den Gelehrten dieses Landes viele Freunde und Bekannte zählte. Dazu kommt, dass Descartes so gut wie niemals seine Quellen nennt (eine Sünde, die sich bis auf den heutigen Tag unter seinen Landsleuten vererbt zu haben scheint) und unter Anderm in seinen philosophischen Prinzipien eine Ansicht vom Weltgebäude ausspricht, die fast wörtlich bei Giordano Bruno zu finden ist. Es unterliegt somit kaum einem Zweifel, dass Descartes das Gesetz gekannt und keinen Antheil an der Entdeckung desselben hat. Er führt auch keinen Versuch an, wodurch er es gefunden; indess bleibt ihm doch das Verdienst, dass er dasselbe zuerst in der einfacheren Form aussprach, in der es gegenwärtig gebraucht wird. Statt nämlich zu sagen, die Cosecanten stehen in einem constanten Verhältniss, wie Snell gethan, sagte er, die Sinus dieser Winkel stehen darin. Es ist ja auch $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, daher $n = \frac{\sin i}{\sin r}$.“

„Diese Form war gerechtfertigt durch eine Erklärung, die er von der Entstehung des Brechungsgesetzes gab, eine Erklärung, die, wenn sie auch einwurfsfähig ist, doch als erster Versuch zum tieferen Eindringen in die Vorgänge beim Licht, alle Anerkennung verdient und sicher den späteren vollkommeneren Theorien vorgearbeitet hat. Sie hängt überdies so innig mit seinen Ideen über das Wesen des Lichtes zusammen, dass seine Gegner, glaube ich, ihm Unrecht thun, wenn sie behaupten, Descartes habe diese

Erklärung blos ersonnen, um sein Plagiat zu bemänteln." (Pogg. Vorles. S. 310—312.)

Es muss, das geben wir zu, als eine ganz natürliche Erscheinung angesehen werden, dass man um die Mitte und den Schluss des siebzehnten Jahrhunderts Descartes nur für den Veröffentlicher des von Snell gefundenen Gesetzes hielt, ja sogar, dass Manche glauben konnten, er habe aus übergrossem Ehrgeiz die Gelegenheit benutzt, sich als Entdecker desselben auszugeben.

Willebrord Snell, einer der grössten Gelehrten, welche die Universität Leyden jemals besessen hat, sprach nach zahlreichen mühevollen Messungen endlich das Brechungsgesetz des Lichtes aus, aber in einer Form, die noch durchaus nicht die spätere, jetzt allgemein gebräuchliche, von Descartes gefundene, Gestalt desselben verrieth. Er legte seine grossartige Entdeckung, deren Tragweite er nach Huyghens Ausspruch kaum selbst übersah, in einem Werke nieder, bei dessen Vollendung ihn der Tod überraschte. Seine Schüler und Verehrer lehren den wesentlichen Inhalt desselben, doch dringt die Kunde von dem neuen Gesetz nur wenig über die Gränzen der Städte, in welchen sie leben. Da erscheint 1637 die Dioptrik des Descartes. Descartes thut des Holländers Snell keine Erwähnung, aber sein Brechungsgesetz ist auf das des Snell zurückführbar. Sicher! Er hat dessen Entdeckung gekannt, da er doch so lange bereits in Holland lebte. Wie wäre es möglich, elf Jahre nach dem Tode des Entdeckers dort noch nicht um das Gesetz zu wissen? Isaak Voss, ein heftiger Gegner des Descartes, spricht es, nachdem er das Manuscript des Snell eingesehen und durchblättert hat, 1663, also mehr als 12 Jahre nach des Descartes Tode zum ersten Male als selbstverständlich aus, dass er dies für die Dioptrik grundlegende Gesetz nur von Snell entnommen haben könne[2]). Für Descartes tritt merkwürdigerweise Niemand ein, und so steht es denn bald fest, er sei ein Fälscher, ein unlauterer Mensch, ein eigennütziger Verkleinerer des berühmten frühverstorbenen Willebrord Snellius.

Man muss es wie gesagt zugeben, es war natürlich, dass sich diese Sache so entwickelte, und ebenso natürlich geht sie weiter fort. Chr. Huyghens war am Ende des siebzehnten Jahrhunderts so glücklich, als letzter authentischer Zeuge Snell's Handschrift zu sehen. Er erfährt auf irgend eine Weise von irgend Jemand, denn die Augen- und Ohrenzeugen sind längst todt, dass auch Descartes die Handschrift gesehen habe. Auch er bestätigt es wie alle Welt, dass das Descartes'sche Gesetz mit dem Snell'schen identisch ist und vermag sich nun der Ueberzeugung nicht länger zu verschliessen, dass hier ein direkter Zusammenhang zwischen den Ergebnissen beider Männer obwaltet[3]). Allerdings lässt er die Möglichkeit

durchblicken, dass es sich auch anders verhalten könne, ohne ihr jedoch viel Gewicht beizulegen.

Die Urtheile des Voss und Huyghens sind nun die Fundamente, worauf sich später die historische Darstellung aufbaut, welche noch gestützt wird durch ein Zeugniss Leibnitzens in den „acta eruditorum“ vom Jahre 1682[4]). Leibnitz hatte mit Hülfe der Infinitesimal-Rechnung das Brechungsgesetz neu bewiesen und benutzte gerade wie Descartes dazu die verschiedenen Geschwindigkeiten des Lichtes in den verschiedenen optischen Medien. Er glaubte nun, Snell habe etwa auf einem ähnlichen Wege, wie er selbst, sein Gesetz gefunden und war wie andere vor ihm überrascht, auf die Form, wie Descartes sie gab, zu stossen. Er spricht nun zwar selbst kein direktes Urtheil gegen letzteren aus, stützt sich aber auf Spleissius[5]), welcher ganz auf des Voss Seite tritt.

Ueberblickt man die Gründe, welche für die Unredlichkeit des Descartes von Voss, Huyghens und Leibnitz angegeben werden, so wird es keinem entgehen, dass Poggendorff's Ausführungen ein fast wortgetreuer Nachklang dieser aus dem siebzehnten Jahrhundert auf uns gekommenen Urtheile sind und dass alle Unwahrscheinlichkeiten, welche diesen anhaften, in jene herübergenommen wurden. Doch nicht Poggendorff allein begiebt sich vollständig unter die unbedingte Abhängigkeit von diesen älteren Autoren, so thaten vielmehr fast alle, welche dieser Angelegenheit ihre Aufmerksamkeit zuwandten, so dass es schwer hält zu entscheiden, wen Poggendorff wohl im Sinne hatte, wenn er von „eifrigsten Vertheidigern“ des Descartes spricht; denn Autoren wie Millet[6]), der zwar sehr entschieden für Descartes Partei ergreift, aber seine Ansicht durch ausführliche Gründe zu stützen nicht unternimmt, wird er kaum gemeint haben können. Die bedeutenderen geschichtlichen Darstellungen weichen nicht viel von einander ab. Man blättere in Priestley's Geschichte der Optik[7]) (1772) und man wird dort die heute allgemein verbreitete Meinung vorfinden, so wie in der Uebersetzung seines Werkes von Klügel[8]). J. C. Fischer[9]) hält sich in seiner Geschichte der Physik zwar sehr objektiv, aber das Gesammtresultat seiner Untersuchungen ist doch auch kein anderes, als dass Descartes sein Gesetz wohl aus Snell's Werk genommen habe, gerade wie es auch Wilde[10]) in seiner Geschichte der Optik ausspricht, welcher selbst nicht auf die Quellen in Descartes Schriften zurückgegangen ist, und seinerseits wieder Poggendorff als letzte Quelle gedient zu haben scheint.

Bei weitem selbstständiger stehen der vorliegenden Streitfrage, wie es auch schon die ausführlichere Behandlung des Gegenstandes bei ihnen vermuthen lässt, Delambre und Montucla gegenüber. Delambre widmet der Sache des Descartes ein bedeutendes Interesse und führt mit Sachkennt-

niss, wenn auch nur mit unvollständiger Verwerthung seiner Schriften die Frage durch, wie er sich zu Snell's Entdeckung verhält. Wie es bei gerechter Beurtheilung nicht anders möglich ist und wie es der holländische Geschichtsschreiber der Universität Leyden, von Kampen[11]), ebenfalls thut, spricht er es aus, dass alle jene von Voss und Huyghens hervorgehobenen Momente zwar den Schein des Fälschers auf Descartes wälzen, dass es aber sehr wohl möglich sei, Descartes habe durch eigene Arbeit das merkwürdige Gesetz gefunden und habe ein Recht ebensogut wie Snell für den Entdecker desselben gehalten zu werden[12]). Hiernach gewinnt es zuerst den Anschein, als wollte Delambre für Descartes eintreten, aber im weiteren Verlaufe seiner Darstellung lässt er es bald sehr deutlich durchschimmern, dass er keine Lanze für seinen Landsmann zu brechen habe. Er neigt sich immer mehr der Ansicht der Gegner des Descartes zu und endigt damit, dass er sich den Anklägern desselben, wenn auch ungern, anschliessen müsse. Im Ganzen und Grossen ist diese Wendung trotz alledem nicht zu verwundern, denn Delambre nimmt auf sorgfältige Zeitbestimmungen bei Beurtheilung der in Rede stehenden Aktenstücke nur geringe Rücksicht und benutzt die vorhandenen Dokumente nur zum Theil. So legt er jenem merkwürdigen Briefe des Descartes an einen Ungenannten, Ep. pars II. ep. 70, in welchem ein Instrument zur Bestimmung des Brechungswinkels beschrieben wird, eine entscheidende Bedeutung bei, um daraus Schlüsse zu Ungunsten des Descartes zu ziehen, während dieser Brief doch gänzlich zurücktritt gegen eine ganze Anzahl anderer Briefe und die im zehnten Kapitel der Dioptrik erwähnten Mittel den Brechungsexponenten zu bestimmen, welche beweisen, dass Descartes bereits vor seiner Uebersiedelung nach Holland das Brechungsgesetz kannte. Auch dem Umstande, dessen Delambre Erwähnung thut[13]) und welcher von ihm verhältnissmässig stark betont wird, dass nämlich das von ihm benutzte Exemplar der Briefe des Descartes die vermuthliche Mittelsperson zwischen Snell und Descartes aufbewahrt habe, kann eine Bedeutung nicht beigemessen werden. Wenn eine Randbemerkung dieses Exemplars zu dem oben erwähnten 70. Briefe des zweiten Theils der Briefe aussagt, dass ein gewisser Golius, Professor in Leyden, der Empfänger dieses im Jahre 1632 geschriebenen Briefes gewesen sei, so liegt durchaus kein Grund vor zu vermuthen, dass Golius dem Descartes das Snell'sche Gesetz mitgetheilt und dafür gewissermassen zum Dank von Descartes die Beschreibung eines zum Ablesen des Brechungsindex bequemen Instruments erhalten habe. Es ist gar nicht mehr zu bestimmen, aus welcher Zeit und von wem jene Randbemerkung herstammt[13]). Aber gesetzt den Fall, die Marginalnote wäre hinreichend alt, so würde es kaum möglich sein, daraus etwas anderes zu schliessen, als dass Des-

cartes und Golius sich über eine ihnen beiden bekannte Thatsache unterhalten haben. Wer von ihnen beiden sie zuerst gewusst hat, lässt sich aus dem Briefe selbst nicht im entferntesten entscheiden. Das Jahr 1632, welches in jener Randbemerkung als Abfassungsjahr dieses Briefes erwähnt wurde, mag zudem kaum zutreffen, wie sich mit ziemlicher Genauigkeit nachweisen lässt. In diesem Briefe wird nämlich ebenso wie in einem nach V. Cousins Angabe aus dem Jahre 1637 stammenden Briefe an Pollot ein Brennglas erwähnt, welches mit ganz besonderer Sorgfalt hergestellt worden war[14]). Im Jahre 1637 waren, wie aus jenem andern Briefe unmittelbar hervorgeht, acht oder neun Jahre nach der Herstellung desselben verflossen, also mag es um 1628 oder 1629 geschliffen worden sein. Im 70. Briefe ist nun erwähnt, dass er etwa 5 oder 6 Jahre nach der Herstellung dieses Glases geschrieben sei, er wird also von 1633 oder 1634 datirt werden müssen. Der in jener Marginalbemerkung angegebene Termin, das Jahr 1632, ist demnach wohl zu früh und so mag auch mit dem Namen Golius eine kaum hinreichend begründete Vermuthung zum Ausdruck gebracht worden sein. Dass Golius[15]) aber gar dem Descartes das Snell'sche Gesetz mitgetheilt habe, muss als durchaus unhaltbar von der Hand gewiesen werden.

So wie Delambre behandelt auch Montucla den Streitpunkt mit gewissenhafter Vorsicht. Für ihn bleibt er unentschieden. Neue Momente zu seiner Lösung bringt er nicht bei und die bis zu seiner Zeit beachteten lassen, wie oben ausgeführt wurde, höchstens die Vermuthung aufkommen, dass ein mehr oder weniger direkter Zusammenhang zwischen Descartes und Snell bestanden habe. Er beachtet daher zwar diese Vermuthungen, setzt ihnen aber die, wie es scheint, aus tieferem Studium der Schriften des Descartes hervorgegangene Ueberzeugung entgegen, dass er die in den Anhängen des Discours sur la methode niedergelegten Entdeckungen schon Jahre vor der Veröffentlichung besessen habe[16]). Hier spricht sich Montucla fast in demselben Sinne aus wie später Millet, und es ist in der That sehr zu bedauern, dass weder der eine noch der andere die Gründe, welche sie zu der von der gewöhnlichen Meinung so verschiedenen Ansicht geführt haben, ausführlich dargelegt hat. Interesse für den französischen Landsmann allein ist es weder bei Montucla noch Millet gewesen, was sie veranlasst haben mag, für Descartes einzutreten, spricht sich doch sogar der bereits oben erwähnte von Kampen[11]) nicht anders aus, der doch als Holländer gewiss keinen Grund gehabt haben wird, seinen Landsmann Snell gegen Descartes zurücktreten zu lassen; und auch Pfleiderer in seinen wenn auch überaus kurzen, aber sehr besonnenen Thesen nimmt entschieden für Descartes Partei[17]). Man kann sich auch in der That der Wahrheit dessen

nicht verschliessen, was Millet[18]) ausführt, dass es sich bei sorgfältiger Prüfung der Briefe des Descartes als völlig sicher ergiebt, Descartes sei längst im Besitze seiner optischen Entdeckungen gewesen, als er nach Holland übersiedelte. Dass diese Briefe, sowie die Methode den Brechungsindex zu bestimmen, wie sie im X. Buche der Dioptrik angegeben ist, bisher kaum ausgenutzt wurden, ist wenig erklärlich. Aber nur dadurch, dass dies unterblieb, lässt es sich begreifen, dass sich die einmal von Isaak Voss und Huyghens ausgesprochene Meinung so allgemein verbreiten konnte und nicht in Deutschland allein sondern auch in England, wie Whewell in seiner Geschichte der induktiven Wissenschaften beweist[19]). Bei diesem letzteren tritt sogar die Vermuthung, dass Descartes des Snellius Manuscript gesehen und benutzt habe, mit einer so naiven Sicherheit auf, dass jeder, welcher die Darlegung der in Rede stehenden Sache bei ihm liest, auch gar nicht einmal zu der Ueberzeugung gelangt, man habe es hier mit einer nur höchst unsicher beglaubigten Wahrscheinlichkeit zu thun. Nur in Frankreich[20]) sind immer und immer wieder Bemühungen zu verzeichnen, den nur schwach gestützten Beweisen für ein Plagiat entgegen zu treten, allerdings bis jetzt mit geringem Erfolge. Wie bereits bei Gelegenheit der Erwähnung von Millet's Schrift ausgesprochen wurde, liegt dieser Misserfolg in der kurzen Art, mit welcher hier, ohne dass die Gründe ausführlich angegeben wurden, die Streitfrage in einem anderen Sinne gelöst wird, als die in diesen Dingen massgebendsten Stimmen entschieden hatten.

Brechen wir hier die geschichtliche Besprechung ab und fassen die Einwürfe, welche man gegen die selbstständige Entdeckung des Lichtbrechungsgesetzes durch Descartes besonders erhoben hat, nun noch einmal abschliessend zusammen, so sind es, so viel ich sehe, folgende fünf, welche einer Berücksichtigung unterworfen werden müssen:

1) Descartes hat über 20 Jahre in Holland gelebt und besass unter den Gelehrten dieses Landes viel Freunde und Bekannte. (Voss. Poggendorff.)

2) Hortensius hat öffentlich und privatim die Entdeckung Snell's in in Holland gelehrt. (Voss.)

3) Descartes nennt so gut wie niemals seine Quellen. (Leibnitz-Poggendorff.)

4) Er führt keinen einzigen Versuch an, wodurch er sein Gesetz gefunden haben könnte. (Poggendorff.)

5) Er hat sich beim Beweise seines Brechungsgesetzes arg verwickelt. (Leibnitz.)

Wir werden am besten diesen Einwänden begegnen, wenn wir erstens so weit als möglich die Zeit festzusetzen unternehmen, in welcher Descartes

zuerst von seinem Brechungsgesetz Gebrauch machte; wenn wir sodann versuchen darzulegen, auf welchem Wege Descartes selbstständig und aus den ihm zugänglichen Gedankenkreise heraus sein Brechungsgesetz gefunden haben möchte, und wie dies ohne Versuche hat geschehen können; wenn wir endlich drittens prüfen, in wieweit sich Leibnitz mit seinem Vorwurf gegen den Beweis des Brechungsgesetzes, wie er im zweiten Kapitel der Dioptrik gegeben ist, im Rechte befindet.

1.

Verfolgen wir des Descartes Leben, so begegnen wir ihm in Holland zum ersten Male im Mai 1617. Er hat sich dem Heerlager des Herzogs Moritz von Oranien angeschlossen, der damals während des Waffenstillstands zwischen Spanien und Holland in der Festung Breda Hof hielt. Descartes bleibt bis zum Juli 1619 in Breda selbst, wo er bei dem regen Leben, welches die um den Herzog versammelten Ingenieure und Gelehrten in die Stadt brachten, seine Neigungen vollauf befriedigt fand. Während dieses Aufenthaltes lernte er unter Anderen den Mathematiker Beekmann kennen, mit Snell dagegen kam er, soviel bekannt, nicht in Berührung, da er Leyden nicht aufsuchte, wo jener lebte. Es wäre aber trotzdem, wenn Snell vor dem Juli 1619 das Lichtbrechungsgesetz gefunden und andern davon Kenntniss gegeben hatte, möglich gewesen, dass Descartes es erfahren haben könnte, und wir dürfen über diese Möglichkeit nicht mit Stillschweigen hinweggehen, wenn es auch wahrscheinlich ist, dass Snell sein Gesetz erst später entdeckt hat.

Nachdem Descartes den Dienst in dem holländischen Heere verlassen hatte, folgte er dem des Herzogs von Bayern nach Deutschland und Ungarn, gab aber 1621 das militärische Wanderleben auf und reiste über Norddeutschland und Holland nach Frankreich zurück. So sehen wir ihn zum zweiten Male Holland's Boden betreten. Er liess sich Anfang Dezember 1621 im Haag nieder, aber schon im Februar 1622 ist er auf dem Wege nach Rouen, um nun eine Reihe von Jahren in Frankreich zu bleiben. Diesmal ist er etwa zwei und einen halben Monat im Haag gewesen und wird, obwohl wir nichts davon wissen, mit den Gelehrten der nahegelegenen Universität Leyden in Berührung gekommen sein. Snell hatte damals, 1621, seinen Cyclometricus herausgegeben und arbeitete vermuthlich an dem im Jahre 1624 erschienenen Tiphys Batavus. Beide Schriften behandeln Gegenstände, die mit der Optik nichts zu schaffen haben, und so lässt sich vermuthen, dass er die optischen Studien erst in seinen letzten Lebensjahren energisch angegriffen haben wird, denn es erscheint nun kein Werk mehr bis zu seinem Tode, während sie früher schnell auf einander folgten.

Der zweite Aufenthalt des Descartes in Holland würde die zweite Gelegenheit geboten haben, das Snell'sche Gesetz kennen zu lernen, wenn Snell es bereits Ende 1621 formulirt hatte. P. Reis setzt nun dessen Entdeckung ins Jahr 1620,[21]) jedoch ohne einen bestimmten Anhalt dazu zu haben, vielmehr nur nach Muthmassung. Whewell[19]) hat den Termin der Entdeckung ins Jahr 1621 gesetzt, aber ebenfalls nur nach allgemeiner Schätzung. Wir können beiden Zeitangaben kein Gewicht beilegen, da es keine Quellen dafür giebt, und ebenso wenig einer anderen, welche die Entdeckung ins Jahr 1625 setzt[22]).

Nachdem Descartes eine längere Reihe von Jahren in Frankreich gelebt hatte, siedelte er im März 1629 vollständig nach Holland über, wo er bis in die zweite Hälfte des Jahres 1649 blieb, um dann nach Schweden zu gehen, wo er 1650 starb.

Als er so zum dritten Male 1629 Holland aufsuchte, war das Snell'sche Brechungsgesetz gewiss schon mehrere Jahre hindurch bekannt, und es stand demnach nichts im Wege, dass er dasselbe erfahren konnte, da er in Holland viele Gelehrte zu Freunden hatte, obwohl er mit der überwiegenden Mehrzahl in keinem Verkehr stand.

Diesen letzten Aufenthalt haben nun offenbar Voss sowohl wie Leibnitz und Poggendorff im Auge, da sie sagen, dass er über zwanzig Jahre oder wenigstens sehr lange in Holland gelebt habe. Voss spricht es sogar deutlich genug aus, dass er nur diesen Aufenthalt meint. Er schreibt: „Nachdem er nach Holland übergesiedelt war[2]), habe er von dem Brechungsgesetz erfahren müssen.“ Hierin liegt das stillschweigende Zugeständniss, dass die früheren kürzeren Aufenthalte in Holland von Descartes wohl desshalb nicht hätten benutzt werden können, weil Snell weder vor 1619 noch vor 1622 sein Brechungsgesetz ausgesprochen habe, ein Zugeständniss, welches wir uns zunächst auch einfach aneignen können.

Gehen wir aber von dieser Voraussetzung aus, so kann man darthun, dass Descartes mit der vollen Kenntniss des Brechungsgesetzes nach Holland kam, und es fallen damit die Anklagepunkte 1 und 2 vollständig hin. Von besonderer Wichtigkeit sind nämlich für unsere Frage die Jahre 1627 und 1628. In diesen Jahren beschäftigt sich Descartes sehr eingehend mit der Herstellung von optischen Gläsern. Es lag überhaupt, nachdem durch die Erfindung der Ferngläser und Mikroskope alle Geister mächtig in Bewegung gerathen waren, in der Zeit, möglichst vollkommene Instrumente zu besitzen, und so sehen wir viele Männer theoretisch und praktisch thätig, um wirksame Brenngläser zu verfertigen, vor allen solche, welche sämmtliche auffallende Strahlen in einen einzigen Punkt zusammenbrechen, was bei Gläsern mit kugelförmig geschliffenen Flächen bekanntlich nicht der Fall ist

Kepler hatte die Abweichung wegen der Kugelgestalt bereits entdeckt und suchte ebenfalls schon nach der besten Form der Brenngläser oder Linsen, nach den anaklastischen Curven für solche Gläser, ohne jedoch Erfolg darin zu haben. Descartes studirte nun die Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel mit Rücksicht auf die Brechung und fand, dass sie die Strahlen, welche mit der grossen Axe parallel einfallen, nach dem von ihrem Ausgangspunkt abgewendeten Brennpunkte hin brechen, sobald die Geschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Medien diesseits und jenseits der Curven ein bestimmtes Verhältniss haben. Dieses Verhältniss fand er durch die grosse Axe und Excentricität jener Kegelschnitte fixirt. Um also Gläser zu erhalten, welche die gewünschte Eigenschaft haben, musste er dieses Grössenverhältniss der Hauptaxe zur doppelten Excentricität der Geschwindigkeit des Lichtes in Luft und Glas anpassen.

Dass dem Descartes unter Beihülfe des Mechanikers Ferrier bereits ums Jahr 1628 ein solches Glas ganz vorzüglich gelang[23]), ist nicht allein durch die Briefe des Descartes beglaubigt, sondern Poggendorff[24]) selbst führt es in seinen Vorlesungen an. Um ein solches schleifen zu können, waren aber nicht allein Maschinen und Vorübungen, sondern auch, und das ist das Wichtigste, Mittel nöthig, um die Grösse des theoretisch und allgemein gefundenen Brechungsexponenten für zwei bestimmte optische Medien, Luft und Glas, zu bestimmen. Dies glückte ihm mit Hülfe des im X. Kapitel der Dioptrik angegebenen Messlineals, dessen dort gegebene Beschreibung fast wörtlich mit den brieflichen Mittheilungen darüber aus dem Jahre 1629 übereinstimmt[25]). Um so zusammengesetzte Betrachtungen, wie sie dieses Messinstrument nöthig machte, durchzuführen, musste aber nothwendigerweise eine angemessene Zeit vergehen, und so werden wir nicht irren, wenn wir annehmen, dass Descartes bereits 1627 oder noch früher im Besitz aller zum Schliff brauchbarer elliptischer und hyperbolischer Gläser nothwendigen Hülfsmittel gewesen ist. Damit kommen wir dem Todesjahre Snell's 1626 so nahe, dass man versucht ist, die Beschäftigung beider Männer, Snell's und Descartes', mit den Brechungserscheinungen des Lichts für nahezu gleichzeitig zu halten, während beide räumlich weit von einander getrennt waren, auch einen unmittelbaren oder mittelbaren brieflichen Verkehr nicht hatten.

Aus alle dem geht hervor, dass Descartes bereits 1628 im vollen Besitz des Lichtbrechungsgesetzes gewesen ist, obwohl die Dioptrik erst 1637 heraus kam, dass er also vollkommen damit vertraut war, als er Holland zum dauernden Aufenthalt nahm, und dass ihm die ganzen 20 Jahre, die er dort verlebte, in diesem Punkte nichts mehr helfen konnten. Damit ist eigentlich auch der Punkt 2 erledigt, dass Hortensius ihm die

Kenntniss des Snell'schen Brechungsgesetzes vermittelt habe, indem wie Isaak Voss[2]) behauptet, Descartes durch dessen Vorträge die Hauptsache, die Verwendung von Strecken bei Aufstellung des Lichtbrechungsgesetzes, erfahren habe. Dem widerstreitet vor allem des Hortensius damals noch jugendliches Alter: er ist erst im Jahre 1605 geboren, war also, als Descartes zum zweiten Male im Winter 1621 auf 1622 Holland betrat, 16 bis 17 Jahre alt, und kann somit wohl kaum damals Vorträge über Snell's Dioptrik gehalten haben, vorausgesetzt, dass Snell zu jener Zeit bereits seinen Schülern und damit weiteren Kreisen, denn Hortensius war kein Schüler Snell's, das Brechungsgesetz mittheilen konnte. Im Jahre 1634 wird er Lehrer der Mathematik in Amsterdam, und hiermit lässt sich wohl vereinigen, dass Descartes, der sich später häufig in Amsterdam aufhielt, jetzt durch Hortensius Kunde von Snell's Entdeckung bekommen haben kann. Damals aber war, wie oben ausgeführt worden ist, Descartes längst im Besitze seines eigenen Brechungsgesetzes, und so konnte ihm Hortensius nichts Neues bieten, ja Descartes musste, wenn Hortensius die Snell'sche Fassung des Gesetzes vortrug, sich mit vollem Rechte sagen, dass die seinige bei weitem die bessere sei.

Fragt man, und das ist an dieser Stelle nothwendig, nach den hauptsächlichsten Quellen, auf welche man für richtige Beurtheilung der Beziehungen Descartes' zu Snell und seiner Entdeckung zurückgreifen muss, so ist ausser dem 70. und 81. Briefe des zweiten Buches besonders der ziemlich vollständige Briefwechsel zwischen Descartes und Ferrier zu erwähnen, welcher in den Briefen III, 79—83 vorliegt. Namentlich dürfte der 82. Brief eine besondere Bedeutung beanspruchen. Er ist wie die übrigen im Spätjahr 1629 geschrieben, als Descartes bereits nach Holland übergesiedelt war und Ferrier in Paris in gedrückter Stimmung zurückgelassen hatte. Ferrier hatte nämlich weitere Aufträge bekommen, Gläser, sei es zu Teleskopen, sei es zu andern Zwecken, zu schleifen und vermochte es, nachdem Descartes Paris verlassen hatte, nicht mehr auszuführen. Er war gewiss auch theoretisch gebildet und geeignet Descartes Entwicklungen zu verstehen, war aber jetzt dennoch einer vollständigen Rathlosigkeit zum Opfer gefallen, woraus hervorgeht, dass er nicht die selbstständige Bedeutung gehabt haben wird, die Kuno Fischer ihm in der Darstellung dieser Periode des Lebens Descartes' zuspricht. Er war allerdings ein Freund des letzteren und kann schon desshalb nicht ganz ohne Kenntnisse gewesen sein, aber gewiss wurde diese Freundschaft durch seine seltene technische Geschicklichkeit wesentlich befördert.

Die Briefe zwischen beiden Männern handeln lediglich von der Einrichtung der Schleifmaschinen für gekrümmte Gläser und den Entdeckungen

des Descartes, um die richtige Gestalt der hyperbolischen Gläser festzustellen. Ferrier hatte sich früher Notizen darüber gemacht, diese aber verloren und wendet sich nun brieflich an Descartes, da eine persönliche Zusammenkunft nicht ausgeführt werden konnte, um die wichtigen, zur Ausübung seiner Kunst nothwendigen Anleitungen zu erlangen. Descartes antwortet ihm sehr ausführlich. In diesen Antworten begegnet man nun, wie oben angedeutet wurde, allen den Gedanken und Entdeckungen, welche nach so langen Jahren erst in der Dioptrik niedergelegt und veröffentlicht wurden. Dass er hier auch Mydorge gegenüber, den man vielleicht als den einzigen Nebenbuhler des Descartes in optischen Dingen bezeichnen kann, durchaus selbstständig und völlig überlegen erscheint, ist namentlich aus einer Wendung ersichtlich, welche er bei der Beschreibung der hauptsächlichsten, zur Herstellung der Schleifmaschine nothwendigen Construktion gebraucht. Da heisst es: „Ein weit grösseres Geheimniss ist es, mit Hülfe jener drei Punkte A, B, C oder D, E, F oder ähnlich liegender, den Neigungswinkel zu finden, den Deine Maschine haben muss, und ich glaube nicht, dass irgend jemand Dir ausser mir Auskunft darüber geben könnte, obwohl die Ausführung nicht besonders schwierig ist.“ Was sich Descartes hier selbst zuschreibt, muss auch unbedingt als sein geistiges Eigenthum angesehen werden. Aber auch, was den übrigen Inhalt der Briefe und die ganze Art, die hier behandelten Probleme aufzufassen, betrifft, so geht Descartes im Vergleich zu Snell von so verschiedenen Grundlagen aus, dass es kaum möglich ist, zu verstehen, wie er, wenn er die Snell'schen Entdeckungen schon kannte, den Umweg durch die Kegelschnitte und sein Diopterinstrument hat machen können.

Aber auch abgesehen von diesen inneren Gründen, welche gegen eine Abhängigkeit von Snell sprechen, muss man bedenken, dass Descartes, als er sich das Brechungsgesetz klar machte, in Paris in der allergrössten Zurückgezogenheit lebte, so dass er selbst für einen Theil seiner pariser Freunde für verschollen galt, und dass er mit Holland in gar keinem Verkehre stand. Es wird somit nahezu undenkbar, dass er bei den damaligen Verkehrsmitteln von einem nur im Manuscripte vorhandenen Werke eines Leydener Gelehrten, wie es das Werk Snell's über Optik war, Kenntniss bekommen habe, welches in Holland selbst fast völlig unbekannt blieb. Dass damals wie auch später nach Frankreich von der Snell'schen Entdeckung nichts gedrungen war, lässt sich vielleicht am besten aus dem Verhalten Fermat's ersehen, welcher von 1637 ab mit Descartes in einen heftigen wissenschaftlichen Streit über das Brechungsgesetz gerieth, und da er dem Descartes und seinen Schülern eine Zeitlang äusserst feindselig gesinnt war, gewiss kein Mittel von der Tragweite des Vorwurfs einer Fälschung unbenutzt gelassen hätte, um Descartes zu bekämpfen. Durch

den jahrelangen Streit geht auch nicht die leiseste Andeutung davon hindurch, dass noch ein Anderer ein Brechungsgesetz formulirt habe.

So kommen wir denn zu dem Schluss, dass Descartes, wenn er überhaupt von des Snell Entdeckung Nutzen gezogen haben soll, dieselbe während seines kurzen Aufenthalts in Holland während des Winters 1621 auf 22 erfahren haben müsste, dass er aber, wenn dies nicht geschehen ist, das Brechungsgesetz selbstständig aufgefunden hat. Die von Voss und Poggendorff aus den Zeitumständen entnommenen Gründe für die Entlehnung desselben von Snell reichen nicht mehr hin, und man müsste sich daher auf andere stützen; solche sind aber nicht vorhanden.

Beachten wir nun noch kurz den Anklagepunkt 3, „dass er so gut wie niemals seine Quellen nennt.“ Soll man diesen Vorwurf so auffassen, dass er gesucht habe, auch wo er die Quellen wusste, den mitgetheilten Inhalt derselben als sein Eigenthum in Anspruch zu nehmen, so braucht dem nur entgegengehalten zu werden, einmal, dass es in unserm Falle wohl ein hoffnungsloses Unternehmen gewesen wäre, ein anerkanntermassen auf Snell zurückgeführtes Gesetz noch nach elf Jahren als sein Eigenthum zu reklamiren, ohne besonders es zu betonen, dass nicht Snell, sondern er der Entdecker sei, dann aber auch, dass Descartes brieflich eine solche Absicht überhaupt weit von sich weist. Poggendorff spricht den schweren Vorwurf der Unredlichkeit ganz allgemein aus, ist dabei aber blindlings seinen Gewährsmännern Leibnitz und Wilde gefolgt, ohne zu prüfen, ob es den vorliegenden Aeusserungen des Descartes selbst entsprechend war, eine solche Anklage zu erheben. Worauf Leibnitz seinen Zweifel an Descartes Ehrlichkeit gründete, wissen wir nicht, denn dass Spleissius die Wirbel des Descartes bereits bei Giord. Bruno und Kepler gefunden haben will, kann doch nicht genügen. Descartes hatte, diese Ueberzeugung dürfen wir nicht so leicht preisgeben, ein viel zu reges Gewissen, um sich eine solche wissenschaftliche Niedrigkeit, wie sie in dem Vorwurfe Poggendorffs liegt, hier zu Schulden kommen zu lassen. Sind wir doch in der Lage, sein Verhalten in mehreren ganz ähnlichen Fällen zu beobachten.

Man hatte ihm den Vorwurf gemacht, wie er durch Mersenne erfuhr, dass er, ohne Kepler zu nennen, seine Kenntniss der hyperbolischen und elliptischen Gläser sowie ihre Benutzung aus Kepler's Schriften in seine Dioptrik herübergenommen habe. Auf diesen Vorwurf antwortet er in einem Briefe an Mersenne in unverblümter Weise, so dass wir einen Rückschluss auf den Fall mit dem Brechungsgesetz ziehen dürfen.

„Jener Mann, welcher mir vorwirft, ich hätte aus Kepler die Ellipsen und Parabeln meiner Dioptrik, zeigt entweder seine Bosheit oder seine Ignoranz. Was die Ellipse betrifft, so besinne ich mich nicht, dass Kepler

davon handelt, oder wenn er ihrer erwähnt, so lässt er merken, dass sie nicht die anaklastische sei, die er suchte. Was die Hyperbel betrifft, so besinne ich mich, dass er versucht habe, zu beweisen, dass sie solche ebenfalls nicht ist, obwohl er sagt, dass sie von ihr nicht viel unterschieden sei. Ich überlasse es Dir also zu urtheilen, ob ich die Wahrheit einer Sache von einem Manne gelernt habe, welcher zu beweisen sucht, dass sie falsch sei. Das hindert aber nicht, dass ich gestehe, wie Kepler mein hauptsächlichster Lehrer in der Optik und von allen bis dahin der bewandertste darin gewesen ist.“[26])

In diesem Falle also ist es klar, dass Descartes keinen Grund hatte Kepler in seiner Schrift zu erwähnen. Jedermann hatte Kepler's Dioptrik in Händen und konnte den bedeutenden Fortschritt, welchen Descartes darüber hinaus that, selbst beurtheilen. Letzterer hat sich aber überhaupt niemals ernstlich mit dem Gedanken getragen, anderen zu nahe zu treten oder ist damit umgegangen, anderen zuvorzukommen. Schreibt er doch einem befreundeten Jesuiten, nachdem die Dioptrik erschienen war: „Ich danke Dir, dass Du mir Deine Freude darüber ausdrückst, dass ich mir bei der Veröffentlichung meiner Ideeen von andern nicht habe zuvorkommen lassen. Das habe ich in Wahrheit nie gefürchtet. Denn abgesehen davon, dass mir wenig daran liegt, ob ich etwas eher schreibe als andere, wenn es nur wahr ist, was ich schreibe, so hängen meine Gedanken so eng unter einander zusammen, dass Niemand sich etwas davon zuschreiben kann, wenn er nicht das Ganze kennt.“[27]) Konnte wohl Jemand, der den Hauptinhalt seiner Abhandlung, nämlich das Brechungsgesetz, von einem andern entnommen haben sollte, es einem gänzlich unbetheiligten gegenüber so einfach und natürlich aussprechen, dass er in Sachen der Dioptrik niemals gefürchtet habe, es werde ihm Jemand zuvorkommen. Das widerspricht aller Wahrscheinlichkeit, denn für so verlogen hat bisher auch der feindseligst gesinnte Gegner den Descartes nicht gehalten, betont doch im Gegentheil K. Fischer geradezu seine Wahrheitsliebe.

Es ist in der That kein besonderer Grund vorhanden, anzunehmen, angesichts der beiden mitgetheilten brieflichen Zeugnisse, dass Descartes bei Ausarbeitung seiner Dioptrik nicht in gutem Glauben, sein Eigenthum mitzutheilen, vorgegangen sei. Dass er von Snell's Entdeckung gehört haben wird, nachdem er in Holland sich niedergelassen hatte, ist dabei sehr wohl möglich, aber wie schon oben erwähnt, waren seine Ideeen durchaus besser, und es liegt kein Grund vor, in einem methodischen Werke, wie es der Discours mit seinen Anhängen ist, die Entdeckungen Anderer über denselben Punkt, zumal wenn sie dem Werth nach geringer sind, unter Anführung des Namens der Entdecker aufzuführen.

Es wird dem Descartes in diesem Falle aus seiner vermeintlichen Gewohnheit, die Namen der Autoren, aus welchen er schöpfte, zu verschweigen, ein Vorwurf nicht gemacht werden können.

Der zweite jener oben erwähnten Fälle betrifft seine Stellung zu Galilei. Ebenfalls durch Mersenne hatte er erfahren, man habe es ihm verdacht, dass er bei den Ferngläsern nicht Galilei genannt habe. Hierauf antwortet er in einem auch sonst noch vieles auf unsere Frage bezügliches Interessante enthaltenden Briefe: Was den betrifft, der mir einen Vorwurf daraus macht, dass ich Galilei nicht genannt habe, so scheint es mir, als habe er es darauf angelegt, etwas auszusetzen, aber einen wirklichen Grund hat er doch nicht gefunden. Denn Galilei schreibt sich ja selbst die Erfindung der Fernröhre nicht zu — und ich brauchte nur über ihren Erfinder zu berichten. Auch hatte ich keinen von denen, welche vor mir über Optik schrieben, zu erwähnen, weil ich keine Geschichte der Optik verfassen wollte, und ich glaube, damit genug gethan zu haben, dass ich im Allgemeinen aussprach, wie Manche vor mir vieles entdeckt hätten, damit ich nicht beschuldigt würde, ich hätte mir die Entdeckungen anderer zuschreiben wollen. Hätte ich mir damit doch selbst viel grösseres Unrecht gethan, als denjenigen, deren Namen ich fortliess. Es lässt sich dabei sogar denken, dasse jene viel mehr gethan hätten, als man es vielleicht meinen würde, wenn ich gesagt hätte, wer diese gewesen sind [28]).

Diese Aeusserung widerlegt auf das Bündigste jede Anschuldigung einer absichtlichen Aufnahme fremder Entdeckungen in sein Werk, um sich mit dem Eigenthum Anderer zu bereichern. Freilich wäre es für unsere Frage von der grössten Wichtigkeit zu erfahren, wen Descartes unter denjenigen, welche früher über Optik schrieben, gemeint haben wird. Kepler ohne Zweifel, und ausser den Alten Alhazen nebst Vitello, auch Antonius de Dominis, Aguilonius und Maurolycus. Dass nach den Worten des Briefes nur solche gemeint sein können, deren Schriften gedruckt vorliegen, ist zwar nicht durch einen zwingenden Schluss zu entnehmen, liegt aber doch sehr nahe, so dass wir nicht nothwendig auf die Benutzung unedirter Manuscripte geführt werden.

Dieser zweite Fall zeigt aber auch, wie genau man dem Schriftsteller damaliger Zeit nachrechnete, wo er etwa dies oder jenes hergenommen haben könnte, und um so mehr muss man sich heute die Ansicht bilden, dass des Snell Manuscript damals, selbst noch bis 1638, so gut wie unbekannt war, dass aber Descartes nicht mehr wie jeder andere in der Lage war es zu kennen. Wenn Hortensius das Gesetz nach Snell lehrte, so konnte das immerhin schon lange geschehen sein, ehe sich die allgemeine

Ueberzeugung bildete, hier sei wirklich das richtige Gesetz gefunden, da gewiss sehr mühsame Versuche dazu gehörten, um es in der von Snell ausgesprochenen Form durch Beobachtungen zu bestätigen.

Der Schluss jener oben angeführten Auslassung gegenüber Mersenne darf wohl dahin interpretirt werden, dass Descartes überhaupt nicht im entferntesten daran gedacht hat, irgend jemandes Verdienst zu beeinträchtigen, und dass er der Meinung gewesen ist, dass so sehr viel vor ihm in der Optik nicht geleistet worden ist, womit er im Ganzen und Grossen auch völlig im Recht war.

Im Anschluss an die beiden so eben erwähnten Gelegenheiten, wo sich dem Descartes Anlass bot, seine Beziehungen zu älteren Autoren und seine Ansichten über die Benutzung der von ihnen gewonnenen Resultate darzulegen, kann ich es nicht vorübergehen lassen, auch noch eines dritten Falles zu erwähnen, der zwar, weil eine Mittelsperson wie Mersenne fehlt, einen privateren Charakter trägt als jene beiden anderen, der zugleich aber auch durch die ausführlicheren Mittheilungen des Descartes für das Verständniss seiner Persönlichkeit eine nicht zu unterschätzende Bedeutung erhält. Descartes war, wie oben erwähnt wurde, bei seinem ersten Aufenthalt in Breda mit dem holländischen Mathematiker Beekmann unter Umständen, die zwar interessant genug sind, hier aber unerwähnt gelassen werden sollen, bekannt geworden und hatte sich, trotzdem jener bedeutend älter war, eng mit ihm befreundet. Er hatte jenem seine Abhandlung über Musik gewidmet, musste aber erfahren, dass Beekmann sich gegen dritte Personen äusserte, Descartes habe das, was er in dieser Abhandlung niedergelegt, von ihm gelernt. Ueber diesen Punkt entspann sich zwischen beiden ein Briefwechsel, der zum Theil noch erhalten ist; es sind nämlich noch zwei Briefe von Descartes an Beekmann vorhanden. Zwar fehlt bei beiden die Ueberschrift, aber der Inhalt lässt gar keinen Zweifel darüber aufkommen, dass sie an Beekmann gerichtet sind. Der längere von ihnen, der zwölfte im zweiten Theil, ist vom 17. Oct. 1630 datirt, was zur richtigen Deutung einer besonders wichtigen Stelle werthvoll ist. In diesem letzteren Briefe behandelt Descartes seinen Freund wie einen, der an einer psychischen Krankheit leidet und sucht in wahrhaft freundschaftlicher Weise sein auf Irrwege gerathenes Gemüth wieder auf den richtigen Pfad zu lenken. Beekmann muss von krankhafter Ruhmsucht ergriffen worden sein, denn Descartes legt ihm in der ihm eignen klaren und einfachen Weise die Fälle dar, wie Entdecker wissenschaftlicher Wahrheiten zu ihren Resultaten kommen können. Leider verbietet der Charakter unserer Schrift näher darauf einzugehen, bemerkenswerth aber scheint mir folgende Partie: „Hast Du etwas der Erwähnung Werthes allein durch die Kraft Deines

Geistes und unter Anleitung Deiner Vernunft zu Stande gebracht, so gestehe ich, dass ich Dich loben muss, aber zu gleicher Zeit brauchst Du nicht besorgt zu sein, dass man es Dir raube. Wasser ist zwar stets Wasser, hat aber doch immer einen anderen Geschmack, wenn man es aus der Quelle, oder aus einem Kruge, oder aus dem Flusse trinkt. Wird etwas von dem Ort, wo es entstand, übertragen in einen anderen, so kann es zwar geschehen, dass es besser wird, noch häufiger aber verdirbt es, und niemals verläugnet es seine angeborenen Eigenschaften derart, dass man nicht leichtlich merken könne, es sei von anderwärts hergenommen. Du schreibst, Du habest viel von mir gelernt; ich läugne es nicht, wenn ich auch meine, dass es wenig ist, nicht vieles, aber wie viel es auch sei, mache davon Gebrauch, wenn Du kannst, schreibe es Dir sogar selbst zu, meinethalben. Ich habe es mir nirgends notirt, habe auch nicht dabei vermerkt, wann ich es gefunden, und dennoch glaube ich, dass, wenn ich den Leuten überhaupt den geistigen Boden meines Wesens bekannt werden lasse, ein jeder leicht erkennen wird, dass jene Früchte von ihm und von keinem andern entnommen sind."

Es spricht sich in diesen Worten nicht nur eine nachahmungswerthe Unbesorgtheit um seine eigenen Geistesfrüchte aus, sondern was mehr bedeutet, Descartes wird bei einem so stark entwickelten Gefühl für die unvertilgbare Originalität der Entdeckungen und Erfindungen eines Forschers niemals auf den Gedanken gekommen sein, sich der Früchte des Nachdenkens Anderer hinterlistig zu bemächtigen. Er reagirt daher auch jedesmal kräftig, wo ihm dergleichen zugemuthet wird, er reagirt auch hier, wo Beekmann an ihm selbst einen Raub begeht. Es war dieses nicht allein an seiner Schrift über die Musik geschehen, sondern auch noch an den von Descartes bei den Kegelschnitten gefundenen Eigenschaften. Derselbe Brief handelt weitläufig darüber und weist Beekmann in die gebührenden Schranken zurück. „Ich erwähnte einstmals die Eigenschaft der Hyperbel, die Strahlen zu brechen, deren Beweis mir gerade entfallen war und, wie es bei den leichtesten Dingen häufig geschieht, nicht gleich einfallen wollte; aber den entsprechenden bei der Ellipse theilte ich Dir mit und setzte Dir noch einige andere Theoreme auseinander, mit deren Hülfe jene Eigenschaft leicht bewiesen werden konnte, so dass sie Niemandem, der sich nur ein klein wenig anstrengte, entgehen konnte. Desshalb ermahnte ich Dich, Deinen Geist damit zu üben, was ich sicherlich nicht gethan hätte, wenn ich nicht, da Du in den Kegelschnitten selbst zugabst wenig zu wissen, die Aufgabe für sehr leicht gehalten hätte. Du suchtest, fandest und zeigtest es mir, und ich war erfreut darüber, sagte auch, dass ich den Beweis benutzen würde, falls ich einmal über diese Dinge etwas

schreiben würde.“ Beekmann hatte nun, weil er den Beweis aufgefunden, Descartes gegenüber geäussert, er (Descartes) habe ihm diese Eigenschaft zu danken. Wie nicht anders zu erwarten, weist Descartes dieses Ansinnen zurück und hatte dazu auch vollkommenen Grund.

Dieser Brief an Beekmann lässt ausser den eben besprochenen Verhältnissen, die sich auf die Eigenschaft der Hyperbel beziehen, auch noch eine ungefähre Zeitbestimmung zu, wann Descartes sich damit abgegeben haben wird. Wir haben oben die Briefe von Ferrier besonders hervorgehoben. Dieser im October 1630 an Beekmann geschriebene Brief ist die Antwort auf einen Brief des letzteren, der nach Unterbrechung der Correspondenz während eines vollen Jahres bei Descartes einlief. Die Besprechungen über die Hyperbel werden also wohl mindestens ins Jahr 1629 fallen, also in eine Zeit, wo Descartes gewiss noch in Frankreich war. Wir werden aber durch den Brief noch weiter geführt. Beekmann hatte in seinem letzten Briefe Descartes aufgefordert, zu ihm zu kommen, in der sonderbaren Meinung, er könne bei ihm besonders erfolgreich arbeiten. Descartes antwortet ihm: „Erinnerst du dich nicht, dass du mir damals, als ich den Studien oblag, die du selbst eingestandenermassen nicht verstandest, so dass du anderes von mir zu hören begehrtest, die ich aber längst als Jugendstudien bei Seite gelegt habe, so sehr hinderlich warst.“ Wir fragen billig, was waren das für Studien. Es will mir nicht unwahrscheinlich vorkommen, als wenn, nach der ganzen Fassung der darauf bezüglichen Briefstelle, Descartes mit Beekmann mündlich über die Hyperbel verhandelt habe, und dass die Kegelschnittstudien es gewesen sind, mit welchen Descartes sich damals 1618 und 1619 in Breda besonders abgegeben haben wird. Es könnte ja freilich auch die analytische Geometrie gewesen sein, aber auch in dieser kommen optische Probleme vor. Sind es die Kegelschnitte gewesen, so würde nicht nur, wie aus den Briefen an Ferrier hervorgeht, sich 1627 als das früheste Jahr der Bekanntschaft damit ergeben, was auch durch die sichere Berechnung aus dem Briefe an Beekmann im Allgemeinen bestätigt wird, sondern es würde bereits 1618 oder 1619 Descartes im Besitz der hauptsächlichsten Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel, die sich auf die Brechung der Lichtstrahlen beziehen, gewesen sein. Doch will ich gerne eingestehen, dass dies nur ein Wahrscheinlichkeitsschluss ist[29]), welcher aus einer Interpretation jener Briefstelle gefolgert wurde die freilich manches für sich hat, aber der Bestätigung durch andere Momente noch bedarf.

Es findet sich noch ein letzter Fall der erwähnten Art, wo dem Descartes vorgeworfen wird, in seiner Dioptrik das Eigenthum Anderer gemissbraucht zu haben. Er ist am Schluss eines langen Briefes an Mersenne[30]) erwähnt, und wird von Descartes mit den folgenden wenigen

Worten abgemacht: „Ich bin Dir sehr dankbar, dass Du meine Sache vertheidigst, auch glaube ich wirklich nicht, dass jemand mit nur einigermassen gesundem Urtheil der Meinung sein kann, ich hätte meine Dioptrik von Roger Baco entlehnt und noch viel weniger von Fioravanti, welcher ein reiner Marktschreier ist.“ Roger Baco hat ja manche Verdienste um die Optik, aber Descartes hat vollkommen Recht, wenn er jenen Vorwurf, er habe aus dessen Schriften seine Dioptrik zusammengetragen, kurz abfertigt.

Ueberblicken wir die Reihe der eben erwähnten Fälle, in welchen Descartes des Plagiats beschuldigt wird, so ist es ins Auge fallend, dass kaum ein bedeutender Name der damaligen Zeit dabei vergessen ist. Ueberall witterten die Gegner des Neuerers Unredlichkeiten und wollten es nicht gelten lassen, dass er etwas selbstständig gefunden habe. In allen drei Fällen sehen wir Descartes, der davon erfuhr und sich rechtfertigen konnte, siegreich die Anschuldigungen zurückweisen. Es erscheint uns nun als eine einfache Fortsetzung dieser Vorgänge, wenn Isaak Vossius von Neuem die Anklage des Plagiats erhebt und zwar unter besonders günstigen Umständen, denn Descartes ist bereits längst gestorben. Natürlich kann er sich nun nicht mehr rechtfertigen. Dass aber diese Anschuldigung so sehr spät auftritt, dass in dem ganzen, bis gegen 1660 hin sich fortspinnenden Streit um das Brechungsgesetz zwischen Clerselier und Fermat niemals ein Zweifel über den rechtmässigen Anspruch des Descartes auf das von ihm in der Dioptrik gegebene Brechungsgesetz geäussert wird, alles das führt darauf hin, wie unbekannt des Snell Schrift bis zu der Veröffentlichung ihres wesentlichen Inhalts durch Voss geblieben ist und wie unwahrscheinlich es sein muss, dass gerade Descartes, welcher selbst über denselben Gegenstand lange nachgedacht hatte, allein davon Kenntniss bekommen haben sollte.

Die bisher angeführten Zeugnisse, welche zu Descartes' Gunsten sprechen, sind aber nicht die einzigen, die zur Beurtheilung seiner inneren Stellung gegenüber einer so verurtheilungswürdigen That, wie es das Begehen eines Plagiats immer ist, wichtig sind. Es ist noch ein anderer merkwürdiger Brief an Mersenne aus dem Jahre 1630 vorhanden (Ep. pars II, ep. 103), in welchem er über seine Dioptrik und allerhand andere Pläne spricht. Mersenne scheint ihn, wie schon oft, wieder einmal angetrieben zu haben, seine Arbeiten zu Ende zu führen und Descartes weicht von neuem aus, spricht sich aber auf das zuversichtlichste darüber aus, dass ihm Niemand seine Ernte rauben werde[31]) und dass höchstens das, was er in den Briefen an D. F., worunter ohne Zweifel Dom. Ferrier zu verstehen ist, niedergelegt habe, auch von Anderen zum Gegenstand einer Abhandlung gemacht werden könnte. Der wörtliche Ausdruck in der betreffenden Stelle[31])

ist ein so charakteristischer, dass man bei unbefangener Prüfung desselben fast einen direkten Beweis davon vor sich hat, dass jemand, der ihn braucht, nicht selbst „seine Sichel in eine fremde Ernte“ schlagen kann. Und wenn Descartes es hier voll Zuversicht ausspricht, dass Niemand dasselbe schreiben könne, was er schreibt, so muss man ihm wohl glauben, dass er dies zur Zeit der Abfassung jenes Briefes aufrichtig gemeint habe. Ist die Zeitangabe 1630 für dieselbe richtig, so konnte Descartes damals auch noch nichts von des Hortensius Vorträgen, falls er sie wirklich hörte oder von ihrem Inhalt Kenntniss bekam, gelernt haben, denn Hortensius wird kaum vor 1630 öffentliche Vorträge gehalten haben, es sind auch wohl überhaupt darunter nur seine Vorträge nach seiner Anstellung in Amsterdam zu verstehen. Ueber das, was Descartes hauptsächlich gemeint hat mit dem „was er schreibe“, giebt uns ein anderer Brief[32]) Auskunft, in welchem er es einfach ausspricht, dass der erste Theil der Dioptrik nichts Anderes enthalten wird, als das Sinus-Verhältniss des Einfalls- und Brechungswinkels. Dieses Verhältniss wird nun in der Dioptrik selbst niemals unter dieser Bezeichnung erwähnt, was gewiss auffallend ist. Erklärlich wird dieser Umstand nur dadurch, dass in damaliger Zeit die geometrische Interpretation die bevorzugte war, die trigonometrische daher von geringerer Bedeutung sein musste. In einem Briefe dagegen war die letztere, weil sie eine ungleich kürzere Art und Weise des Ausdrucks zuliess, sehr wohl angebracht. Einen positiven Beweis, dass dieses wohl der richtige Grund sein wird, finden wir in einem Briefe an Mersenne, der, wie aus seinem Anfange zu entnehmen ist, im Jahre 1641 geschrieben sein wird. Dort wird eines bekannten Verfahrens, die Brechung der Lichtstrahlen zu prüfen, gedacht, und Descartes rechtfertigt sich darüber, dass er es in seiner Dioptrik nicht erwähnt habe. Er sagt, „er habe das unterlassen, nicht weil er damit unbekannt gewesen wäre, sondern weil jene Art und Weise weniger geometrisch gewesen sei.“ So finden wir denn in der Dioptrik überall die geometrische Methode bevorzugt, und Vieles ohne direkten Beweis mitgetheilt, so dass gewisse Partien allerdings nicht allgemein verständlich sein konnten. Dieses letztere scheint er auch selbst gefühlt zu haben, er spricht es wenigstens in einer charakteristischen Briefstelle[33]), die vielleicht auch als Beleg dafür, dass er nur Eignes in der Dioptrik vortrage, genommen werden kann, hinlänglich deutlich aus.

Beachtung verdient ferner ein Brief[34]) an einen Ungenannten (Mersenne?), wo er schreibt: „Weil Du etwas von meiner Dioptrik zu sehen wünschest, schicke ich Dir den ersten Theil derselben, wo ich unter Beiseitesetzung aller Philosophie die Brechung zu erklären versucht habe. Du wirst sehen, dass das Werk wenig Bedeutung hat und wirst nach der Lek-

türe gewiss viel weniger Wesen davon machen als jetzt. Ich höre übrigens gerne Deine Meinung darüber. Schicke mir das Manuscript wieder zurück, da ich kein anderes Exemplar davon habe und ich nicht will, dass ein Anderer ausser Dir es sieht."

Wir finden in diesem Briefe den unbefangenen Ausdruck eines Mannes, der seine Arbeit einem Freunde gegenüber charakterisirt, und erhalten den Eindruck, dass der Erklärungsversuch der Brechung durchaus Eigenthum des Briefschreibers ist. Allerdings ist es ja immer möglich, zwischen der Erklärung und der Entdeckung des Brechungsgesetzes noch zu unterscheiden. Descartes braucht, so könnte man schliessen, nur die Erklärung des von einem Anderen gefundenen Gesetzes als sein Eigenthum in Anspruch genommen zu haben. Indess hängt die Erklärungsweise so eng mit seiner eignen Entwicklung des Gesetzes zusammen, dass man kaum das eine von dem andern trennen kann.

Von allen die Refraktion direkt betreffenden Briefstellen scheint mir endlich diejenige die wichtigste zu sein, in welcher er sich Mersenne gegenüber über die Ausstellungen ausspricht, welche ein gewisser Bourdin von der Gesellschaft Jesu, ein damals bekannter Mathematiker, an seiner Dioptrik gemacht hatte[35]). Bourdin muss die Beweisführungen des Descartes in sehr geringschätziger Weise beurtheilt und sehr verletzende Ausdrücke dabei gebraucht haben, so dass letzterer sich dem Freunde gegenüber weitläufiger als sonst rechtfertigt. Dann fährt er fort: „Ich wundere mich auch darüber, dass er sagt, „„mein sogenannter Beweis könne durch ihm längst bekannte Mittel geführt werden, von denen er aber in meinen Schriften nichts bemerkt habe, die ich also, als wenn sie zur Sache nichts thäten, einfach bei Seite gelassen hätte."" Wenn ich dies mit der 5. und 6. seiner optischen Thesen Seite 9 vergleiche und mit seinem ganzen Unternehmen überhaupt, so kann ich mir gar nichts Anderes denken, als dass er über die Reflexion und Refraktion genau das, was ich lehre, und was Niemand vor mir bewiesen hat, seinen Schülern mitgetheilt habe, nur mit veränderten und entstellten Worten, so dass er etwas Anderes zu sagen scheint und dass er mir andere Ansichten unterstellt, um sie nachher zu verbessern." Wie soll man das hier dem Mersenne gegenüber gegebene Geständniss, der mindestens ebenso gut wie Descartes mit allen literarischen Erscheinungen bekannt war, anders deuten, als dass Descartes in gutem Glauben die Beweise für die optischen Gesetze nicht allein als sein Eigenthum beansprucht, sondern noch besonders hervorhebt, dass Niemand sie früher gegeben habe. Es betrifft dies wesentlich die Refraktion, gegen welche Bourdin auftrat. Hätte er früher das Snell'sche Manuscript gesehen, worin nach Voss ein Beweis des Brechungsgesetzes enthalten war,

so würde er so nicht haben schreiben können. Hätte er von Hortensius den Beweis gehört, so würde er gleichfalls den obigen Ausdruck nur mit Einschränkung haben brauchen können, denn Hortensius konnte auch nur Snell's Beweis mittheilen. Es bleibt freilich auch hier wieder die Möglichkeit, unter Berücksichtigung natürlich des oben aus der historischen Darlegung Gewonnenen, Descartes habe zwar den Beweis mit ihm eigenthümlichen Mitteln gegeben, aber für ein Gesetz, dessen wesentlichen Charakter, nämlich die Benutzung der Strecken statt der Winkel, er von Anderen überkommen habe. Unwahrscheinlich bleibt eben bei der Erwägung, in wie frühe Zeit des Descartes Bekanntschaft mit dem Brechungsgesetz hinaufreicht, diese Möglichkeit auf jeden Fall, die angeführte Briefstelle gehört aber zu den merkwürdigsten und ist, wie die Mehrzahl der oben benutzten, bisher völlig unbeachtet geblieben.

Damit verlassen wir die Betrachtung der Zeitverhältnisse und der Momente, welche aus dem Charakter des Descartes für seinen Anspruch auf die selbstständige Entdeckung des Brechungsgesetzes angeführt werden können und wenden uns der Erörterung des Weges zu, auf welchem er zur Aufstellung seines Gesetzes gelangen konnte.

2.

Versuchen wir uns den Gedankengang, den Descartes bei der Entdeckung des Brechungsgesetzes verfolgt haben wird, falls er selbstständig zu demselben gelangt ist, zu vergegenwärtigen, so sind es hauptsächlich seine Studien an den Kegelschnitten, welche dabei zu berücksichtigen sind. Ausser diesen dürfen aber die Bestrebungen, welche, wie bereits oben erwähnt wurde, in der damaligen Zeit lagen, möglichst gute Brenngläser zu construiren und die Beschäftigung mit den optischen Schriften seiner Vorgänger, namentlich Kepler's, nicht unerwähnt gelassen werden. Durch Kepler war die Optik zuerst in wirklich wissenschaftlicher Weise behandelt worden, und wenn er auch das Brechungsgesetz noch nicht auffand, so waren doch namentlich die Eigenschaften der Linsengläser, so wie die der optischen Instrumente, auf ganz neue Weise von ihm behandelt worden. Doch mag sein Einfluss auch besonders durch seine kritischen Bemerkungen nicht unerheblich gewesen sein. Im 4. Kapitel nämlich der Paralipomena in Vitellionem, dem Kapitel, welches von der Brechung handelt, bespricht Kepler im zweiten Abschnitt die Meinungen des Alhazen und Vitello und führt, wie das überhaupt seine Art ist, alles Wesentliche mit peinlichster Genauigkeit und Ausführlichkeit auf. Dabei erwähnt er, dass letzterer noch etwas ganz besonders Subtiles ersonnen habe, dem er aber doch nicht bei-

stimmen könne. Die Bewegung des schräg einfallenden Lichtstrahles sei, so lehre jener, zusammengesetzt aus einer Bewegung senkrecht und einer andern parallel zur Oberfläche des dichteren Mediums[36]). Wir begegnen also hier der Anschauung, welche auch Descartes bei seinem methodischen Beweise des Brechungsgesetzes im zweiten Kapitel der Dioptrik auseinandersetzt. Kommt so diese von Kepler wieder aus den älteren Schriftstellern hervorgehobene Anschauung, die übrigens Descartes auch unmittelbar aus den Originalwerken derselben entnommen haben konnte (Alhazen war erst 1572 durch Fridericus Risnerus auf Antrieb des Petrus Ramus zu Basel herausgegeben und die Schrift des Vitello war demselben Bande beigefügt), erst bei dem Beweise zur Geltung, so konnte eine Bemerkung Keplers im Anschluss an jene Meinungen Descartes auf seinen Weg der Entdeckung des Gesetzes gelenkt haben. Kepler überschlägt alle Unzuträglichkeiten, welche aus des Alhazen und Vitello Ansicht entspringen, wonach der Lichtstrahl desshalb vom graden Wege abgelenkt werde, damit er dasjenige, was er an Intensität durch das Eintreten in ein dichteres Medium verliert, durch das Näherherantreten an das Einfallsloth wieder gewinne, indem er dann kräftiger den Boden des Gefässes trifft. Bei dieser Erwägung kommt er zu der Ueberzeugung, dass dann die Brechungen mit den Sinus gewisser Winkel wachsen müssten, weil ja die schräg einfallenden Strahlen in diesem Verhältniss abgeschwächt werden. Die Erwähnung des Sinus an dieser Stelle hat für uns in der That etwas Auffallendes, da das Brechungsgesetz durch ein Sinus-Verhältniss ausgedrückt wird.

Es ist nicht unmöglich, dass Descartes hierdurch auf die Sinusse der Winkel aufmerksam geworden ist, gerade wie er vermuthlich ebenfalls durch Keplers Betrachtungen über die Kegelschnitte, die allerdings zu einem Resultat nicht geführt hatten, bewogen worden sein wird, eben diese Curven noch einmal vorzunehmen.

Das Studium an den Kegelschnitten war für Descartes entscheidend. Er fand, dass das Verhältniss der Excentricität zur halben Axe eine merkwürdige Bedeutung bei den optischen Eigenschaften der Kegelschnitte bekommt, woran sich seine weiteren Untersuchungen anschlossen, welche sich in der Dioptrik im achten Kapitel niedergelegt finden[37]). Indem er dieselben verfolgte, fand er, dass, wenn die Ellipse oder Hyperbel die Eigenschaft haben soll, die mit der Axe parallelen Strahlen in einem ihrer Brennpunkte zu sammeln, sich die verschiedenen Lichtgeschwindigkeiten in der Luft und im Glase verhalten müssen wie die halbe Axe zur Excentricität[38]). Dass dieses Verhältniss unmittelbar in das der Sinusse des Einfalls- und Brechungswinkels umgesetzt werden kann, wird ihm nicht entgangen sein, denn, wenn er auch bei dieser Gelegenheit diese Sinusse nicht

direkt erwähnt, so leitet er doch das Verhältniss derjenigen Strecken ab, durch welche sie repräsentirt werden. So war Descartes, indem er von rein theoretischen Gesichtspunkten ausging, auf die Constanz des Sinusverhältnisses zwischen den beiden charakteristischen Winkeln gekommen [39]). Dies wird nach den früheren Auseinandersetzungen 1627 oder schon früher gewesen sein.

Es galt nun blos noch, ein wirkliches elliptisches oder hyperbolisches Brennglas aus Krystallglas zu verfertigen, welches diese theoretischen Gedanken durch den damit anzustellenden Versuch bestätigen konnte. Zu dem Ende musste man für Luft und Glas das Geschwindigkeitsverhältniss der Lichtfortpflanzung kennen. Descartes wird folgenden Schluss gezogen haben. Das Sinus-Verhältniss muss nach der Theorie aus den Kegelschnitten constant sein, also braucht man nur für einen einzigen beliebig einfallenden Strahl den Brechungswinkel zu berücksichtigen, so wird man für Luft und Glas das Sinus-Verhältniss construiren können. Wird hiernach ein Glas geschliffen, bei dem die grosse Axe und die doppelte Excentricität dasselbe Verhältniss besitzen, so wird sich erweisen müssen, ob dies die mit der Axe parallel auffallenden Strahlen in einem seiner Brennpunkte sammelt. Geschieht dies, so ist jenes Verhältniss der Ausdruck des Brechungsgesetzes, geschieht es nicht, so muss weiter gesucht werden, worin dieses Gesetz besteht. Um das Sinusverhältniss für ein Paar zusammengehöriger Winkel, eines Einfalls- und Brechungswinkels zu finden, benutzt Descartes das zu diesem Zweck construirte, höchst sinnreiche Diopter-Instrument, welches, wenn man will, auch bereits von Kepler angedeutet war [40]), aber, wie ein Blick in seine Dioptrik beweist, in sehr unvollkommener Weise und ohne dass die merkwürdige Schlussfolgerung daran angeknüpft war. Auch dieser Versuch geht gewiss bis auf 1627 zurück und ist eine ungemein interessante Anwendung der Eigenschaften des rechtwinkligen Prisma [41]). So kam es, dass Descartes keine Experimente zu machen brauchte, und es fällt damit der vierte Einwand fort. Er ging vielmehr deduktiv zu Werke und nicht wie Snell induktiv. Die einzige Probe auf die Richtigkeit seiner Vorstellungen bestand darin, dass er nach dem an seinem Diopterinstrument abgelesenen Sinus-Verhältniss für Luft und Glas eine Sammellinse schliff und mittelst derselben die zur Axe parallelen Strahlen auffing. Hierin bestand sein Experimentum crucis. Dasselbe ein einziges Mal mit aller Sorgfalt ausgeführt, leistete genau dasselbe, wie zahlreiche Messungen, welche ein rein empirisches Verfahren nöthig machen würde. Dass dieses entscheidende Experiment gelang, war für Descartes stets eine Quelle des grössten Vergnügens, wie er es denn auch mehrmals beschrieb.

Wir haben somit innerhalb des dem Descartes zugänglichen Ideeen-

kreises den vollständigen Schlüssel für den Inhalt und die Form des von ihm ausgesprochenen Lichtbrechungsgesetzes und brauchen nicht nach fremden Hülfen auszuschauen. Descartes selbst deutet auf die Art und Weise, wie er die hierhergehörige Aufgabe gelöst hat, hin, wenn er in einem Briefe an Mersenne[42]) ausspricht, dass die geometrische Betrachtung ihn zum Brechungsgesetz geführt habe.

3.

Es erübrigt noch ein Wort über den von Leibnitz[4]) erhobenen Einwand, dass Descartes sich bei seinem Beweise arg verwickelt habe, beizubringen. Schon Voss spricht es an der bereits mehrfach angeführten Stelle [2]) seiner „Antwort u. s. w.“ aus, dass Descartes wohl den von Snell gegebenen Beweis für das Brechungsgesetz nicht gesehen haben könne, er hätte sonst nicht seinen eignen umständlicheren dafür gegeben. Diese Aeusserung ist in sofern nicht ohne Bedeutung, als die Aussage von Huyghens[3]) damit nicht recht in Einklang zu bringen ist. Letzterer erwähnt nämlich, dass er in Erfahrung gebracht habe, Descartes habe die Handschrift des Snell selbst gesehen. Ist dem so, so wird er ja auch wohl den darin enthaltenen Beweis des Lichtbrechungsgesetzes gesehen haben. Es ergiebt sich hieraus, dass selbst zwischen den alten Gewährsmännern für das Plagiat des Descartes keine Einstimmigkeit besteht, was indess hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Der von Descartes im zweiten Kapitel der Dioptrik gegebene Beweis hat schon zu seinen Lebzeiten mannigfache Anfechtungen erfahren, wie aus den zahlreichen diesen Punkt betreffenden Briefen hervorgeht. Er ist auch späterhin immer wieder befehdet und Poggendorff nennt ihn mit Recht nur einen Versuch zum tieferen Eindringen in die Natur des Lichtes[43]).

Das Merkwürdigste, was daran auffällt, ist jedenfalls dies, dass die Hauptsache, nämlich die Unveränderlichkeit des durch die Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels bestimmten Verhältnisses gar nicht, wie sich's gebührt, in den Vordergrund gerückt ist. Dem Leser wird vielmehr zugemuthet, den Schluss, der zu dieser fundamentalen Wahrheit führt, selbst zu ziehen, ohne dass Descartes darauf hinweist, dass er gezogen werden muss. Nachdem er nämlich in sehr ausführlicher Darlegung Beispiele und einzelne Fälle besprochen und die Neigung des gebrochenen Strahls gegen die horizontale Gränzfläche beider Medien durch Construktion gefunden hat, fährt er fort: „Es muss dabei betont werden, dass diese Neigung gemessen werden muss durch die Grösse der Linien CB oder AH und EB oder GJ oder ähnlich liegender, nicht durch die Grösse der Winkel, wie ABH oder GBJ und noch viel weniger durch die von DBJ, welcher der Brechungswinkel

genannt wird. (Fig. 1.) Denn das Verhältniss dieser Winkel ändert sich nach der Grösse derselben, dagegen das der Linien AH und GJ oder das entsprechender ändert sich nicht, bei irgend einer Brechung, welche von demselben Körper herrührt."[44]) Hiermit und einigen wenigen anderen gelegentlichen Andeutungen ist die ganze Sache abgethan.

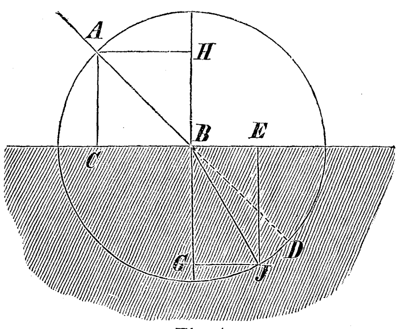


Fig. 1.

Es hat hiernach den Anschein, als wenn Descartes ganz und gar kein Gewicht auf dies merkwürdige Gesetz legte, als wenn er von durchaus Bekanntem spräche, welches er nur noch einmal gelegentlich gegen einige geltend gemachte Irrthümer wahren will. Es macht alles dies durchaus nicht den Eindruck, als wenn Descartes das Bewusstsein habe, etwas ungewöhnlich Bedeutendes ausgesprochen zu haben, wie sich denn auch in dem ganzen an seine Beweisführung anknüpfenden wissenschaftlichen Streit mit Fermat, Hobbes und anderen kein Wort davon findet, dass hier ein bisher noch unbekanntes Naturgesetz ausgesprochen sei. Wüssten wir nicht aus brieflichen Mittheilungen[32]) von Descartes genau, dass diese Unveränderlichkeit des Sinus-Verhältnisses von ihm wirklich als die Hauptsache angesehen worden ist, die Dioptrik würde uns darüber völlig in Zweifel lassen, ob Descartes wirklich diesen wesentlichen Inhalt des neuen Gesetzes richtig gewürdigt hatte. Es findet dies eigenthümliche Verhalten dadurch vielleicht eine Erklärung, dass es Descartes in der Dioptrik auf eine methodische Entwicklung der Ursachen für die Brechung ankam, denn er beweist die Refraktion in völlig derselben Weise, wie die Reflexion. Bemerkenswerth aber bleibt es immerhin, dass der Leser nur wie im Vorübergehen auf das grosse Gesetz aufmerksam gemacht wird und dass er sich selbst in den für ein und dasselbe Medium unveränderlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten den eigentlichen Grund für die Unveränderlichkeit des Sinus-Verhältnisses suchen muss.

Gehen wir nun auf den Einwand des Leibnitz ein, dass Descartes sich bei seinem Beweise arg verwickelt habe[45]).

Bei diesem Beweise muss man bedenken, dass er concipirt wurde in einer Zeit, wo die Zerlegung und Zusammensetzung der Bewegungen und Kräfte noch durchaus nicht ins allgemeine Bewusstsein übergegangen war. Leibnitz dagegen war in diesen neuen Vorstellungen schon durchaus heimisch. So musste ihm denn eine Darstellung, in welcher zwar der Begriff der Componenten verwerthet war, bei dem aber der der Resultanten

noch völlig fehlte, fast unverständlich sein. Dazu kam, dass zu demselben Beweise offenbar ein bestreitbares Theorem von Kepler benutzt wurde, nach welchem ein Lichtstrahl nur an der Gränzfläche (oder eigentlich in derselben) eines dünneren und dichteren Mediums eine Hinderung seiner Bewegung erfährt[46]).

Wenn auch Descartes sich dieses Theorem Kepler's nicht wörtlich aneignet, so lassen sich doch Aussprüche auffinden, welche darauf hindeuten, dass nicht die Beschaffenheit des Körpers, durch welche das Licht hindurchdringt, als solche einen Einfluss auf die Brechung haben könne. So findet man in einem Brief an Mersenne die bemerkenswerthe Stelle: Was jener sagt, dass nämlich die Dichtigkeit des Mediums die Brechung bewirke, lässt sich sogleich als irrthümlich beweisen. Ein Lichtstrahl nämlich, wenn er durch das Wasser dringt, wird nach dem Einfallsloth hin abgelenkt, während ein Ball sich vom Einfallsloth entfernt, so dass eine und dieselbe Dichtigkeit zwei gänzlich entgegengesetzte Wirkungen haben müsste[47]). Descartes hatte sich die Bewegung des Lichtes vollständig in derselben Weise vor sich gehend gedacht, wie die eines gegen die Wasserfläche schräg geworfenen Balles, er konnte also mit Fug und Recht schliessen, wie er es eben that.

Nach jenem Theorem muss, wenn man mit Descartes den schräg gegen eine Wasserfläche gerichteten Lichtstrahl wie aus bewegten Lichttheilchen bestehend ansieht, diese Bewegung in zwei zu einander senkrecht gerichtete zerlegt gedacht werden, von denen die eine parallel mit der Wasserfläche, die andere senkrecht dazu verläuft. Die letztere erfährt allein eine Aenderung der Geschwindigkeit, und damit ist nach den Principien, welche in dem Kepler'schen Satze verborgen liegen, ausgesprochen, dass sich das Licht nach dem Durchtritt durch die Gränzfläche im Wasser nach allen Seiten mit derselben abgeänderten Geschwindigkeit fortbewegt. Der Strahl wird also, wenn die neue Geschwindigkeit $^3/_2$ der alten beträgt, jetzt in $^2/_3$ der früheren Zeiteinheit auf der Peripherie des Kreises angelangt sein, welcher um den Eintrittspunkt des Strahls in das Wasser als Mittelpunkt mit derjenigen Strecke als Radius gelegt ist, welche den Weg während der früheren ganzen Zeiteinheit darstellt[48]). Der Punkt selbst auf dieser Peripherie wird nicht durch Zusammensetzung der vorhandenen Bewegungen gefunden, sondern auf dieselbe Weise, wie es auch beim Reflexionsgesetz geschah, und hiermit sind wir an der Stelle angelangt, an welcher man billig Anstoss nehmen kann und welche auch bereits von den Jesuiten in Clermont, denen Descartes seinen Discours übersandte, beanstandet wurde. Descartes ist jedoch, und das ist für den Augenblick die Hauptsache, bei diesem Beweise durchaus nicht mit seinen Principien in Collision gerathen, denn er besass gar keine speciellen, auf Lichtbewegung bezüglichen, sondern er

suchte sich, so gut es eben anging, mit seinen noch unvollkommenen mechanischen Anschauungen über die Schwierigkeiten des methodischen Beweises hinwegzubringen. Descartes fasst die Aufgabe, den Punkt zu finden, in welchem der Strahl nach seinem Eintritt in ein anderes Medium einen Kreis von gegebener Grösse trifft, nicht als mechanische, wie sie doch eigentlich ist, sondern als geometrische, und behandelt sie darnach, indem er nach Orten für diesen Punkt frägt, für deren Bestimmung dann allerdings mechanische Gesichtspunkte, aber in sich zusammenhangslose, geltend gemacht werden.

Was der Einwurf des Leibnitz eigentlich bezwecken soll, nämlich nachzuweisen, dass Descartes gewaltsam gegen seine Principien und alle Regeln des Schlussverfahrens in seinem Beweise vorgegangen sei, um zu einem Resultat zu gelangen, das er selbst niemals entdeckt, sondern von einem andern entnommen hatte, das können wir nach dem Vorstehenden nicht gelten lassen, glauben vielmehr, dass gerade in seinen Beweisen Descartes besonders methodisch, wenn auch nicht besonders glücklich, zu Werke gegangen sei, und so kann auch der letzte Einwurf gegen die Annahme, dass Descartes das Brechungsgesetz selbstständig entdeckt habe, eine wirkliche Bedeutung nicht behalten.

4.

Die fünf Haupteinwürfe haben wir hiermit auf den Werth zurückgeführt, den sie nach unserer Meinung beanspruchen dürfen. Wir haben nachgewiesen, dass der lange Aufenthalt von 20 Jahren in Holland (1629—1649) Descartes in Bezug auf das Brechungsgesetz nichts helfen konnte, da er schon 1627, wenn nicht viel früher, dasselbe kannte; dass Hortensius ihm nichts mitzutheilen vermochte, da dieser um 1627 ihm mündliche Mittheilungen zu machen nicht im Stande war; dass des Descartes Charakter es gestattet anzunehmen, dass er ein Plagiat mit seinem Ehrgefühl für unvereinbar halten musste; dass er Versuche nicht nöthig hatte, um das Brechungsgesetz zu finden; endlich, dass er in seinem Beweise für dasselbe sich nicht mit seinen eignen Grundsätzen in Widerspruch gesetzt, auch überhaupt sich nicht verwickelt hat. Hiernach sind die aus alter und neuer Zeit stammenden Gründe dafür, dass Descartes das Brechungsgesetz entlehnt habe, wohl nicht mehr als vollgültig anzusehen.

Wie es nun bei historischen Untersuchungen stets der Fall sein wird, so ist auch in unserer speciellen Frage auf die Reihe der Zeitbestimmungen das grösste Gewicht zu legen, sobald es nicht gelingt, einen beglaubigten Ausspruch des Descartes zu finden, durch welchen seine Abhängigkeit von Snell direkt widerlegt wird. Nun ist es zwar möglich gewesen, aus den vorhandenen Briefen zahlreiche Aussprüche zu entnehmen, durch welche

mindestens die Unwahrscheinlichkeit einer solchen bewussten aber verschwiegenen Abhängigkeit sich ergiebt, aber sie sind sämmtlich nicht derart, dass sie eine weitere historische Nachforschung überflüssig machten. Die Frage steht also meiner Ansicht nach so: Hat man die bisherige Meinung von dem Plagiat des Descartes allein darauf gebaut, dass man sich sagte, Descartes müsste nach seiner Uebersiedelung nach Holland 1629 unbedingt, aber auch nur unter dieser Bedingung, das Snell'sche Gesetz erfahren haben, so hat die historische Untersuchung ergeben, dass dann ein Plagiat unmöglich ist, weil er schon 1627 oder 1628 das Brechungsgesetz kannte, er es also selbstständig gefunden haben musste.

Giebt man, und das wäre nun die neue Phase, in welche die Streitfrage eintritt, dem Jahre 1629 eine so entscheidende Bedeutung nicht, so kann sich Descartes entweder 1617—19 oder 1621—22 direkte Kunde von dem Gesetz verschafft haben, er muss dann aber Snell persönlich begegnet sein[49]. Hier lässt uns die historische Untersuchung zunächst im Stich; wir wissen nicht, wann Snell sein Gesetz formulirt hat, doch scheint es, nach den Werken, die er herausgab, zu urtheilen, erst nach 1621 gewesen zu sein. Ist dies der Fall, so müssen wir Descartes als selbstständigen Entdecker des Brechungsgesetzes ansehen, da er nach dem Frühjahr 1622 bis zu seinen optischen Entdeckungen Holland nicht wieder betritt. Ist es dagegen nicht der Fall, so bleibt es immer sehr unwahrscheinlich, dass von allen Gelehrten damaliger Zeit nur der junge und in Holland nur gelegentlich sich aufhaltende Descartes es gewesen sein soll, der von dem Gesetz Kunde erhielt. Endlich aber ist es, wenn sonst die Deutung jenes Briefes an Beekmann zulässig ist, wie wir sie oben und in Anmerkung 29 versucht haben, nicht unmöglich, dass Descartes bereits während seines ersten Aufenthalts in Holland 1617—19 auf die optischen Eigenschaften der Kegelschnitte gestossen ist, und dann würden wir Descartes bedingungslos als selbstständigen Entdecker des betreffenden Gesetzes ansehen müssen, zumal er auf einem durchaus originellen Wege auch später die damit in Zusammenhang stehenden Untersuchungen durchführte.

Jedenfalls glauben wir berechtigt zu sein, die augenblicklich geltende Meinung von des Descartes Plagiat fallen lassen zu können und uns eine bedeutend günstigere Ansicht von seiner selbstständigen Entdeckung des Brechungsgesetzes bilden zu dürfen.

Anmerkungen und Litteraturnachweise.

NB) Die Citate aus den Briefen des Descartes sind nach der Ausgabe von 1692 und 1693, die aus der Dioptrik nach der Ausgabe von 1666 gemacht.

1) In Betreff des „brennenden Ehrgeizes in der Wissenschaft zu glänzen" beachte man, dass Descartes nur nach vielem Drängen von Seiten seiner Freunde sich entschliessen konnte, sein erstes Hauptwerk Discours sur la methode etc. herauszugeben. Auch war er bereits über 40 Jahre alt, als es endlich erschien, obwohl er lange Jahre vorher alle Materialien dazu gesammelt hatte, und schliesslich erschien es anonym. Nicht viel anders erging es ihm mit seiner zweiten Hauptschrift, den Principien der Philosophie, die er eigentlich gar nicht herausgeben wollte; theils aus Furcht, dadurch in Streitigkeiten verwickelt zu werden, theils aus Scheu vor einer abschliessenden Fassung seiner Gedanken. Er konnte nicht gut fertig werden mit einer Ausarbeitung seiner Ideeen. Auch kam er, je länger er lebte, um so mehr zu der Ueberzeugung, dass es besser wäre, überhaupt zu schweigen und sich im Stillen zu unterrichten, denn er erfuhr, nicht um seiner herausfordernden Eigenschaften, sondern um der neuen und bahnbrechenden Gedanken in seinen Schriften willen vielerlei Angriffe, so namentlich in Holland, wo seine Anhänger zuerst anfingen sich die academischen Lehrstühle zu erobern. Es war ihm nichts lieber als das zurückgezogenste Leben; unbemerkt zu bleiben, war sein höchster Wunsch, Qui bene latuit bene vixit seine Devise. Ging er doch allein desswegen nach Holland, um gänzlich für sich und seine Studien zu leben, durch deren Fortschritt er glaubte der Menschheit Dienste erweisen zu können. Auch vergleiche man, was er in den Briefen häufig ausspricht, wie z. B.: „Es liegt mir wenig daran, ob ich etwas eher schreibe als andere, wenn es nur wahr ist, was ich schreibe." Aus alledem geht hervor, dass der Ehrgeiz in der Wissenschaft zu glänzen, ein hervorstechender Zug in seinem Charakter nicht gewesen sein kann. Und so wenig wie dieser bei Descartes unangenehm hervortrat, ist es mit der zu Streitigkeiten führenden Reizbarkeit gewesen. Es ist bekannt genug, dass die Streitigkeiten, in welche er namentlich in Holland verwickelt wurde, von ihm nie gesucht wurden, dass sie sich vielmehr ganz von selbst aus der Neuheit seiner philosophischen Principien ergaben und dass er so lange wie möglich zögerte, persönlich in diesen Streit einzugreifen.

2) Mensura porro Cartesii non differt a communi opticorum mensura, sed demonstrationis ratio diversa est. Postquam quippe in Hollandiam venit, satis liquet et ipsum quoque nonnihil intellexisse de Snellii methodo ad mensurandas refractiones, utpote quam multi satis norant quamque Hortensius et publice et privatim exposuerat. Quod itaque (Cartesius) habet, refractionum momenta non exigenda esse ad angulos, sed ad lineas, istud Snellio acceptum ferre debuisset, cujus nomen more solito dissimulavit. Ipsam tamen Snellii demonstrationem non

vidisse lubenter admiserim utpote cum omissa faciliori demonstratione operosiorem sectatus sit. (Isaac Vossius, responsio ad obj. Joh. de Bruin p. 32.)

3) Theils um ihrer Wichtigkeit überhaupt, theils desshalb, weil darin eine Andeutung der Snell'schen Gedanken enthalten ist, mag die Angabe des Huyghens vollständig hier Platz finden.

Haec autem refractionum mensura, non sinuum sed angulorum ipsorum proportione, ab Alhazeno Arabe et Vitellione olim definita fuerat et experimentis quibusdam utcunque confirmata. Sed cum in majoribus radiorum inclinationibus a vero discrepare proportio illa reperiretur diligentius sibi recentiores investigandam existimarunt. In quibus Keplerus plurimis frustra tentatis ipsam quidem rei veritatem non est assecutus, conjecturis tamen suis variisque molitionibus non parum sequentium studia adjuvit. Post eum vero Wilebrordus Snellius cum jam majus operae pretium appareret quippe exorto telescopii invento, multo labore multisque experimentis eo pervenit ut veras quidem refractionum mensuras teneret, nec tamen quod invenerat, satis intelligeret. Nam posita exempli gratia aquae superficie AB, visibili vero sub aqua in D, quod oculo in F posito appareat quasi in recta FC, donec in G puncto occurreret rectae AD ad superficiem aquae perpendiculari, hisque itaque descriptis statuebat, imaginem rei visae apparere in G, rectaeque CD ad CG certam esse rationem, veluti in aqua sesquitertiam.

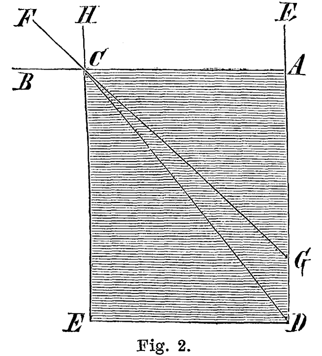


Fig. 2.

Quae rectarum inter se ratio vera est, ac convenit prorsus cum ea, quam paulo ante explicuimus, refractionis lege, quia CD est ad CG ex doctrina triangulorum ut sinus anguli DGC vel AGC seu HCF ad sinum anguli CDG sive DCE. Verum ad hanc sinuum proportionem nequaquam attendit Snellius et usque adeo ab apparente imagine rem omnem pendere existimavit, ut etiam in radio perpendiculari qualis HC effectum refractionis seu ut falso opinatur, decurtationem radii visorii agnosceret deceptus eo, quod etiam recta desuper in vas aquae plenum inspicienti fundus omni parte attoli videtur.

Haec autem omnia, quae de refractionis inquisitione volumine integro Snellius exposuerat, inedita mansere, quae et nos vidimus aliquando et Cartesium quoque vidisse accepimus, ut hinc fortasse mensuram illam, quae sinibus constitit, elicuerit, qua in explicanda iride et vitrorum figuris investigandis felicissime est usus. Chr. Zuitlichemii op. reliqua vol. II, dioptr. p. 2.

4) Eodem modo ratio sinuum complementi angulorum refractionis et incidentiae, cum nobis sit reciproca resistentiae mediorum, semper eadem erit: quod est theorema Cartesianum, licet de resistentia mediorum diversa nostris imo contraria senserit Cartesius. Quare non abs re cl. Spleissius, vir in his quoque studiis versatissimus, animadverso hoc consensu conclusionum, dubitat annon Cartesius, cum in Batavis esset, viderit theorema Snellianum; notat enim solenne ipsi fuisse praeterire nomina autorum et exemplum affert Mundanorum vorticum, ad quos Jordanus Brunus et Johannes Keplerus ita digitum intenderint, ut tantum istud vocabulum ipsis defuisse videatur. Accedit, quod Cartesius theorema hoc suum proprio marte demonstraturus in magnas incidit salebras. Acta erud. 1682, p. 187.

5) Spleiss war auch erst 1705, in demselben Jahre also wie Hortensius ge-

boren, beschäftigte sich aber frühzeitig mit optischen Studien. So gab er 1728 seine dissertatio de propagatione luminis heraus.

6) J. Millet, Descartes, sa vie, ses traveaux, ses découvertes avant 1637. Paris 1867, p. 142.

7) J. Priestley, the history and present state of discoveries relating to vision light and colours 1772.

8) Priestley, Geschichte der Optik übersetzt von Klügel 1776, p. 87.

9) J. C. Fischer, Geschichte der Physik, II, 41.

10) Wilde, Geschichte der Optik, I, 227—230.

11) von Kampen, Beknopte Geschidenis van de letteren 125*—126*:

Het is desniettemin mogelijk, dat Cartesius van zijne ziete, zonder iets van Snellius te weten, tot dezelfde ontdekking als hij is gekommen.

12) Delambre, histoire de l'astronomie moderne II, 224:

Tout cela est possible et ne manque pas de vraisemblance, mais il s'en faut, que le plagiat soit prouvé. Descartes peut avoir fait la découverte de son côté et sans rien devoir à Snellius, c'est le sentiment de Leibnitz, qui ne laissait pas de pencher du côté de ceux, qui estiment, qu'il avait pu profiter des lumières du savant hollandais.

13) Delambre, h. de l'astr. mod. II, 226:

Un anonyme, qui a chargé de notes l'édition des lettres, que je cite, et qui est de la bibliothèque de l'institut, conjecture, que la lettre a écrite à Golius en 1632. Ce Golius était professeur à Leyde, il n'est pas étonnant qu'il connut le théorème de Snellius. Descartes a pu lui dire, qu'il savait la manière de diviser la règle de l'instrument, ne serait-ce pas ce Golius, qui l'aurait appris à Descartes, qui en réconnaissance lui indique un moyen pour le vérifier. V. Cousin theilt Näheres über das von Delambre so wie auch von ihm benutzte Exemplar der Briefe des Descartes mit (oeuvres de Descartes Bd. VI avant propos pag. II), aber es ergiebt sich daraus nichts über den Urheber der Randbemerkungen und den Werth der letzteren.

14) Ep. pars II, ep. LXX: vitrum, cujus figuram D. Mydorgius ipse delineaverat.

Dass in beiden Briefen, diesem 70. im zweiten Theil und dem 81. in demselben Theile dasselbe Glas erwähnt wird, ergiebt sich daraus, dass beide Male Mydorge ganz speciell als Zeichner der zum Schleifen nothwendigen Modellfiguren erwähnt wird; auch wird beide Male der Umstand ganz besonders hervorgehoben, dass das Glas die Lichtstrahlen genau in einem vorher bestimmten Punkte sammelte.

15) Golius (J. Golius, geb. 1596, war Professor der orientalischen Sprachen zu Leyden und wurde 1629 des W. Snell Nachfolger) wird einmal in einem Briefe an Mersenne erwähnt und nicht gerade besonders ehrenvoll, so dass es hiernach zweifelhaft erscheinen kann, dass Descartes ihm eine so wichtige Mittheilung wie das Brechungsgesetz zu verdanken haben wird. In jenem Briefe (Ep. pars III ep. XXXIII) handelt es sich um die Geometrie, welche ebenfalls so wie die Dioptrik als Anhang des Discours erschien und Descartes äussert sich darüber folgendermassen: E professoribus autem scholasticis nemo est qui eam intelligat, neque Golius et multo minus Hortensius, qui sufficientibus ad eam praeceptis non est imbutus. Dass hier auch des Hortensius und zwar in ziemlich geringschätziger

Weise Erwähnung geschieht, ist für uns noch besonders interessant, weil es zeigt, was Descartes von ihm hielt.

16) Montucla, histoire des Mathematiques, II, 245. Huygens ne tire point absolument la consequence que Descartes leur dut sa découverte; il se contente de la soupçonner et nous ne croyons pas, qu'on puisse aller plus loin, nous laisserons donc cette question indécise, comme tant d'autres impossibles à résoudre, faute de faits suffisamment constatés, car il paraît qu'il était en possession de toutes les découvertes, qu'il étale dans sa géometrie et sa dioptrique, plusieurs années avant de les publier, ainsi il aurait pu avoir fait lui-même la découverte de la loi de la réfraction, avant d'avoir vu les manuscripts dont étaient en possession les héritiers d' Hortensius.

17) Chr. Fr. Pfleiderer, Thesium inauguralium pars mathematico-physica. 1792. Tubing.

Th. XXVII. Inique autem plagii illius Cartesium accusari, varia epistolarum illius loca, praesertim Pars III, ep. 89, 90, 91, 92, Pars II ep. 81, 74 collatis Dioptrices cap. X et cap. VIII, § X. evincere videntur.

Th. XXVIII. Neque Hugenius (opusc. posth. Tom. I, Dioptr. p. 3) certo sibi constare asserit (Montucla, l. c. p. 182; Gehler, l. c. § 417) tantum se accepisse commemorat, quae de refractionis inquisitione volumine integro Snellius exposuerat, Cartesium vidisse.

18) Millet, Descartes, sa vie, ses travaux etc. p. 142. En consultant les lettres, qu'il écrivit de Hollande en 1629 à Ferrier, ouvrier, qu'il avait formé lui-même dans l'art de la taille des verres, et à Mersenne, son ami, on voit que presque toutes, pour ne pas dire toutes ses découvertes en optique ont été faites à Paris et que Leibnitz et Huyghens ont fait une supposition aussi fausse que malvaillante en imaginant, qu'il avait emprunté à un manuscript de Snellius l'idée d'exprimer la loi de la réfraction par la comparaison des sinus des angles d'incidence et de réfraction.

19) Whewell, history of the inductive sciences vol. II p. 379.

The person, who did discover the law of the sines, was Willebrord Snellius about 1621*), but the law was first published by Descartes, who had seen Snells papers.

20) In der Biographie universelle ancienne et moderne, tome 42, p. 520 finden wir über Descartes Folgendes:

Son discours sur la dioptrique renferme aussi beaucoup d'applications géométriques ingénieuses; mais la dioptrique était impossible à faire, quand la réfrangibilité inégale des divers rayons de la lumière n'était pas connue. Cependant on y trouve encore une nouvelle preuve du génie de Descartes dans la découverte qu'il y donne de la véritable loi de la réfraction. Il est vrai, qu'après sa mort Huygens lui a contesté cette découverte, en alléguant, qu'elle existait dans les manuscripts de Snellius, que Descartes a pu voir en Hollande, mais cette réclamation tardive, faite à une epoque où Descartes ne pouvait plus se défendre ne suffit pas pour lui ôter une découverte, qui ne lui fut contestée tant qu'il vécut; car il n'existe pas dans les sciences d'autres titres de possession que la publicité. Wir können selbstverständlich den in der angeführten Stelle entwickelten Grundsätzen nur sehr bedingter Weise zustimmen. Es handelt sich in unserer Streit-

---

*) Diese Zeitangabe ist nur nach allgemeiner Schätzung angesetzt.

frage nicht blos um gewöhnliche Priorität, sondern hauptsächlich darum, ob Descartes in seiner Dioptrik absichtlich des Snell Namen verschwiegen hat, und ob er selbstständig das Brechungsgesetz fand. Die Priorität scheint unbedingt dem Snell zu gehören.

21) P. Reis, Lehrbuch der Physik. 1. Aufl. p. 271 § 298. (Es sind seither schon mehrere Auflagen erschienen, in denen in Bezug auf den hier in Frage kommenden Punkt nichts geändert ist.)

22) R. Gantzer, Leitfaden für den physikalischen Unterricht. 1873, p. 261.

23) Octennium est jam aut novennium, quod secandum curavi vitrum ope torni, quod optime successit; nam quamvis diameter ejus semissem tuae non excederet, tamen magna vi urebat ad octo digitorum distantiam, illudque charta eodem modo perforata explorando, cernebantur omnes radii haec foramina pervadentes proportionaliter accedere ad octo digitorum distantiam, ubi in unum exactissime coibant. Sed quid in illo secando praecaverim dicam. Primo triangula tria aequalia curavi secanda, quorum singula angulum unum rectum, alterum vero triginta graduum habebant, ita ut latus unum alterius duplum esset; erat autem illorum unum ex montano crystallo, alterum ex crystallino seu venetiano vitro, tertium ex vitro minus puro; deinde conficiendum curavi regulam aëneam cum duobus foraminibus, quibus triangula ista applicando refractiones mensurarem, quemadmodum in Dioptrica mea exposui; atque inde deprehendi montani crystalli refractionem esse multo majorem, quam crystallini, crystallini vero quam vitri minus puri. Sed singularum magnitudinem non recordor. Deinde D. Mydorgius, de quo forsan audivisti, et quem in delineanda figura aliqua mathematica omnium hominum exactissimum duco, descripsit hyperbolen, quae ad venetiani crystalli refractionem referebatur, super magna lamina cuprea polita, idque ope circini, cujus mucrones chalybaei erant instar cuspidis acus; deinde laminam hanc juxta hyperboles figuram exacte limavit, ut esset archetypus, ex quo mathematicorum instrumentorum faber quidam, nomine Ferrier, secuit modulum ex cupro sphaerice cavatum ejusdem cum vitro secando magnitudinis, et ne primum archetypum huic modulo saepius applicando corrumperet, chartas tantum ex illius figura secabat, quibus ejus vice utebatur, donec perfecto modulo, vitrum torno affixum, et cote interposita applicatum secaret, sed cum vellet postea concavum eodem modo secare, impossibile illi fuit, propterea quod cum torni motus minor esset in medio quam in extremis vitrum ibi semper atterebatur minus, ubi debuisset magis. Sed si tum venisset in mentem id quod ab eo tempore animadverti, vitia nempe concavi vitri non esse tanti momenti atque convexi, credo quod satis bona ope torni conficere potuisset. Ep. pars II, ep. LXXXI.

Aus diesem Briefe ergiebt sich auch die Stellung, welche Mydorge zu den Entdeckungen des Descartes einnahm und welche später (Anmerkung 25) noch einmal zur Sprache kommen wird. Mydorge gehörte dem Kreise von Männern an, welcher sich um Descartes als geistigem Mittelpunkt in Paris sammelte und war letzterem besonders werth wegen seiner mathematischen Kenntnisse. Das vertraute Verhältniss zwischen beiden dauerte auch noch fort, als Descartes sein Vaterland längst verlassen hatte. Mydorge war ein sehr geschickter Zeichner und desshalb trug ihm Descartes in dem vorliegenden Falle die Ausführung der Hyperbel-Zeichnung auf, was darauf schliessen lässt, dass er in damaliger Zeit für jenen manches ausführte, ohne dass er selbstständig an den Entdeckungen Theil nahm. Dass er sich auch auf eigene Hand mit optischen Problemen befasste, be-

weist eine andere Briefstelle, ep. pars II, ep. LXXXIV, wo Descartes von der Theorie des Sehens spricht. Non miror, quod D. Mydorgius in multis quae de visione scripsi, a me dissentiat, huic enim materiae multum ante hac studuit et cum diversa a me principia fuerit secutus, diversas etiam opiniones hauserit necesse est. Sed rationes meas quo magis perpendat, eo magis illi satis facturas spero; ipse autem nimis pollet ingenio, quam ut veritatem non amplectatur.

24) Poggendorff, Vorl. S. 316: „Er gab auch eine Maschine zum Schleifen solcher*) Linsen an, mit welcher der Künstler Ferrier 1628 in Paris wirklich eine convexe dieser Art zu Stande brachte, aber keine concave.“

Poggendorff erwähnt hier selbst das Jahr 1628 als Jahr des Gelingens, er musste also wohl auch berücksichtigen, dass die Maschine vorher erfunden war, und sie war ziemlich complicirt; ehe aber die Maschine construirt werden konnte, musste Descartes das Sinus-Gesetz erkannt haben, denn darauf beruht sie einzig und allein. Auch hatte Descartes den Glasschleifer Ferrier sich selbst herangebildet und überhaupt alles Wesentliche, was bei diesen Operationen zu thun war, selbst angegeben (vgl. die folgende Nr. 25). So lag es auch für Poggendorff nahe diesen Termin auf S. 316 mit dem zu vergleichen, was auf S. 311 entwickelt vorliegt. Er wäre vielleicht dann zu andern Schlüssen gekommen.

25) Descartes war im October 1629 nach Holland gegangen und hatte Ferrier in Paris zurückgelassen. Dieser bekam Aufträge um Gläser von derselben Wirksamkeit zu schleifen wie früher, und da Descartes ihm nicht mehr zur Seite stand, war er rathlos. In einem Briefe datirt vom 26. Oct. 1629 schüttet er sein Herz über eine Menge Dinge aus und fährt fort:

Omnes istae difficultates me non adeo turbant, ope enim tua spero me eas superaturum, et ostensurum posse me melius facere quam dicere. Superest mihi adhuc unum dubium manifestandum, quantum ad modum requisitum ad inveniendam lineam necessariam per triangulos et meum Quadrantem**), nimirum, an si duo trianguli vitri ejusdem Diaphani sint diversi, et consequenter diversos faciant effectus super linea divisa, quae retinet radium in dicto Quadrante, et formentur duo moduli, conformes diversis lineis refractionis, nimirum, inquam, utrum effectus duorum vitrorum possit esse similis veluti ad urendum in puncto quodam determinato secundum tuas regulas. Docuisti me triangula posse construi tali angulo, quo placuerit; non possum ejus experimentum facere; triangula enim, quae ad praesens habeo, omnia sunt similia; rogatum te velim, ut hunc mihi articulum resolvas. Novi enim, te mihi dixisse, omnia parva vitra concava posse inservire cuilibet grandi vitro. Amisi frustulum chartae, in quo mihi delineaveras modum describendi lineam requisitam cum ordinario circino, quaerendo plura puncta per quae ea transire debet. D. Mydorgius proponit modum quo utitur delineandae lineae necessariae ad urendum in aliquo puncto quod determinabit cuilibet vitro dato, diametro ejus nihil imminuto, neque densitate ejus in medio deintegrata, aitque se eum solum invenisse; Novi secretum illud tibi non incognitum esse, praedictumque D. Mydorgium nihil ejus rei scire nisi quod a te didicerit. Si existimares posse me eum capere, gratissimum mihi faceres si mihi

*) Es ist kurz vorher von hyperbolischen Gläsern die Rede.

**) Es ist hier das von Descartes construirte Brechungsexponenten-Messinstrument gemeint, bei welchem ein Glasprisma und ein Quadrat die Hauptheile ausmachten.

illum, quod commodo tuo fieri possit, communicares. Petit autem ut sibi praestetur artifex qui sciat exacte secare vitra. Arbitror hanc ultimam conditionem aeque difficilem ac omnia reliqua, nisi faciat ipse artifices de industria, et quibus imperet, nam ad praesens ad suum modum inveniri non credo. Adeo me vilipendit, ut non credat, satis mihi ingenii esse ad quippiam capiendum aut conandum; quod ipse me praesente asserere ausus est. Fateor tenuitatem meam, quae tamen excusari debet, cum nemo me quicquam docuerit praeter te cui omnia mea debeo. (Ep. XCI, Pars III.)

Auf den Brief Ferriers antwortet Descartes sehr ausführlich, und geht namentlich auf die Methode, den Brechungsexponenten zwischen Licht und Glas zu finden, genau ein. Die darauf bezügliche Stelle lautet:

Sit linea tui Quadrantis AE, triangulum vitreum applicatum super FGH, cujuscunque magnitudinis esse possit, dum linea ejus GH decidat ad angulos rectos super AE, quo solis radius transiens per pinnulam J, recta progrediatur versus D, nulla facta refractione dum in vitrum ingreditur, sed saltem tum cum egre-

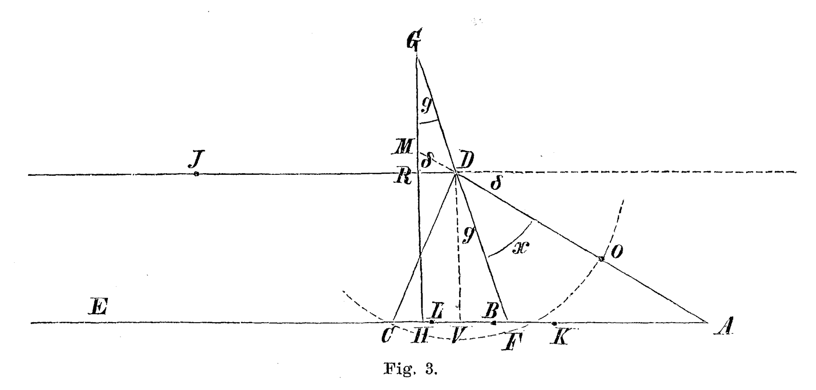


Fig. 3.

ditur, nimirum in puncto D. Nota igitur lineam GDF quae repraesentat inclinationem vitri, in qua sit refractio et punctum D, in quo illa intersecta est per radium solis et punctum A, in quo radius Solis JDA intersecat lineam tui Quadrantis. Habes itaque angulum ADF. Postmodum a puncto D duces aliam lineam DC, adeo ut angulus FDC aequalis sit angulo ADF, et nota in quo puncto haec linea DC intersecabit tuum Quadrantem nimirum in puncto C, quo invento sume lineam CK aequalem CD et lineam AL aequalem AD. Quaere postea medium inter puncta K et L, nimirum B. Et si habeas tria puncta ABC, quae tibi dant proportionem quae est inter lineas AB et BC, nihil tibi de reliquo opus est. Proportio autem ista semper veniet aequalis qualecunque triangulum vitreum sumas, dum omnia ejusdem sint diaphani.

Der Brief ist der 92. des dritten Theils der Briefe und vom 13. Nov. 1629 aus Amsterdam datirt. Die Construktion des Brechungsverhältnisses ist, wie sich aus den nachfolgenden Anmerkungen Nr. 41 ergiebt, hier eine etwas andere.

Wird die spätere, zu Anmerkung 41 gehörige Figur benutzt und um D mit DC der Kreis geschlagen, welcher DA in O trifft, so ist nach dem im 10. Kapitel der Dioptrik angegebenen Verfahren $CA : AO$ das Brechungsverhältniss. Dies lässt sich auf das hier erwähnte folgendermassen zurückführen.

$$CA : AO = CA : DA - DO = CA : DA - CD = CB + BA : DA - CD$$
$$= AL - \frac{LK}{2} + CK - \frac{LK}{2} : AL - \frac{LK}{2} - \left(CK - \frac{LK}{2}\right)$$
$$= AL - \frac{LK}{2} : CK - \frac{LK}{2} = AB : BC.$$

Ist also, wie unter N. 41 nachgewiesen werden wird, $CA : AO = \sin(g + \delta)$: $\sin \delta$, so ist auch $AB : BC = \sin(g + \delta) : \sin \delta$ und stellt also das Brechungsverhältniss zwischen Luft und Glas dar.

Wie Descartes auf die hier angegebene Construktion gekommen ist, giebt er so wenig an, als bei der späteren. Es ist aber ein Beweis für das grosse Interesse und den Werth, den er gerade auf diesen Brechungsexponenten legt, dass wir zwei so verschiedene Constructionsweisen dafür von ihm mitgetheilt erhalten. Die auffallende Notiz Ferriers, dass Mydorge sich für den Erfinder des Instrumentes ihm gegenüber ausgegeben habe, scheint Descartes keines Wortes der Erwiederung für werth zu halten, wenigstens findet sich in dem ganzen langen Antwortschreiben nichts darüber. Es ist hier auch kaum die Gefahr zu befürchten, dass man dem Descartes den Vorwurf machen wird, er habe diese zum Schleifen der hyperbolischen Gläser nothwendigen theoretischen Kenntnisse dem Mydorge zu verdanken. Ferrier selbst führt deutlich genug an, wie Mydorge es selbst zugegeben habe, alles von Descartes erst mitgetheilt bekommen zu haben.

26) Ep. pars III, ep. LXI:

Vir ille qui me insimulat hausisse e Keplero ellipses et parabolas meae Dioptrices aut malitiam suam aut ignorantiam aperit; Quantum enim ad Ellipsin, non memini Keplerum de ea agere, aut si mentionem ejus faciat, id innuit, non esse illam anaclasticam, quam quaerit. Et quantum ad Hyperbolen, memini eum demonstrare conari, neque eam esse, quamvis dicat ab illa non multum differre. Cogitandum itaque tibi relinquo, utrum rei alicujus veritatem didicerim a tali homine, qui eam falsam esse probare conatur. Quod tamen non obstat, quominus fatear Keplerum fuisse primùm doctorem meum in Optica, ipsumque omnium in ea hactenus versatissimum fuisse.

27) Ep. pars I, ep. CXIV: Gratias tibi habeo, quod te gaudere testificeris, quod in cogitationum mearum promulgatione ab aliis praeverti me non fuerim passus: sed certe id nunquam veritus sum; nam praeterquam quod mea parum refert utrum prior aliquid scribam, an posterior, modo tantum vera sint quae scribo, opiniones meae omnes ita simul cohaerent, ut nemo possit earum ullam sibi vindicare, nisi omnes noverit.

28) Ep. pars III, ep. XXXIII: Quantum ad illum quem me culpare dicis, quod Galilaeum non nominaverim, apparet eum quaerere quod reprehendat, nec tamen ejus invenire causam. Neque enim ipse Galilaeus sibi perspicillorum inventionem attribuit, mihi autem non nisi de eorum inventore dicendum fuit. Neque enim nominandi mihi fuerunt, qui ante me de Optica scripserunt, neque enim scribere historiam animus erat, satisque habui in genere asseruisse etiamnum fuisse qui plurima invenerint, ne possem argui me aliorum inventionem mihi attribuere voluisse, in quo plus mihimet ipsi injuriae feci, quam illis quorum nomina omisi. Cogitari quippe potest eos multo plura fecisse, quam fortasse eos fecisse deprehenderetur, si dixissem quinam illi essent.

29) Ep. pars II, ep. XII: Dixi quandam ejus (der Hyperbel) proprietatem ad

radios inflectendos, cujus mihi demonstratio memoria exciderat, atque ut fit interdum in rebus facillimis ex tempore non occurrebat; sed ejus conversam in Ellipsi tibi demonstravi, explicuique nonnulla theoremata, ex quibus tam facile poterat deduci; ut neminem qui tantillum attenderet, posset effugere. Quamobrem te hortatus sum, ut in illa quaerenda ingenium exerceres, quod sane non fecissem, cum te conicis plane nihil scire fatereris, nisi facillimam esse judicassem. Tu vero quaesivisti, invenisti, ostendisti mihi, laetatus sum, dixique me illa usurum demonstratione, si unquam de ista re essem scripturus.

Ich sprach oben die Ansicht aus, dass der hier gegebene Bericht der eines mündlich zwischen Beekmann und Descartes verhandelten Vorgangs sei. Das mehrfach wiederholte dixi weist auf ein Gespräch hin und kann sich wohl nicht recht auf eine in Briefen niedergelegte Aussage beziehen, das ex tempore non occurrebat scheint darauf hinzudeuten, dass zur Stunde des Gesprächs der von Beekmann erwartete Beweis von Descartes nicht gegeben werden konnte, weil er ihn augenblicklich vergessen hatte. Bei Annahme eines blos brieflichen Verkehrs zwischen beiden hat diese Wendung überhaupt keinen Sinn, da ja Descartes mit einer eventuellen Antwort auf die Frage des Beekmann nach dem Beweise so lange warten konnte, bis er ihm wieder eingefallen war. Das ostendisti weist auf ein thatsächliches Vorzeigen des von Beekmann schriftlich niedergelegten Beweises hin und hat ebenfalls bei blos brieflich gedachter Mittheilung keine rechte Stelle.

Es scheint mir hiernach nicht ganz ohne Grund anzunehmen, dass wir es in dieser Darstellung mit einem Vorgang aus der Zeit des ersten Aufenthaltes des Descartes in Holland zu thun haben, wo er in Breda mit Beekmann verkehrte. Beekmann war eigentlich in Dordrecht angestellt, verweilte aber dazumal am Hoflager des Herzogs Moritz. Als Descartes zum zweiten Male in Holland war, Dezember 1621 bis Febr. 1622, hat er schwerlich mit Beekmann so lange an demselben Ort, wenn überhaupt, zusammen gelebt, dass er obigen Vorgang mit erlebt haben wird, auch war er 1621 und 1622 ganz in philosophische Spekulationen versunken und hatte die Mathematik gänzlich bei Seite gelegt. Darf man jenen Bericht so deuten, wie ich es so eben gethan habe, so bedarf es keines weiteren Beweises, dass Descartes schon um 1619, also zu einer Zeit, wo Snell vermuthlich noch nicht an seine optischen Studien dachte, wo er aber sicher noch nichts für Descartes Zugängliches aufgeschrieben hatte, das Brechungsgesetz kannte.

30) Ep. pars II. ep. XCII: Tibi gratiam habeo quod causam meam sustinere labores; verum non metuo ne quisquam aliquo judicio praeditus suspicetur me mutuatum fuisse Dioptricam meam a Rogero Bacone, multoque minus a Fioravanti, qui merus fuit circulator.

Dass Descartes sich sehr früh mit optischen Dingen beschäftigt hat, geht aus einem Briefe hervor, dessen Datum durch Borel, also einen unserer zuverlässigsten Gewährsmänner aus dem siebzehnten Jahrhundert auf den 19. Januar 1642 fixirt worden ist. In diesem Briefe, dem 105. des dritten Theils, der in der Ausgabe von Cousin merkwürdiger Weise als der 114. des dritten Theils aufgeführt wird, schreibt Descartes: Inventio puncti reflexionis, datis speculo, oculo et objecto, est problema solidum quod Vitellio resolvit per hyperbolen quantum ad specula convexa, neque plus difficultatis habetur quoad concava, adeo ut in hoc operae pretium non sit inquirere; et plus Vicennio excessit ex quo id inveni, sed memoria elapsum est.

Hiermit haben wir den Beleg, dass, wenn wir der Zeitbestimmung des Des-

cartes, dass seit seiner Beschäftigung mit den gekrümmten Spiegeln mehr als zwanzig Jahre, vom 19. Jan. 1642 ab gerechnet, vergangen sind, nachgehen, er schon mindestens im Jahre 1621 diese optischen, wie er selbst sagt, an Vitellio und daher auch ohne Zweifel an Kepler sich anschliessenden Studien gemacht haben wird. Wird die Aeusserung, dass es „mehr als zwanzig Jahre her sind", in ihrem gewöhnlichen Sinne genommen, so werden wir wohl die Möglichkeit erwägen dürfen, dass er bereits 1619, als er noch in Breda mit Beekmann zusammen arbeitete, das Studium der Optik betrieben haben wird. Damit sind wir aber, sei es, dass wir 1621 oder 1619 annehmen, in die Zeit hinaufgerückt, welche vor dem zweiten Besuch Hollands vom Dezember 1621 bis Febr. 1622 liegt. Wenn es nun wohl auch angenommen werden kann, dass Descartes während dieses Aufenthalts in Leyden Snell persönlich gesprochen hat, so werden wir nach dem eben Erwähnten doch gezwungen, die erfolgreiche Beschäftigung Descartes' mit optischen Problemen vor diese Zeit zu setzen, womit ein Grund mehr gewonnen ist, seine Studien in Betreff der Lichtbrechung sich als selbstständige vorzustellen.

31) Ep. pars II, ep. CIII: Ceterum, quamvis dioptricam meam absolvere non festinem nullus tamen timeo ne quis mittat falcem in messem alienam, quicquid enim alii scribant, certus sum neminem fore, qui idem scribat, quod ego, nisi illud ex litteris, quas dedi ad D. F. desumat.

32) Ep. pars II, ep. LXXIII: Quod ad modum mensurandarum refractionum luminis instituo comparationem inter sinus angulorum incidentiae et angulorum refractorum, sed nollem hoc adhuc propalari, quia Dioptrices meae prima pars nihil aliud continebit. Non potest facile determinari qualem figuram linea visa in fundo aquae sit habitura, neque enim certus est aliquis locus imaginis in reflexis aut refractis, quemadmodum sibi vulgo persuaserunt optici.

Was den letzten Theil dieser Briefstelle anlangt, so mag erwähnt werden, dass W. Snell in seinem hinterlassenen Werke auch die Linie, unter welcher der gradlinige Gefässboden eines mit Wasser angefüllten Gefässes erscheint, als eine Conchoide bestimmt hat. Hätte Descartes das Werk Snell's gesehen, er würde wohl diese merkwürdige Entdeckung geprüft haben und nicht nur von der gewöhnlichen Anschauung der Physiker gesprochen haben. Es scheint ihm nicht gelungen zu sein, über den scheinbaren Ort der Punkte einer unter Wasser befindlichen graden Linie etwas Sicheres gefunden zu haben.

33) Ep. pars II, ep. CIII: Experiar in Dioptrica an possim cogitationes meas exprimere et veritatem, quam mihi ipsi persuasum habeo, aliis persuadere, quod quidem nequaquam puto.

34) Ep. pars II, ep. LXIX: Caeterum quia scribis, cupere te nonnulla ex Dioptrica mea videre, primam illius ad te partem mitto, in qua omissa reliqua Philosophia, conatus sum explicare refractionum materiam; videbis haud magni momenti opus, et forsan perlectum multo minoris facies, quam nunc. Mihi tamen volupe erit ut illud videas, ut tuam de illo sententiam mihi, si placet, aperias, manuscriptumque ad me remittas, exemplar enim illius nullum habeo, et praeterea nollem, ut ab alio ullo praeter te videretur.

35) Ep. pars III, ep. IX: Miror praeterea quod addat „praetensam meam demonstrationem posse accommodari per vias sibi cognitas, sed quarum nulla vidit vestigia in meis scriptis, imo", ut ait, „quas rejicio tamquam ad rem non facientes." Haec enim conferendo cum quinta et sexta ex ejus thesibus opticis, pag. 9, cumque integra ejus velitatione, nihil aliud mihi possum persuadere, quam illum

de reflexione et refractione eadem quae ego et quae nullus ante me demonstravit, discipulos suos docuisse, mutatis tantum et distortis verbis, ut aliud dicere videretur atque quaedam alia quae culparet mihi affinxisse ut ea deinde corrigeret.

36) Kepler, Paralipomena in Vitellionem, cap. IV, 2 (Ausgabe von Frisch, Bd. II, 181).

Lux, inquiunt (Alhazen und Vitellio), quaerit compensationem damni ex obliquo inflictu accepti. Quanto enim debilitata fuit a densioris occursu, tanto se recolligit accedendo ad perpendiculum ut rectiore ictu feriat fundum medii densioris. Ictuum enim, qui sunt recti, fortissimos esse. Et addunt subtile nescio quid: motum lucis oblique incidentis componi ex motu perpendiculari et motu parallelo ad densi superficiem, eumque motum sic compositum non aboleri ab occursu pellucidi densioris, sed tantum impediri. Totum ergo motum, ut est compositus sese munire iterum, residere scilicet in motu per densam superficiem jam alterato vestigia pristinae compositionis ut non plane fiat perpendicularis nec plane parallelus. Deflectere autem ad perpendicularem potius quam ad parallelum, quia fortior sit motus perpendicularis.

37) Ep. pars II, ep. XXXIV: Pauca enim habent Geometrae vestri, quae in scriptis meis reprehendant, quandoquidem demonstrationem meam de proprietate Ellipseos et Hyperbolae, quam in Dioptrica mea posui, vellicare conantur; cum enim haec proprietas ab alio ante me nemine unquam reperta fuerit, sitque maximi prae reliquis quae circa has figuras cognoscuntur, momenti, mihi certe videntur illiberaliter loqui dum dicunt esse hoc aliquid quod tyronem redoleat; neque enim inficiari possunt quin iste tyro illos in hoc ipso docuerit. Vergl. auch Chasles Geschichte der Geometrie. Deutsch von Sohnke, Seite 158, Anmerkung.

38) Descartes, Dioptrice cap. VIII, 2.

39) Die entscheidenden Entwickelungen finden sich im achten Kapitel der Dioptrik. § 2 und 12. (Ebenso auch in Ep. pars II, ep. XXXIV.)

Für die Ellipse setze ich sie in etwas zusammengezogener Gestalt her.

Zieht man von einem Punkte B der Ellipse die Gerade BA parallel der grossen Axe DK nach aussen, verbindet B mit dem entfernteren Brennpunkte J, wie auch mit dem näheren H und macht $BA = BJ$; construirt man ferner die Normale der Ellipse im Punkte B und fällt die Lothe AL und JG auf dieselbe, so haben AL und JG dasselbe Verhältniss zu einander wie DK und HJ.

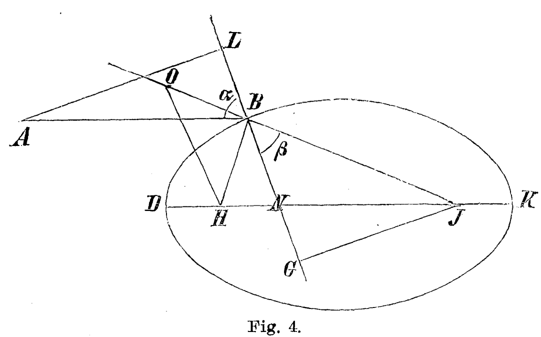


Fig. 4.

Beweis: 1) $\triangle\ ALB \sim \triangle\ NJG$, wobei N der Durchschnittspunkt der Normale mit der grossen Axe ist.

2) $AL : JG = AB : NJ = BJ : NJ = OJ : HJ$, wobei O der Durchschnittspunkt der durch H zur Normale gezogenen Parallele mit der Verlängerung von BJ über B hinaus ist.

3) $OJ : HJ = DK : HJ$.

4) $AL : JG = DK : HJ = \sin\alpha : \sin\beta$.

Wenn daher AB ein Lichtstrahl ist und die Ellipse der Schnitt der Ebene, in welcher der Lichtstrahl verläuft, mit der Oberfläche der Glaslinse, so wird,

wenn die Geschwindigkeiten des Lichtes sich verhalten wie $DK : HJ$, der in B die Oberfläche treffende Strahl nach der Brechung durch J gehen. Ist B ein willkürlich gewählter Punkt, so wird stets für dieselbe Ellipse das Verhältniss des Sinus von α und β gleich dem der grossen Axe zur doppelten Excentricität sein und sämmtliche auf die Ellipse fallende und der Hauptaxe parallele Strahlen werden durch J gehen, dort also in einem einzigen Punkt gesammelt erscheinen.

Für die Hyperbel gilt das Entsprechende. Da nun das Verhältniss zwischen grosser Axe und doppelten Exentricität alles Nöthige enthält, um die Kegelschnitte auf organische Weise zu zeichnen, so reichen diese Elemente aus, um die elliptischen oder hyperbolischen Oberflächen von Brenngläsern zu finden.

40) Kepler, Dioptrice. IV.

41) Das Messinstrument, durch welches Descartes den Brechungsexponenten zwischen Glas und Luft bestimmt, ist, ausser in dem 92. Briefe des dritten Theils der Briefe, ausführlich im zehnten Kapitel der Dioptrik dargestellt.

Selecto vitro aut crystallo, quo uti placet, primo necessaria est inquisitio proportionis quae juxta superius tradita, refractionum illius mensura existat; atque illa obvia et exposita erit opera hujus instrumenti. EFJ est asserculus aut regula, maxime plane et recta, ex qualibet materia, dummodo non nimis polita, vel pellucida sit, ut lumen in illum effusum facillime ab umbra dignoscatur. EA et FL sunt duae dioptrae id est laminae parvae cujuscunque materiae dummodo non sit transparens, ad perpendiculum arcetae in EFJ, et foramine exiguo singulae pertusae ut A et L. Suntque haec duo foramina tam directe sibi invicem opposita ut radius AL illa permeans parallelus feratur lineae EF. Solis duo foramina permeans per medium vitrum, irrefractus penetrat ad B, ubi non nisi declinans ad aliquod punctum asserculi EF egredi potest, ut exempli gratia ad J.

Ist nun BHP das Bild der Prisma, so ist der Gebrauch des Instrumentes folgender:

His tribus punctis B, P, J accurate ita cognitis et consequenter etiam triangulo quod describunt, hoc triangulum in chartam aut aliud planum circino est transferendum. Deinde ex centro B, per punctum P describendus circulus NPT et sumpto arcu NP, aequali arcui PT, ducenda recta PN secans JP productam in puncto H. Hinc denuo ex puncto B, per H describendus circulus HD, secans BJ in puncto O. Et habebitur proportio inter lineas HJ et OJ pro mensura communi refractionum quae produci possunt a differentia quae est inter aërem et vitrum quod examinatur.

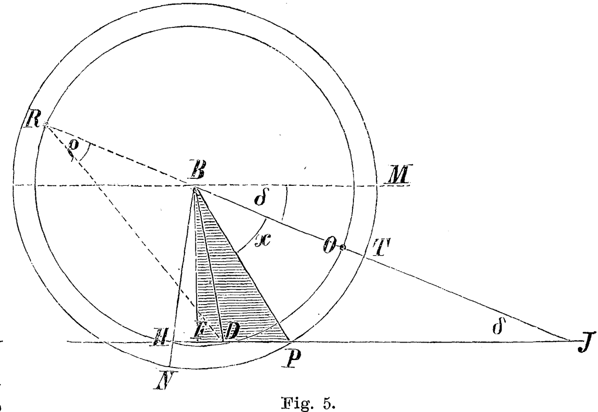


Fig. 5.

Da Descartes für die Richtigkeit seiner Construktion keinen Beweis giebt, folgt hier ein ganz elementarer:

Vor: 1) $BF \perp HJ$,

2) $\angle FBP = g$, der brechende Winkel.

3) $\angle MBJ = \delta$.

4) $\angle FBP = PBN$.

Beweis: 1) $HJ : OJ = RJ : DJ = \sin(\varrho + \delta) : \sin \varrho$.

$$2)\ \varrho = \frac{JBD}{2} = \frac{DBP + PBJ}{2}$$

$$= \frac{DBP + PBH}{2}$$

$$= FBP = g$$

3) $HJ : OJ = \sin(g + \delta) : \sin g$.

Das letzte Verhältniss ist aber dasjenige, welches beim Prisma den Brechungsexponenten angiebt. Descartes hat also bereits sehr früh durch den brechenden Winkel und die Ablenkung, diese beiden Hauptelemente am Prisma, den Brechungsexponenten bestimmen können. Ueber den Zusammenhang dieser Figur mit der im 92. Brief des dritten Theils gegebenen siehe Anmerkung 25.

42) In dem 33. Brief des dritten Buches, welcher an Mersenne gerichtet wurde und schon oben einmal angeführt worden ist, findet sich folgende Stelle: Scias me Refractiones geometrice demonstrasse et a priori in mea Dioptrica, mirorque te de eo etiamnum dubitare. Sed versaris inter homines, qui quantum possunt in mei praejudicium declamant. Non ignoro eos qui iniquo erga me sunt animo te in eum finem invisere et ut novi quippiam de me percunctentur. Adeoque mirandum mihi potius est, quod non obstantibus tantis eorum machinationibus, non debilitato amore me prosequaris et in partibus meis perseveres; quapropter tibi summopere me devinctum profiteor.

Aus dem Anfangs erwähnten geht mindestens hervor, dass Descartes sich seines methodischen Beweises des Refraktionsgesetzes bewusst war. Er hatte es aus allgemeinen Principien heraus, wenn auch für unsere Zeit nicht streng genug, zu erweisen gesucht und glaubte, allen Anforderungen genug gethan zu haben, und konnte den Entgegnungen, namentlich Fermats und dessen Freunden in Paris eine Bedeutung nicht beimessen.

43) Poggendorff, Vorles. p. 312.

44) Desc. Dioptrice, cap. II, 7,

45) Leibnitz hat, so viel mir bekannt, an zwei Stellen sich über des Descartes Verhältniss zu Snell ausgesprochen. Einmal, wie oben bereits erwähnt (Anm. 4) im Jahrgang 1682 der acta eruditorum und dann in einem Aufsatz Remarques sur l'abrégé de la vie de Mons. des Cartes, abgedruckt in Gerhardt, Leibnitzens philosophische Schriften Bd. IV p. 318—319.

Diese letztere sehr ausgedehnte Darlegung, in welcher alle die alten Anschuldigungen gegen Descartes sich wiederholen, lautet folgendermassen:

M. de Fermat, n'estant nullement satisfait de l'explication de M. des Cartes méditait toujours quelque chose pour la dioptrique et anima M. Petit de faire des expériences la-dessus. Et comme M. de la Chambre songeait de publier un traité de la lumière, M. de Fermat luy manda, qu'il avait une pensée par laquelle il espérait de trouver la véritable raison de la loy des réfractions, mais que le calcul le rebutait. Enfin il s'y mit et découvrit, qu'en supposant que les rayons vont d'un point donné à un autre point donné par la voye la plus aisé, il vient justement la loy des sinus, que M. des Cartes avait voulu prouver par une autre voye. Et ce qu'il y a de plus curieux c'est que M. de Fermat suppose, que le verre resiste aux rayons plus que l'air, au lieu que M. des Cartes suppose tout

le contraire et se sert de la comparaison d'un tapi, qui n'est point juste dans la question dont il s'agit. Et cependant leurs conclusions sont les mêmes. Le premier qui a découvert la véritable loy des réfractions était Willebrord Snellius, Hollandais, un des plus grands Géomètres de son temps. Il l'avait expliquée dans un traité exprès, dont M. Isaac Vossius nous a conservé des extraits. Snellius l'enseignait à ses disciples, et entre autres à Hortensius, depuis professeur de Mathematiques, qui l'enseignait aussi; ainsi toutes les apparences sont que M. des Cartes, qui était si curieux de ces choses, qui avait été si longtemps en Hollande et qui pratiquait les meilleurs Mathematiciens l'a scue. Cela se confirme aussi en ce qu'il n'en a pas scû la raison, et que voulant l'expliquer à sa mode par la composition du mouvement perpendiculaire avec la parallèle, qu'il avait apprise par Kepler, il s'était embarasser étrangement. Ainsi on voit, qu'il a été obligé de donner la gêne à ses principes, pour y ajuster ce qu'il avait appris d'ailleurs. Je n'ai pas vue le manuscript de Snellius, mais je suis persuadé, que la voye, par laquelle il a trouvé cet important théorème a été la même, que M. Fermat a employée depuis et qui l'a mené à la même loy, sans s'y attendre et sans s'y rien sçavoir de Snellius. Et ce qui me le fait croire, c'est que les anciens se sont servis de la même méthode pour démontrer l'égalité des angles d'incidence et de réflexion, que Mess. Snellius et Fermat ont poussé à la réfraction. La postérité a depuis rendu justice à ces Messieurs et ceux qui ont approfondi ces choses, demeurent d'accord que M. des Cartes n'a pas été inventeur ny de la loy de réfraction, ny de sa raison. Cependant la raison des anciens tient quelque chose de la considération des Finales, ce qui a fait, qu'on a cherché encore une raison ab efficienti. M. Hobbes s'estait servi de la considération d'un rayon solide. M. Barrow l'avait poussé plus avant. Mais il semble que l'explication de M. Hugens par les ondes est la plus profonde et la plus apparente que nous ayons jusqu'icy.

46) Kepler, Paralipomena in Vitellionem, caput I prop. XIV. Lux per densorum superficies impeditius transit, quatenus densae. Cum enim luci competat motus (per prop. 1), proprietates quoque motus recti ei competent. Quare et impedimentum a densiori medio. Non vero quatenus solidum per 10*), ergo quatenus superficie densa terminatur. Clarius: lucis motus fit naturaliter cum extensione per 6, quia semper ab uno fonte in omnes regiones. Sicut ergo superficies ob infinita puncta resistit motui, qui est in lineis, sic superficies densa resistit motui extenuanti cum densitas et extenuatio sint sub eodem genere.

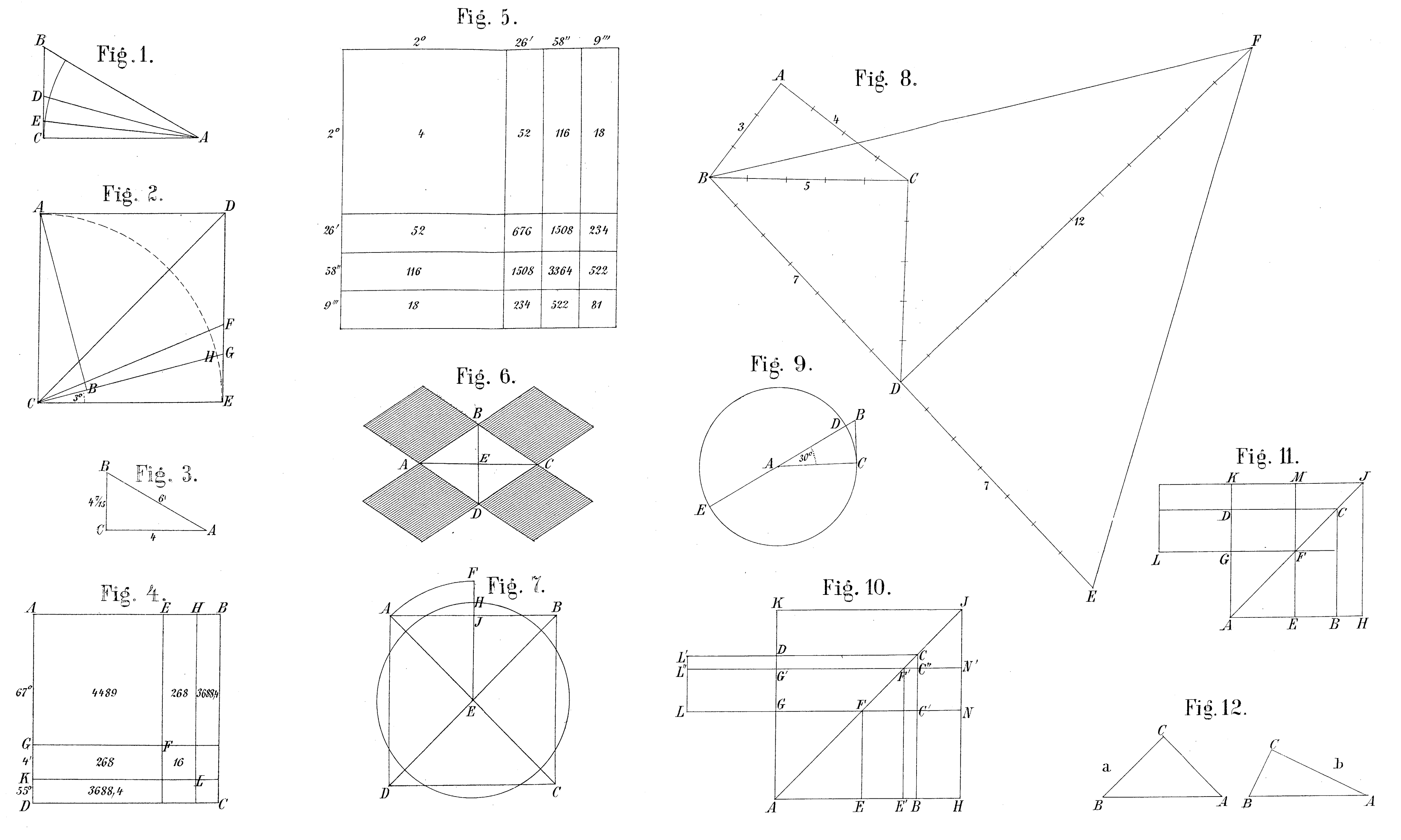
47) Epistolar. pars II, ep. XL. Quod autem ille ait, densitatem medii efficere refractionem, potest manifeste falsi convinci, quia refractio radii luminis aquam pervadentis fit versus perpendicularem, pilae vero fit a perpendiculari; ita ut una eademque densitas habitura esset hoc pacto duos effectus plane contrarios.

48) Dioptrice, cap. II. 6.

---

*) Prop. X. Lux non impeditur soliditate corporum quatenus solida; quo minus per ea transire possit. Quicquid enim impeditur, ab eo impeditur aut expellitur, quod est ex eodem genere ut corpus a corpore. Solida habent tres dimensiones, quatenus solida. Luci per 6 et 7 tantum duae competunt dimensiones. Ergo lux vel ejus radii nihil patiuntur a solidis quatenus solida, nec se mutuo afficiunt quoad soliditatem.

49) Dass Descartes irgend wann einmal Snell persönlich begegnet sei, lässt sich nicht feststellen, auch die Bekanntschaft mit Snell's Schriften ist nicht nachzuweisen. Nur über die mit einer Schrift des älteren Snell, des Vaters von Willebrord Snell giebt eine Briefstelle Auskunft. Im 65. Briefe des dritten Buches spricht nämlich Descartes von den Vorzügen seiner eigenen Geometrie und erwähnt summarisch, was bisher in diesem Fache geleistet worden ist. Hierbei wird auch des Apollonius Batavus gedacht; dieser ist ein Werk von Rudolf Snell dem Vater und ist 1597 herausgekommen.



Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Vierunddreissigster Jahrgang.

Supplement.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1890.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

INHALT.

NEUE STUDIEN ZU ARCHIMEDES.

VON

DR. J. L. HEIBERG

IN KOPENHAGEN.

In der „Deutschen Litteraturzeitung" 1884 S. 210—213 hat Val. Rose kurz über einen für die Textkritik des Archimedes hochwichtigen Fund berichtet, den er in der Bibliotheca Vaticana gemacht hat. Er hat nämlich in cod. Ottobon. lat. 1850 eine lateinische Uebersetzung von Archimedes und Eutocius aus dem XIII. Jahrhundert entdeckt, die er als Quelle der Ausgaben von Gauricus und Tartaglia nachweist. Da der gelehrte Entdecker auf meine Anfrage erklärt hat, dass er auf die Verwerthung seines Fundes im einzelnen verzichte, habe ich theils selbst die Handschrift untersucht und stellenweise abgeschrieben theils durch die Freundlichkeit des Hrn. Dr. A. Mau Abschrift, beziehungsweise Collationen, von grösseren Abschnitten erhalten, so dass ich jetzt über die Bedeutung der Uebersetzung als Textesquelle ein Urtheil abgeben kann. Diese Frage zu erläutern und das Material in genügendem Umfang vorzulegen ist der Zweck dieser Abhandlung.

Zuerst die Beschreibung der merkwürdigen Handschrift (vgl. Rose).

Der kleine Octavband, früher wie ein grosser Theil der Ottoboniana dem Grafen Giovanni Angelo Altaemps gehörig (auf dem Titelblatt: ex codd. Ioannis Angeli ducis ab Altaemps), jetzt in der Vaticana als Ottobon. 1850 bewahrt, besteht aus drei verschiedenen Theilen, die erst von einer ganz jungen Hand fortlaufend paginirt sind: 1) fol. 1—7 die auf Pergament gedruckte Vorrede des Lascaris zu seiner Ausgabe der griechischen Anthologie (Florenz 1494), 2) fol. 8—64 mit einem nicht gezählten Titelblatt, worauf „1508 Venetiis Andreae Coneri", derjenige Theil, der uns hier beschäftigen soll, von gleichzeitiger Hand fol. 1—57 paginirt, 3) fol. 65—75 perspectiva Iohannis de picca, von alter Hand fol. 70—80 paginirt, also ursprünglich einer anderen Handschrift angehörig, wie auch die Hand eine jüngere ist (es ist das bekannte Werk des Joh. Peckham; am Schluss steht: non plus de hoc opere inventum est apud me; est vero finitum secundum huius libri scriptorem). Theil II enthält: *fol. 1—2* eine anonyme Abhandlung de speculis comburentibus; sie steht auch in cod. Amplon. 387 fol. 57—59 (vgl. Rose Anecd. II S. 291), cod. Basil. F. II. 33 fol. 105—106 (vgl. Curtze Liber trium fra-

trum S. 111), cod. Dresd. Db 85 fol. 11^v—16, cod. Dresdens. Db 86 fol. 275 —277 (vgl. Curtze Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-litterar. Abth. 1883), cod. Paris. lat. 8680 A fol. 61—64, und ist nach Mittheilung E. Wiedemanns Uebersetzung einer auch arabisch erhaltenen Abhandlung von Ibn Al-Haitam (Alhazen).*) *fol. 3—4^r:* ein anonymes Stück de ponderibus (defect). *fol. 4^v —9:* liber Archimedis de quam pluribus theorematis (übergeschrieben von zweiter Hand: volutis; es ist die Schrift περὶ ἑλίκων); am Schluss: completa fuit translatio huius anno $\overset{\text{i}}{\text{X}}$ 1269 mense febr. *fol. 10—13^v:* de planis aeque repentibus. *fol. 13^v—15^v:* quadratura parabolae; am Schluss: completa fuit translatio eius octavo die maii anni $\overset{\text{i}}{\text{X}}$ 1269. *fol. 15^v—16^r:* dimensio circuli, ohne Ueberschrift. *fol. 16^v—26^v:* de sphaera et cylindro I—II; am Schluss das Datum 29. Sept. 1269. *fol. 27—37:* Eutocius in libros II de sphaera et cylindro; 10 Kal. Nov. 1269. *fol. 38—45:* de conoidibus; Idib. Nov. 1269. *fol. 46—48^r:* Eutocius in libros II de planis aequerepentibus; 21. Nov. 1269. *fol. 48^v—53^r:* de insidentibus aquae I—II; completa fuit translatio eius decima die decembris anno $\overset{\text{i}}{\text{X}}$ 1269. *fol. 53^r—54:* Ptolemaeus de speculis; ultima die decembris 1269; es ist die von Rose Anecd. II S. 315 ff. herausgegebene Katoptrik Herons. *fol. 55—57:* Ptolemaeus de analemmate; ohne Zweifel die von F. Commandino herausgegebene Uebersetzung des griechisch nicht erhaltenen Werkes.**) Am Schluss steht ein Index (mit zweiter Hand) und am Fuss der Seite, wie es scheint, mit erster Hand: ultra hec grece reperitur ψαμμίτης et Eutocii commentarius in circuli mensurationem. Die ganze Handschrift ist mehrmals durchcorrigirt, theils mit erster Hand (zum

---

*) Eine Ausgabe bereite ich im Verein mit Hrn. Prof. Wiedemann schon seit längerer Zeit vor.

) Die Vorrede des Commandinus (Romae 1562) beginnt: Marcellus Ceruinus adhuc Cardinalis paucis ante annis, quam altissimum reipublicae Christianae gradum obtineret, duos libellos, unum Archimedis de iis, quae in aqua uehuntur, alterum Ptolomaei de analemmate, latine redditos e diuturna obscuritate, in qua latuerant, euoluendas curauit. Es ist offenbar eben von unserer Hds. die Rede; denn die Bibliothek des Herzogs Altaemps hatte einst dem Cardinal Marcello Cervini (als Papst Marcellus II) gehört (s. Blume Iter Italicum III S. 68 ff.), durch dessen Hände auch ein Theil der Bibliothek Georg Vallas, jedoch **nicht seine griechische Hds. des Archimedes (wovon wir jetzt die Beschreibung eines Augenzeugen haben, des Janos Lascaris, s. Centralblatt f. Bibliothekswesen I S. 383 ff.), den Weg nach der Vaticana nahm. Weiter unten sagt Commandin: graecum enim codicem non habemus, et is, qui de graeco conuertit, ob materiae, in qua uersabatur, obscuritatem cymerias, ut ita dicam, tenebras lectoribus offudit etc., was ganz auf unseren Uebersetzer passt. Spärliche Spuren von dem griechischen Text des Ptolemaeus habe ich in dem berühmten Palimpsest Ambros. L 99 sup. aufgefunden; namentlich ist die Figur Ottobon. fol. 63 erkennbar Ambros. fol. 143.

Theil mit verschiedener Dinte), theils mit zwei jüngeren Händen, wovon die eine ganz spät ist.

Andere handschriftliche Quellen zu den hier erwähnten Schriften sind nur sehr spärlich nachgewiesen. Die Hdss. der Abhandlung de speculis comburentibus wurden oben aufgezählt; eine derselben (Amplon. 387) enthält auch den sogenannten Ptolemaeus (die Katoptrik Herons), s. Rose Anecd. II S. 291. Derselbe erwähnt Anecd. II S. 294 ff., dass dieselbe Uebersetzung von Archimedes περὶ ἑλίκων noch in cod. Vatic. Regin. 1253 enthalten ist. Hierzu kann ich noch eine Hds. der Nationalbibliothek zu Madrid fügen, die ich im Sommer 1888 untersuchte. Es enthält nämlich der cod. Matrit. Aa 30 (membran., aber ziemlich jung) ausser Witelo libb. I—X (fol. 1—306), der lateinischen Uebersetzung von Euklids Katoptrik (fol. 307—310^v), einer (arabisch?-) lateinischen Bearbeitung der Optik desselben, worüber ich bald näheres mittheilen werde (fol. 310^v—314^v) und anderen mathematischen Sachen*) noch unsere Uebersetzung von Archimedes de planis aeque repentibus I—II (fol. 331^r—339^r), quadratura parabolae (fol. 339^r—343^v), dimensio circuli (fol. 343^v—344^v), de insidentibus aquae I—II (fol. 344^v—352^r) und Eutocius in libros I—II de planis aeque repentibus (fol. 371—376).

Endlich gab es noch am Ende des XVI. Jahrh. in Köln ein jetzt verschollenes Exemplar wenigstens der Bücher de insidentibus aquae (Curtze Ueber eine Hds. der kgl. Bibl. zu Dresden S. 14), ohne Zweifel in unserer Uebersetzung.

Herausgegeben sind ausser dem Ptolemaeus de analemmate und Ptolemaeus-Heron, wovon oben die Rede war, noch folgende Stücke:

Archimedes quadratura parabolae und dimensio circuli von Lucas Gauricus, Venet. 1503 (Archimedis opp. III S. XXXIV) und de planis aeque

---

*) Fol. 314^v—317^r eine anonyme arithmetische Abhandlung, *inc.* quantitatem aliquam mensurare, *des.* quemadmodum 6 ad quattuor. Fol. 317^r—325^r: instrumentum gnomonicum construere; *inc.* accipe lamellam aeneam, *des.* est dyameter ad profunditatem, 34 propp. Fol. 325^r—329^r 29 propp. von Flächenberechnungen; *inc.* superficies famosa est quadrata, *des.* non multum relinquitur erroris sensibus. Fol. 329^r—331^r 17 propp. von Volumenberechnungen; *inc.* corpus cubicum est, *des.* scire quantum de vino est in dolio. et hic est finis istius tractatus. — Fol. 352^v—359^r liber Maumet filii Moysi Algorismi de algebra et almichabala translatus a magro Gerardo Cremonensi in toleto de arabico in latinum. Fol. 359^r—362^r, *inc.* quod si quis dixerit, *des.* minus radix talis numeri. Fol. 362 einige Definitionen. Fol. 362^v—363^v de radice numeri invenienda und noch ein Paar Kleinigkeiten. Fol. 363^v—369^r liber Iordani de ratione ponderis; *inc.* omnis ponderosi motum esse, *des.* in plurium habebit trahere b. ea finitur liber Ioradani de ratione ponderis. et sic finit. Fol. 369^r—371^r, *inc.* quoniam propter regularem quorundam corporum, *des.* et sicut ponderis s ad pondus o partiale. et ita finit.

repentibus I—II, quadraturae parabolae, dimensio circuli, de insidentibus aquae I von Niccolo Tartaglia, Venet. 1543; dann de insidentibus aquae II nach Tartaglias Papieren von Troianus Curtius, Venet. 1565 (Archimedis opp. III S. XXIX ff.); die beiden Bücher de insidentibus aquae gab dann in verbesserter Gestalt Fr. Commandino heraus (Bonon. 1565); endlich habe ich nach cod. Ottobon. die Vorrede zum ersten Buch de sphaera et cylindro herausgegeben und zur Wiederherstellung des defecten griechischen Textes benutzt (Mindre Afhandlinger udg. af det philologisk-histor. Samfund, Kopenhagen 1887 S. 1—8).

Dass Commandino unsere Handschrift benutzen konnte, ist oben nachgewiesen, und daraus entnahm er auch die Bücher de insidentibus aquae (Schluss der Vorrede zu Ptolemäus 1562: vale et a Commandino tuo libellum etiam Archimedis de iis, quae in aqua uehuntur, et emendatiorem et fortasse illustriorem propediem expecta); doch hat er auch die Ausgabe Tartaglias (vom ersten Buche 1543) berücksichtigt; denn die Archimedis opp. III S. XXXII aus seiner Vorrede zu Archimedes angeführten Worte „codex ipse, ut etiam interpres fatetur, vetustate corruptus et mancus est“ können sich doch nur auf das Vorwort Tartaglias beziehen; im Ottobon. finden sich solche Aeusserungen nicht. Freilich muss also auch Commandino sich über das wahre Sachverhältniss durch die absichtliche Unklarheit Tartaglias haben täuschen lassen, wenigstens in so weit, dass er seine Vorrede mit der Uebersetzung selbst in Verbindung setzte.

Dass Tartaglia, wenigstens in den von Gauricus nicht edirten Stücken den Matritensis (oder sein Original) benutzt hat, geht aus vielen Uebereinstimmungen hervor (der Ottobon. war 1543 wohl nicht mehr in Venedig); so hat Matrit. (aber nicht Ottobon.) vor de planis aeque repentibus I dasselbe Stück aus Pappus (dixerunt enim theorema esse — ad acquisitionem ipsius quod premittitur) als Tartaglia fol. 5 (Archim. opp. III S. LII); auch die lächerlich verstümmelte Ueber- und Unterschrift der Bücher de planis aeque rep. ist im Matrit. und bei Tartaglia gleichlautend (nur hat Tartaglia wie auch sonst Archimedis statt Archimenidis): incipit liber Archimenidis de centris grauium *ualde* (d. h. uel de) planis aeque repentibus, explicit liber Archimenidis de cent*rum* (d. h. centris) grauitatis uel *duplationis* (d. h. de planis) aeque repentibus.*) Es liegt also sehr nahe anzunehmen, dass er auch in den ihm und Gauricus gemeinsamen Stücken (quadrat. parab. und dimensio circuli) dieselbe Hds. benutzte. Das scheint doch aber nicht der Fall zu sein;

*) Dass umgekehrt Matrit. aus Tartaglia stammen sollte, ist dadurch ausgeschlossen, dass Matrit. noch den Commentar des Eutocius enthält und also jedenfalls handschriftliche Quellen hatte.

er hat vielmehr den bequemeren Weg eingeschlagen den Gauricus wörtlich abzuschreiben. Denn die Ueberschrift über quadr. parab. lautet bei beiden: Archimedis Syracusani tetragonismus. incipit Archimenidis (Archimedis Tartagl.) quadratura parabolae, im Matrit. aber: Ejusdem Archimenidis qui dicitur quadratura parabole liber incipit, und der Titel tetragonismus hat eigentlich nur bei Gauricus, wo er auch für die dimensio circuli gilt, einen Sinn (Archimedis opp. III S. XXXIV); auch die falsche Lesart bei Tartaglia im Anfang der Vorrede: mortuum esse, *quod* erat nobis amicus, q (d. h. quod) bei Gauricus (qui Matrit.), scheint so entstanden zu sein, dass der Setzer des Gauricus das ähnliche Compendium für qui mit q vertauschte, das Tartaglia dann getreu mit quod auflöste. Ob Tartaglia neben Gauricus auch in diesen Schriften seine Hds. herbeizog, vermag ich nicht zu entscheiden, ebenso wenig ob Gauricus den Ottobon. selbst oder den Matrit. benutzte; für das letztere spricht die Lesart *epytrica* trigoni abg am Schluss der quadrat. parab. (Gauricus, Tartaglia); denn diese Corruption für epitrita steht an dieser Stelle so im Matrit., während Ottob. epitrita hat und überhaupt die griechischen Wörter besser wiedergiebt. Wenn das der Fall ist, entstammen also die groben Fehler bei Gauricus, die Tartaglia beibehält, wohl meist seiner Hds.; im anderen Falle aber sind sie als reine Druckfehler zu betrachten, und dann würde ihr Vorkommen bei Tartaglia seine sklavische Abhängigkeit von Gauricus beweisen. Eine Collation weniger Stellen des Matrit. würde die kleine Frage entscheiden können.

Der Uebersetzer, wenigstens der datirten Stücke des Ottobon., ist, wie Rose a. O. ohne Zweifel richtig vermuthet, der bekannte Aristotelesübersetzer Wilhelm von Moerbek, der um diese Zeit in Viterbo mehrere Schriften aus dem Griechischen übersetzte (Rose Anecd. II S. 292 ff.). Die ganze Art der wörtlichen Wiedergabe des Griechischen ist seiner Uebersetzung von Aristoteles de caelo mit dem Commentar des Simplicius (Venedig 1540) sehr ähnlich; auch Uebereinstimmung in Einzelheiten sind nachweisbar (quidem igitur μὲν οὖν, inuicem ἀλλήλους, quae ᾗ; dagegen ist die Simpliciusübersetzung in der Wiedergabe von οὖν igitur, δή itaque, ἄρα ergo, ὥστε quare nicht so consequent als diejenige des Archimedes). Natürlich entstammen dann auch die nicht-datirten Stücke von Archimedes (de planis aequerep., dimensio circuli), welche die Zeit Februar-Mai und Mai-September ausfüllen, seiner Feder, so wie auch Ptolemaeus de analemmate. Ueber das Fragment de ponderibus ist mir nichts bekannt. Zurück steht also die Abhandlung de speculis comburentibus, die abweichend von den übrigen nach dem Arabischen übersetzt ist. Da sonst keine Uebersetzung eines arabischen Werkes durch Wilhelm bekannt ist, könnte man zweifeln, ob er selbst diese Abhandlung übersetzt habe; es müsste jedenfalls bedeutend vor 1269, dem Datum der

übrigen Uebersetungen im Ottobon., geschehen sein; denn Roger Bacon citirt schon im Opus maius (1267) unsere Uebersetzung.*) Die Möglichkeit ist jedoch nicht zu läugnen, da Wilhelm wahrscheinlich Arabisch verstand (vgl. Witelo in der an ihn gerichteten Vorrede seiner Optik**): libros itaque ueterum tibi super hoc negotio perquirenti occurrit taedium uerbositatis Arabicae, implicationis Graecae); dafür spricht der Umstand, dass die übrigen Handschriften des Werkchens augenscheinlich vom Ottobonianus abstammen, und überhaupt der Charakter dieser Handschrift. Es ist nämlich kaum zu bezweifeln, dass wir im Ottobon. das eigene Originalexemplar des Uebersetzers besitzen. Das beweisen schon die am Rande beigeschriebenen griechischen Wörter, die der Vorlage treu nachgemalt sind und sehr oft***) einer Lacune im Text entsprechen; der Uebersetzer hat offenbar nicht sofort ein lateinisches Wort finden können oder das griechische Wort nicht gekannt und es dann am Rande copirt, um später nach genauerer Untersuchung und eingeholter Auskunft die Lücke füllen zu können. Das alles würde ein Abschreiber doch kaum so genau beibehalten haben. Dazu kommt noch eine Reihe von Correcturen der ersten Hand, die erst von diesem Gesichtspunkte verständlich werden. Aus dem unten abgedruckten Buche *περὶ ἑλίκων* führe ich von solchen Correcturen folgende an (ich citire den griechischen Text nach meiner Ausgabe):

II S. 34, 14 *τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ*] magnitudine autem singula (del. m. 1) quaelibet maxime. Er hat zuerst *ἑκάστα* mit singula geben wollen, dann aber quaelibet vorgezogen.

II S. 44, 10 *ἐλάσσονα λόγον ἔχει*] minorem rationem (del. m. 1) habet proportionem. Auch hier ist ihm zuerst rationem in die Feder geflossen, dann hat er das regelmässige proportionem an die Stelle gesetzt, aber nach dem schon geschriebenen habet.

II S. 56, 23 *δίχα τεμνούσας*] in duo incidentis (del. m. 1) scindentis;

---

*) In der Optik, Opus maius ed. Iebb, Venedig 1750 S. 308 ff.: et hoc probatur per auctorem libri de speculis comburentibus, qui dicit: qualiter autem habeamus speculum concauum comburens, cuius combustio sit secundum longitudinem notam, quamcunque voluerimus. ponemus laminam de chalybe etc.

**) Auch Witelo benutzt die Abhandlung de speculis comburentibus in unserer Uebersetzung (umfangreicher Auszug IX, 41—44).

***) Hier einige Beispiele. Eutocius III S. 78, 19 (in meiner Ausgabe): ut diocles in libro de, dann Lacune und in mg. *πυρίων*. III S. 104, 1: regalis sepulcri locum, das letzte Wort nachträglich auf einem grösseren Raum, mg. *σηκ`* (d. i. *σηκόν*). In dem Fragment bei Eutocius III S. 154 ff. ist das Wort asymptota immer in Rasur geschrieben mit erster Hand, am Rande stand überall das griechische Wort, das aber jetzt wegradirt ist. III S. 188, 1—2 zweimal pyriis nachgetragen, am Rande *πυρίων* wegradirt.

hier ist incīdo verworfen worden, weil es mit incĭdo verwechselt werden konnte, das dem gr. προσπίπτω entspricht.

II S. 72, 10 τᾶς μὲν ZΔ εὐθείας ἐλάσσονα] ea quidem quae est za minorem (del. m. 1) recta minorem. Hier hat er zuerst vergessen das überflüssige recta dem gr. Texte zu Liebe beizufügen, dann aber rechtzeitig den Fehler bemerkt.

II S. 74, 17 ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν] sit itaque si (del. m. 1) rursum, si possibile est; hier ebenso rursum (πάλιν).

II S. 76, 1 ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν] ad cathetum ad (del. m. 1) ab a ad ipsam ductam. Das ἀπὸ τοῦ Α anfangs wegen der im Lateinischen veränderten Wortstellung übersehen, dann sofort nachgetragen.

II S. 84, 16 ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων] in circulo minor (del. m. 1) linea minor.

II S. 96, 16 καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἕλικος ἀγομέναν] et a rectis (corr. aus rectā m. 1), quae ab ultimis reuolutionis ducuntur (aus ducitur m. 1). Der Uebersetzer nahm zuerst ταν ευθειαν ταν . . αγομεναν — Accente waren in seiner Hds. nicht da — als Accusativ Singul., wurde aber nachher auf den grammatischen Zusammenhang aufmerksam.

II S. 106, 17 τὸ τρίτον μέρος (Nominativ)] tertiam partem (corr. in tertia pars m. 1). Weil der Zusammenhang ihm anfangs nicht durchsichtig war, nahm er τὸ — μέρος als Accusativ. Ganz ebenso II S. 116, 4—5.

II S. 110, 6 μιᾷ ἐλάσσονες] minore (del. m. 1) pauciores una. Ehe er minores ganz ausgeschrieben, wurde er inne, dass diese gewöhnliche Uebersetzung von ἐλάσσονες hier nicht passe.

II S. 114, 21 τοῦ περιεχομένου] circum (del. m. 1) contento. Er wollte anfangs circumscripto (περιεχ.) geben.

II S. 120, 2 ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μεῖζον εἶμεν] ut circumscripta figuram (m del. m. 1). Der falsche Accusativ ist ihm offenbar desshalb in die Feder geflossen, weil die griechische Construction ihm vor dem Gedanken schwebte.

Diese Eigenthümlichkeit der Hds. erhöht natürlich ihre Brauchbarkeit für die Kritik ganz bedeutend; wir haben es nur äusserst selten mit Schreibfehlern zu thun und dann immer mit völlig irrelevanten. Ehe wir aber dazu hinübergehen die Stellung der Uebersetzung unter den Textesquellen zu bestimmen, theile ich zunächst einige Proben mit, nämlich

1) Das Buch περὶ ἑλίκων vollständig, doch ohne die Figuren, die mit denen meiner Ausgabe stimmen; die Buchstaben entsprechen sich, wie folgt

Griech.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Υ	Φ	Χ
Uebersetz.	a	b	g	d	e	z	h	t	i	k	l	m	n	x	o	p	r	s	y	f	q

Ψ, Ω und ℅ q sind in der Uebersetzung beibehalten, *T* wird gewöhnlich mit c wiedergegeben (in prop. XI mit z).

Einige Bemerkungen über die zierlichen, aber öfters nachgebesserten Figuren fanden in den Anmerkungen Platz, unwesentliche Abweichungen von den meinigen aber blieben unberücksichtigt.

2) Als Probe der von Gauricus-Tartaglia herausgegebenen Stücke die *κύκλου μέτρησις* mit den Varianten der Ausgaben von Gauricus (G) und Tartaglia (T). Die weggelassenen Figuren ohne bemerkenswerthe Abweichungen von den meinigen.

3) Die Vorrede zu *περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* II.

4) Eutocius ad lib. I de sphaera et cyl. III p. 4, 2—6, 7.

5) Collation der beiden Bücher *περὶ ὀχουμένων* mit meiner Ausgabe II S. 359—426. Hier besitzt ja nämlich der Ottobon. den Werth der einzigen Quelle.

I.

Incipit liber Archimedis de quam pluribus theorematis.

Archimedes Dositheo gaudere.

Theorematum ad Cononem missorum, pro quorum demonstrationibus semper mittis michi ut scribam, plurimorum quidem in delatis ab Eraclide habes 5 scriptas, quasdam autem ipsorum etiam hoc libro scriptas mitto tibi. non mireris autem, si pluri tempore post quam fecimus, tradimus demonstrationes ipsorum. accidit enim hoc fieri, quia prius volui dari circa mathemata negociantibus et haec addiscere desiderantibus. qve enim eorum que in geometria theorematum non facilis metodi in primo apparentia tempore elaborationem 10 accipiuntur. Konon quidem non sufficienti tempore ad declarationem ipsorum accepto transegit uitam et obscura fecit et haec omnia inuenit et alia multa inuenit et ad plurimum produxit geometriam. scimus enim infuisse ei consuetudinem non quamcunque circa mathema et laboris amorem excedentem. post mortem autem Cononis multis annis superuenientibus a nullo nullum 15 problema propius motum. volo autem singula ipsa proferre. etenim accidit duo quedam inter ipsa non separata, finem autem attingemus, ut dicentes quidem omnia adinuenire, demonstrationem autem eorum proferentes arguantur tamquam confitentes inuenire impossibilia. hec itaque que problemata sint, et quorum demonstrationes habes missas, et quorum hoc libro ferentes pro- 20 bantes ins . . . . tibi.

Primum itaque problema erat: spera data planum spatium inuenire equale superficiei spere; quod utique et primo fuit manifestum tradito eo qui circa speram libro. ostenso enim, quod omnis spere superficies quadrupla est maximi

---

2 *quam pluribus*] supra scr. m. 2: *volutis.* 5 *mittis*] *mandas* mg. m. 2. *michi*] *c* del. *quidem*] renou. m. 2. *Eraclide*] *H* add. m. 2. 8 *-ca ma-*] renou. m. 2. 9 *qve enim*] e corr. m. 2. 10 *metodi*] *h* add. m. 2. 11 *quidem non*] renou. m. 2. 12 *uitam*] renou. m. 2. *-uenit*] renou. m. 2. 13 *ei*] renou. m. 2. *consuetudinem*] *intelligentiam* supra scr. m. 2. 14 *quamcunque*] *uulgarem* mg. m. 2. *mathema*] *mathemā.* 15 *-ueni-*] renou. m. 2. 16 *autem*] $\overline{eac}$ renou. m. 2. 17 *separata*] renou. m. 2. 21 *ins . . .*] incertae litterae, seq. quaedam euan. 22 *spera*] *h* inseruit m. 2, ut in seq. semper.

circuli eorum qui in spera, palam, quod possibile est spatium planum inuenire equale superficiei spere.

Secundum autem: cono dato aut cylindro speram inuenire equalem cono aut cylindro.

5 Tertium autem: speram datam plano decindere, ut decisiones ipsius ad inuicem ordinatam proportionem habeant.

Quartum autem: datam speram plano decindere, ut decisiones superficiei ordinatam proportionem habeant ad inuicem.

Quintum autem: datam decisionem spere date decisioni spere assimilare.

10 Sextum autem: duabus datis decisionibus spere siue eiusdem siue alterius inuenire aliquam decisionem spere, que erit ipsa quidem similis alteri decisionum, superficiem autem equalem habebit superficiei alterius decisionis.

Septimum: a data spera decisionem decidere plano, ut decisio ad conum habentem basim eandem decisioni et altitudinem equalem ordinatam propor-15 tionem habeat non maiorem ea, quam habent tria ad duo.

Horum quidem igitur dictorum omnium demonstrationes Eraclides detulit; quod autem praeter haec separatum falsum erat; est autem: si spera plano decindatur in inequalia, maior decisio ad minorem duplam proportionem habebit, quam maior superficies ad minorem. quod autem hoc falsum sit, per 20 prius missa manifestum est. separatum enim est in ipsis hoc: si spera plano decindatur in inequalia ad rectos diametro alicui earum que in spera, maior decisio ad minorem eandem habebit proportionem, quam decisio maior diametri ad minorem; maior enim decisio spere ad minorem minorem quidem quam duplam proportionem habet eius, quam habet maior superficies ad mino-25 rem, maiorem autem quam emioliam.

Erat autem et extremum separatum problematum falsum, quod si spere alicuius diametrus decindatur ita, ut tetragonum quod a maiori decisione triplum sit tetragoni quod a minori decisione, et per signum planum ductum ad rectos diametro decindat speram, talis specie figura, qualis est maior spere 30 decisio, maxima est aliarum decisionum habentium equalem superficiem. quod autem hoc falsum sit, palam per prius missa theoremata. ostensum enim est, quod emisperium maximum est contentarum ab equali superficie spere decisionum.

Post haec autem de cono problematizata sunt haec: si orthogonii coni

---

1 *spera*] seq. ras. 2 litt. 3 *secundum autem*] in ras. m. 2. 5 *decindere*] (sic) *-dere* comp. e corr. m. 2. *ut*] e corr. m. 2. *decisiones*] *-es* e corr. m. 2. 7 *superficiei*] seq. ras. 2—3 litt. 9 *datam*] *-am* in ras. m. 2, seq. ras. 2 litt. 16 *Eraclides*] *H* add. m. 2. 19 *hoc*] e corr. m. 2. 20 *ipsis*] *-sis* e corr. m. 2. 21 *alicui*] *-icui* e corr. m. 2. 25 *emioliam*] *h* add. m. 2. 28 *ductum*] *-um* renou. m. 2. 32 *emisperium*] *hemispherium* m. 2.

decisio manente diametro circumferatur, ut sit axis diametrus, circumscripta figura a decisione orthogonii coni conoidalis uocetur. et si conoidalem figuram planum contingat, equidistanter autem penes contingens planum aliud planum ductum decindat aliquam decisionem conoidalis, decise decisionis basis quidem uocetur decindens planum, uertex autem signum, secundum quod contingit 5 alterum planum ipsum conoidale. si itaque et dicta figura plano decindatur ad rectos axi, quod quidem decisio circulus erit, palam, quod autem detruncata decisio emiolia erit coni habentis basim eandem decisioni et altitudinem eandem, ostendere oportet. et si conoidalis due decisiones decindantur planis qualitercunque ductis, quod quidem igitur decisiones erunt acutorum angulo- 10 rum conorum decisiones, palam, si descindentia plana non recta sint ad axem, quod autem decisiones ad inuicem hanc habeant proportionem, quam habent potentia ad inuicem, que a uertice ipsorum equidistanter penes axem usque ad plana descindentia, ostendere oportet. horum autem demonstrationes non nunc tibi mittuntur. 15

Post hec autem circa elicas, quas latini uolutiones uel reuolutiones uocant, erant problematizata haec; sunt autem uelut aliud quoddam genus problematum nihil communicantia predictis; de quibus demonstrationes in hoc libro scripsimus tibi. sunt autem haec: si recta linea in plano manente altero termino equeuelociter circumdelata restituatur iterum, unde incepit, simul autem 20 linee circumdelate feratur aliquod signum equeuelociter ipsum sibi ipsi per rectam incipiens a manente termino, signum helicem describet in plano.

Dico itaque, spatium comprehensum ab elice et a recta restituta, unde incepit, tertiam partem esse circuli descripti centro quidem manente puncto, distantia autem ipsa recta pertransita a signo in una circumlatione recte. 25

Et si elicem contingat aliqua recta secundum terminum elicis, qui ultimus sit, alia autem aliqua recta circumducte et restitute linee ad rectos angulos ducatur a manente circa idem, ut incidat contingenti, dico, adductam rectam equalem esse circuli periferie.

Et si circumducta linea et signum delatum per ipsam pluribus circum- 30

---

2 *conoidalis*] prius *i* in ras. m. 2, ut saepius. 4 *decise*] *-e* e corr. m. 2. 7 *palam*] in ras. plurium litt. m. 2. *detruncata*] post *c* ras. 1 litt. 8 *emiolia*] *h* add. m. 2. 9 *conoidalis*] corr. ex *conoydalis* m. 2. 11 *descindentia*] corr. ex *decindentia* m. 1. 13 *uertice*] *uerticibus* m. 2. Post *ipsorum* add. *ducte* (?) m. 2. 15 *nunc*] *dum* m. 2; mg. m. 1: *ουτω forte ουπω.* 16 *elicas*] *helices* m. 2. *quas—uocant*] del. m. 2. *uolutiones*] *uolutas* m. 2. *uolutiones uel reuolutiones*] in ras. m. 1. 17 *sunt autem uelut*] renou. m. 2. *aliud*] supra scr. m. 1. 18 *nihil*] renou. m. 2. *predictis*] *-dictis* renou. m. 2. 22 *helicem*] e corr. m. 2. 23 „*infra 24*“ mg. m. 1. *elice*] *h* add. m. 2 ut semper fere. 26 „*infra 18*“ mg. m. 1. 27 *sit*] *fit* m. 2. 30 „*demonstrantur infra in 27*“ mg. m. 1. *-cumlationibus*] renou. m. 2.

lationibus circumferantur et restituantur iterum, unde incepit, dico, spacii eius, quod in secunda circumlatione comprehensum est ab elice, quod quidem in tertia comprehensum duplum erit, quod autem in quarta triplum, quod autem in quinta quadruplum, et semper que in posterioribus circumlationibus com-
5 prehenduntur spatia, secundum consequentes numeros multiplicia fore eius, quod in secunda circumlatione comprehensum est, quod autem in prima circumlatione comprehensum est spatium, sextam partem esse eius spatii, quod in secunda circumlatione comprehensum est.

Et si in elice in una circumlatione descripta duo signa accipiantur et ab
10 ipsis copulentur recte ad manentem extremitatem circumducte linee, et circuli duo describantur centro quidem manente signo distantiis autem copulatis ad manentem extremitatem recte, et minor copulatarum educta fuerit, dico, comprehensum spatium a maioris circuli periferia ea que ad eadem elici intermediæ rectarum ente et elice et recta educta ad comprehensum spatium a
15 minoris circuli periferia et eadem elice et recta coniungente ultima ipsarum hanc habebit proportionem, quam habet que ex centro minoris circuli cum duabus tertiis partibus excessus, quo excedit que ex centro maioris circuli eam que ex centro minoris, ad eam que ex centro maioris circuli una tertia parte dicti excessus. horum itaque et aliorum de elice in hoc libro demon-
20 strationes a me scribuntur. preiacent autem sicut et aliis, que geometrizantur, oportunitatem habentia ad demonstrationem ipsorum. sumo autem et in hiis eorum que in prius traditis sumptiones has: inequalium linearum et inequalium spatiorum excessum, quo excedit maius minus, ipsum compositum possibile esse excedere omne propositum eorum, que ad inuicem dicuntur.

1 Si per aliquam lineam feratur aliquod signum equeuelociter ipsum sibi
26 ipsi motum, et accipiantur in ipsa due linee, accepte eandem habebunt proportionem ad inuicem quam quidem tempora, in quibus signum lineas perambulauit.

Feratur enim aliquod signum penes lineam *ab* equeuelociter, et accipian-
30 tur in ipsa due linee *cd*, *de*, sit autem tempus, in quo lineam *cd* signum perambulauit, *zh*, in quo autem lineam *de*, *ht*. ostendendum, quod eandem

---

1 *incepit*] *inceperunt* m. 2. 3 *erit*] *fore* m. 2. 5 *fore*] antecedit ras. 6 litt. 9 *in*] 4 litt. euan. „*infra 28*“ mg. m. 1. 10 *copulentur*] e corr. m. 2. 11 *copulatis*] in ras. m. 1. 12 *copulatarum*] e corr. m. 1. *educta*] in ras. m. 1. 13 *periferia*] antecedit *circumlatione*, sed del. m. 1. *ea que ad*] e corr. m. 1. *elici*] -*ci* e corr. m. 2. *intermediæ*] -*æ* e corr. m. 2. 14 *ente*] *enti* m. 2. *educta*] e corr. m. 1. 15 *periferia*] ante hoc uoc. del. *circumlatione* m. 1. 16 *minoris*] *maioris* m. 2. 17 *que—eam*] seq. ras. mg. m. 1. 18 *ad—maioris*] mg. postea add. m. 1. 19 *demonstrationes in hoc libro* m. 2. 20 *que*] renou. m. 2. 22 Post *traditis* add. ∧ et uocab. euan. (*libris*?). *sumptiones*] mut. in *suppositiones* m. 1. 23 Ante *ipsum* del. *ipsorum* m. 1. 25 **1** mg. m. 2.

habent proportionem *cd* linea ad lineam *de* quam tempus *zh* ad tempus *ht*. componantur enim ex lineis *cd*, *de* linee *ad*, *db* secundum quamcunque compositionem, ut excedat linea *ad* lineam *db*, et quoties quidem componitur linea *cd* in linea *ad*, toties componatur tempus *zh* in tempore *lh*, quoties autem componitur *de* linea in *db*, toties componatur *ht* tempus in tempore *kh*. quoniam igitur supponitur signum equeuelociter delatum esse per lineam *ab*, palam, quod in quanto tempore per lineam *cd* delatum est, in tanto unamquamque equalem ei, que est *cd*. manifestum igitur quod et per compositam lineam *ad* in tanto tempore delatum est, quantum est *lh* tempus, quoniam toties componitur *cd* linea in *ad* linea et *zh* tempus in tempore *lh*. propter haec itaque et per lineam *bd* in tanto tempore signum motum est, quantum est *kh* tempus. quoniam igitur maior est *ad* linea quam *bd*, palam, quod in pluri tempore signum per lineam *da* motum est quam per *bd*. quare tempus *lh* maius est tempore *kh*. similiter autem ostenditur, et si ex temporibus *zh*, *ht* componantur tempora secundum quamcunque compositionem, ut excedat alterum alterum, quia et compositam ex lineis *cd*, *de* secundum eandem compositionem excedet proportionalis excedenti tempori. manifestum igitur, quod eandem habebit rationem *cd* ad lineam *de* quam tempus *zh* ad tempus *ht*.

2 Si duobus signis utroque per aliquam lineam moto non eandem equeuelociter ipsum sibi delato accipiantur in utraque linearum due linee, primeque in equalibus temporibus a signis permeentur et secunde, eandem habebunt proportionem ad inuicem accepte linee.

Sit per lineam *ab* motum aliquod signum equeuelociter ipsum sibi ipsi et aliud per lineam *kl*, accipiantur autem in linea *ab* due linee *cd*, *de* et in linea *kl* *zh*, *ht*, in equali autem tempore id quod per *ab* lineam delatum signum per lineam *cd* moueatur, in quanto alterum per *kl* delatum per eam que *zh*. similiter autem et per lineam *de* in equali moueatur signum, in quanto alterum per *ht*. ostendendum, quod eandem habet proportionem *cd* ad *de*, quam *zh* ad *ht*. sit itaque tempus, in quo per lineam *cd* mouetur signum *mn*; in hoc itaque tempore et alterum signum mouetur per *zh*. rursum itaque et in quo per lineam *de* mouetur signum, sit tempus *nx*; in hoc itaque et alterum signum mouetur per *ht*. eandem itaque proportionem habebunt *cd* ad *de* lineam quam tempus *mn* ad *nx*, et *zh* ad *ht* quam tempus *mn* ad *nx*. palam igitur, quod eandem habent proportionem *cd* ad *de* quam *zh* ad *ht*.

---

2 *cd*] renou. m. 2. Fig. m. 2, fuit similis a m. 1. *compositionem*] *-m* in ras. plurium litt. m. 2. 7 *tanto*] post hoc uocabulum add. *per* m. 2. Post *unamquamque* add. *delatum est* mg. m. 2. 8 *per*] insert. m. 1. 11 *haec*] *eadem* m. 2. 16 *cd*] in ras. m. 1. 17 *proportionalis*] mg. *omologus* m. 2. 19 2 mg. m. 2 (numeri propositionum ab initio etiam m. 1 additi fuerunt, sed euan.). 25 *id*] in ras. m. 2. Fig. in ras. m. 2.

3 Circulis datis quotcunque multitudine possibile est rectam accipere maiorem entem periferiis circulorum.

Circumscripto enim circa unumquemque circulorum polygonio palam, quod que ex omnibus componitur perimetris recta maior erit omnibus periferiis 5 circulorum.

4 Duabus lineis datis inequalibus recta scilicet et circuli periferia possibile est accipere rectam maiore quidem datarum linearum minorem, minore autem maiorem.

Quoties enim excessus, quo excedit maior linea minorem; ipsi compositus 10 excedet rectam, et in tot equalia diuisa recta una decisio minor erit excessu. si quidem igitur et periferia maior recta una decisione apposita ad rectam minore quidem datarum palam quod maior erit, maiore autem minor; etenim que apponitur, minor erit excessu.

5 Circulo dato et recta contingente circulum possibile est a centro circuli 15 ducere ad contingentem ita, ut intermedia contingentis et periferie circuli recta ad eam que ex centro minorem proportionem habeat quam periferia circuli intermedia contactus et protracte ad datam quamcunque circuli periferiam.

Detur circulus abg, centrum autem ipsius k, et contingat circulum dz penes b, data sit autem et circuli periferia qualiscunque. possibile autem est accipere 20 data periferia aliquam rectam maiorem, et sit e recta maior data periferia. ducatur autem a k centro equidistanter penes dz que ah, et ponatur que ht equalis e extensa ad b. a k centro itaque ad t copulata educatur. eandem itaque proportionem habet tz ad tk quam bt ad th. ergo zt ad tk minorem proportionem habet ea quam bt periferia ad datam periferiam, quia que quidem bt recta minor est 25 periferia bt, que autem th maior data periferia. minorem igitur proportionem habet et que zt ad eam que ex centro quam que bt periferia ad datam periferiam.

6 Circulo dato et in circulo linea minore diametro possibile est a centro circuli ad periferiam ipsius adnectere rectam secantem eam que in circulo datam lineam ita, ut accepta recta intermedia periferie et recte in circulo date 30 ad eam que a concurrentis termino eo quod super periferiam copulata ad alteram partem date in circulo recte statutam proportionem habeat, etsi data proportio minor sit ea, quam habet medietas in circulo date ad eam que a centro cathetum ad ipsam ductam.

---

1 **3**] euan. m. 1, add. rursus m. 2. 6 **4**] euan. m. 1, repet. m. 2. 9 Ante *ipsi* add. *sibi* m. 2. *compositus*] *-us* in ras. m. 2. 13 *erit*] *est* m. 2. 14 **5**] euan. m. 1, repet. m. 2. 15 Ante *ducere* add. *rectam* m. 2. 17 *contactus*] *con-* supra scr. m. 1, renou. m. 2. 18 *dz*] renou. m. 2. Fig. m. 2, fuit similis m. 1. 23 *proportionem*] *-tionem* e corr. m. 2. 27 **6**] m. 1. 28 *secantem*] in ras. m. 2. 30 *eam que*] supra scr. m. 1. *concurrentis*] dubio comp. in ras. m. 1 *termino —copulata*] in ras. m. 1 seq. ras. 8 litt. 33 *ad*] *ăd*.

Detur circulus *abg*, centrum autem ipsius *k*, et in ipso detur recta minor diametro scilicet *ga*, et proportio, quam habet *z* ad *h*, minor illa, quam habet *gt* ad *kt* katheto ente *kt*. ducatur autem a centro equidistanter ad *ag* que *kn* et ipsi *kg* ad rectos que *gl*. similes itaque sunt trianguli *gtk*, *gkl*. est igitur, ut que *gt* ad *tk*, ita que *kg* ad *gl*. minorem ergo proportionem habet 5 *z* ad *h* quam que *kg* ad *gl*. quam itaque proportionem habet *z* ad *h*, hanc habeat que *kg* ad maiorem ea que *gl*. habeat ad *bn*. iaceat autem que *bn* intermedia periferie et recte per *g*. possibile autem est sic incidere. et cadet extra *gl*, quoniam maior est ea que *gl*. quoniam igitur que *kg* ad *bn* eandem habet proportionem quam *z* ad *h*, et que *eb* ad *bg* eandem habebit propor- 10 tionem quam que *z* ad *h*.

Eisdem datis et ea que in circulo recta educta possibile est a centro 7 adnectere ad eductam, ut intermedia periferie et educte ad coniunctam ab ultimo intercepte ad ultimum educte statutam proportionem habeat, et si data proportio maior sit ea, quam habet medietas in circulo datae ad eam 15 que a centro cathetum ad ipsam ductam.

Data sint eadem, et sit que in circulo linea educta, data autem proportio sit, quam habet *z* ad *h* maior ea, quam habet *gt* ad *tk*. maior igitur erit et ea, quam habet *kg* ad *gl*. quam itaque proportionem habet *z* ad *h*, hanc habebit *kg* ad minorem *gl*. habeat ad *in* nuentem ad *g*. possibile autem est 20 sic secare. et cadet intra *gl*, quoniam minor ea que *gl*. quoniam igitur eandem habet proportionem que *kg* ad *in* quam que *z* ad *h*, et que *ei* ad *ig* eandem habebit proportionem quam *z* ad *h*.

Circulo dato et in circulo linea minore diametro et alia contingente cir- 8 culum apud terminum in circulo date possibile est a centro circuli adnectere 25 quandam rectam ad cóntingentem, ut accepta ab ipsa media inter periferiam circuli et datam in circulo lineam ad acceptam a contingente statutam proportionem habeat, et si data proportio minor sit ea, quam habet medietas in circulo date ad eam que a centro circuli cathetum ad ipsam ductam.

Sit circulus datus *abgd*, et in circulo recta sit data minor diametro que 30

Fig. m. 1, renou. m. 2. 7 *habeat*] (pr.) *habebit* m. 2. 8 *sic inc-*] in ras. m. 2. *incidere*] supra scr. m. 2 *secare*. 9 *gl*] (pr.) in ras. m. 2. In seq. quaedam in ras. m. 1. 12 7] mg. m. 2. *et ea*] in ras. m. 2. 13 Ante *ad* add. *rectam* mg. m. 2. 14 Supra *ultimo* scr. *termino* m. 2. *-ter-*] in ras. *ad*] in ras. Supra *ultimum* scr. *terminum* m. 2. 16 *ad*] *'ad*. *ductam*] *d''uctam*. 17 *data*] *date, e* in ras. m. 2. 18 *igitur*] e corr. 19 *z*] add.'' euan. m. 1. *h*] add.' euan. m. 1. 20 *ad in nuen-*] in ras. m. 2. *-tem* — 22 *h*] mg. m. 2. *et que ei*] renou. m. 2. Fig. m. 1 (pars in ras.). 24 8] m. 2. 24 sq. quaedam renou. m. 2. 26 *contingentem*] in loco pauciorum litt. e corr. m. 2. 27 *ad*] in ras. m. 1. *statutam*] in ras. m. 1. 29 *ad ipsam ductam*] *'ad ipsam ''ductam* (m. 1).

ga, et que *xl* contingat circulum apud *g*, et proportio, quam habet *z* ad *h*, sit minor ea, quam habet *gt* ad *tk*. erit itaque minor et ea, quam habet *gk* ad *gl*, si equidistanter ducta sit *kl* ad *tg*. habeat itaque *kg* ad *gx* eandem proportionem quam *z* ad *h*. maior autem est *xg* ea que est *gl*. describatur
5 circuli periferia circa puncta *klx*. quoniam igitur est maior *xg* ea que *gl*, et ad rectos sunt inuicem *kg*, *xl*, possibile est ei quae est *mg* equalem aliam ponere eam quae est *in* tendentem ad *k*. quod itaque continetur sub *xil* ad id quod sub *ke*, *il* eandem habet proportionem quam *xi* ad *ke*, et quod sub his quae *kin* ad hoc quod sub his quae *ki*, *gl*. quare et quae *in* ad *gl* est
10 ut quae *xi* ad *ke*. quare et quae *gm* ad *gl* et quae *xg* ad *kg* et ad *kb* est, ut quae *xi* ad *ke*, et reliqua scilicet *ig* ad *be* eandem habet proportionem quam quae *xg* ad *gk* et quam *h* ad *z*. cecidit igitur quae *kn* ad contingentem, et habet quae intermedia periferie et recte quae *be* ad acceptam a contingente eandem proportionem quam *z* ad *h*.

9 Eisdem datis et ea quae in circulo data linea educta possibile est a cen-
16 tro circuli connectere ad eductam rectam, ut intermedia periferie et educte ad acceptam a contingente ad tactum statutam proportionem habeat, et si data proportio sit maior ea, quam habet medietas in circulo date ad eam quae a centro cathetum ad ipsam ductam.

20 Datus sit circulus *abgd* et in circulo recta minor diametro *ga* pertrahatur, et contingat circulum quae *xl* apud *g*, et proportio quam habet *z* ad *h* sit maior ea quam habet *gt* ad *tk*. erit itaque maior et ea, quam habet *kg* ad *gl*. habeat igitur quae *kg* ad *gx* eandem proportionem quam *z* ad *h*. minor ergo est ipsa ea quae est *gl*. rursum itaque describatur circulus per *xkl*
25 puncta. quoniam igitur minor est *xg* ea quae est *gl* et ad rectos inuicem sunt *km*, *xl*, possibile est ipsi *gm* equalem ponere eam quae *in* uergentem ad *k*. quoniam igitur quod sub his quae *xil* ad hoc quod sub his quae *il*, *ke* est ut *xi* ad *ke*, sed ei quidem quod sub his quae *xil* equale est id quod sub his quae *kix*, ei autem quod sub his que *nke* equale est quod sub his quae
30 *ki*, *gl*, propterea quod est ut *ke* ad *ik* ita *lg* ad *li*, ergo et ut *xi* ad *ke*, ita quod sub his quae *kin* ad id quod sub his quae *ki*, *gl*, hoc est ut *ni* ad *gl*, hoc est quae *gm* ad *gl*. est autem et ut que *gm* ad *gl*, quae *xg* ad *kg*, hoc est ad *kb*. est ergo ut quae *xi* ad *ke*, quae *xg* ad *kb*. et reliqua que *ig* ad reliquam quae *be* est ut quae *xg* ad *gk*. quam autem proportionem habet
35 quae *xg* ad *gk*, hanc habet *h* ad *z*. connexa est itaque quae *ke* ad eductam,

---

4 *autem*] supra scr. *itaque* m. 2. *est xg*] in ras. m. 1. Seqq. partim renou. m. 2. 5 *xg*] *g* e corr. m. 1. 7 *sub*] in ras. m. 2. 8 *sub*] e corr. m. 2. *sub his*] in ras. m. 2. 9 *sub his*] in ras. m. 2. 14 *eandem*] *-m* in ras. m. 2. 27 *sub his*] in ras. m. 2 ut saepius. 28 *ei—quae*] in ras. 8 litt. m. 2. 32 *est —gm*] add. m. 2.

et intermedia educte et periferie quae est *be* ad *gi* eam quae a contingente accepta est eandem habet proportionem quam *z* ad *h*.

Si linee consequenter ponantur quotcunque equali inuicem excedentes, 10 sit autem excessus equalis minimae, et alie linee ponantur multitudine quidem equales hiis, magnitudine autem quaelibet maximae, tetragona quae ab equa- 5 libus maximae assumentia quod a maxima tetragonum et quod continetur sub minima et equali omnibus equali inuicem excedentibus tripla erunt tetragonis omnibus hiis quae ab excedentibus equali inuicem.

Sint linee quotcunque consequenter posite equali inuicem excedentes quae *a*, *b*, *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t*, que autem *t* sit equalis excessui. adiaceat autem ad *b* 10 equalis ipsi *t* quae *i*, ad *g* autem quae *k* equalis ipsi *h*, ad *d* autem quae *l* equalis ipsi *z*, ad *e* autem quae *m* equalis ipsi *e*, ad *z* autem que *n* equalis ipsi *d*, ad *h* autem quae *x* equalis ipsi *g*, ad *t* autem que *o* equalis ipsi *b*; erunt autem prouenientes equales inuicem et maxime. ostendendum igitur, quod tetragona que ab omnibus et ab *a* et a prouenientibus assumentia quod 15 ab *a* tetragonum et quod continetur sub *t* et equali omnibus hiis quae sunt *a*, *b*, *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t* tripla sunt tetragonorum omnium eorum quae ab hiis quae sunt *a*, *b*, *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t*.

Est itaque quod quidem a *bi* tetragonum equale hiis quae ab *i*, *b* tetragonis et duobus hiis quae sub *i* continentur, quod autem a *kg* equale hiis 20 quae a *k*, *g* tetragonis et duobus hiis quae sub *keg* continentur. similiter itaque et que ab aliis equalibus ipsi *a* tetragona equalia sunt hiis quae a decisionibus tetragonis et duobus hiis quae sub decisionibus continentur. que quidem igitur ab hiis quae sunt *a*, *b*, *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t* et quae ab hiis quae sunt *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *x*, *o* assumentia id quod ab *a* tetragonum dupla sunt eorum quae 25 ab hiis quae sunt *a*, *b*, *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t* tetragonorum. iam autem ostendemus, quod dupla eorum quae continentur sub decisionibus in utraque linea equalium ipsi *a* assumentia, quod continetur sub ea quae est *t* et sub equali omnibus quae sunt *a*, *b*, *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t* equalia sunt hiis quae ab *a*, *b*, *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t*. et quoniam duo quidem quae sub *b*, *i* continentur equalia duobus quae sub 30 *b*, *t* continentur, duo autem quae sub hiis quae *n*, *g* equalia ei quod continetur sub ea quae est *t* et a quadrupla ipsius *g*, propterea quod *k* sit dupla ipsius *t*, duo autem quae sub *d*, *l* equalia ei quod sub *t* et sub sextupla ipsius *d*, propterea quod *l* sit tripla ipsius *t*. similiter autem et alia dupla, quae continentur sub decisionibus, equalia sunt contento sub *t* et sub multiplici 35

---

2 *accepta*] *excepta* m. 2. 5 Ante *quaelibet* del *singula* m. 1. 6 *sub*] in ras. m. 2. 11 *autem*] *a'*. 16 *sub*] in ras. m. 2 ut alibi fere. 19 *i*, *b*] in ras. m. 2. 20 *kg*] *k* incertum (e corr. m. 2?). 21 *k*] in ras. m. 2. 27 *utraque*] *unaquaque* mg. m. 2. 28 *sub*] m. 2, *ab* m. 1, ut semper fere. 30 *et*] e corr. m. 2. 33 *d*, *l*] in ras. m. 2. 35 *sub*] m. 2, *a* m. 1 ut saepius.

semper sequentis lineae secundum eos qui deinceps numeros pares. omnia igitur assumentia, quod continetur sub *t* et equali omnibus hiis quae sunt *a*, *b*, *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t* erunt equalia ei, quod continetur sub *t* et equali omnibus ipsi *a* et triple ipsius *b* et quincuple ipsius *g* et semper impari secundum eos
5 qui deinceps numeros impares multiplices sequentis linee. sunt autem et quae ab *a*, *b*, *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t* tetragona equalia ei quod continetur sub eisdem lineis; est enim quod ab *a* tetragonum equale ei quod continetur sub *t* et equali omnibus ipsi scilicet *a* et equali reliquis, quarum unaquaeque equalis ipsi *a*. tocies enim mensurat ipsa *t* ipsam *a* et *a* equales sibi omnes in *a*. quare
10 equale est quod ab *a* tetragonum ei, quod continetur a *t* et equali ipsi *d* et duple eorum, quae sunt *a*, *b*, *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t*. que enim equales ipsi *a* omnes excepta ipsa *a* duple sunt earum, quae sunt *b*, *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t*. similiter autem et quod a *b* tetragonum equale est ei quod continetur sub *t* et equali ipsi *b* et duple earum que sunt *g*, *d*, *e*, *z*, *h*, *t* et rursum quod a *g* tetragonum equale
15 est ei quod sub *t* et equali ipsi *g* et duple earum quae sunt *d*, *e*, *z*, *h*, *t*. similiter autem et quae ab aliis tetragona equalia sunt his quae continentur sub *t* et equali ipsi et duple reliquarum. palam igitur, quod quae ab omnibus tetragona equalia sunt ei quod continetur sub *t* et equali omnibus ipsi que *a* et triple ipsius *b* et quincuple ipius *g* et ei que secundum consequentes nume-
20 ros impares multiplici sequentis.

Ex hoc igitur manifestum, quod tetragona omnia, quae sunt ab equalibus maxime, tetragonis quidem, quae sunt ab excedentibus equali inuicem, minora sunt quam tripla, quoniam assumentia quaedam tripla sunt, reliquarum autem excepto eo quod a maxima tetragono maiora quam tripla, quoniam assumpta
25 minora sunt quam tripla eius quod a maxima tetragoni. igitur et si similes species describantur ab omnibus ab excedentibus equali inuicem et ab equalibus maximae, specierum quidem quae ab excedentibus equali inuicem minora erunt quam tripla, reliquarum autem excepta specie que a maxima maiora quam tripla; eandem enim habebunt proportionem similes species tetragonis.

11 Si linee consequenter ponantur quotcunque equali inuicem excedentes, et
31 alie linee ponantur multitudine quidem una pauciores excedentibus equali inuicem, magnitudine autem quaelibet aequalis maximae, tetragona omnia quae ab equalibus maxime ad tetragona quidem quae ab excedentibus equali inuicem excepta minima minorem proportionem habent quam tetragonum quod
35 a maxima ad equale ambobus ei scilicet quod continetur a maxima et minima et tercie parti tetragoni qui ab excessu, quo excedit maxima minimam, ad

---

1 *sequentis lineae*] corr. ex *sequens linea* m. 2. 9 *tocies*] *equaliter* mg. m. 2. *in a*] del. m. 2. 12 Ante *b* ras. 1 litt. 15 *d*] add. m. 2. 20 *sequentis*] e corr. m. 2.

tetragona autem quae ab excedentibus equali inuicem excepto tetragono quod a maxima maiorem eadem proportione.

Sint enim linee quotcunque equali inuicem excedentes constanter positae, quae quidem ab ipsi gd, que autem gd ipsi ez, que autem ez ipsi ht, que autem ht ipsi ik, que autem ik ipsi lm, que autem lm ipsi nx. adiaceat autem ad gd quidem equalis uno excessu quae go, ad eam autem quae ez equalis duobus excessibus quae ep, ad ht autem equalis tribus excessibus quae hr et ad alias eodem modo; erunt itaque, quae proueniunt, equales inuicem et quaelibet maxime. ostendendum igitur, quod quae ab omnibus prouenientibus tetragona ad omnia quidem tetragona quae ab omnibus excedentibus equali inuicem excepto eo quod ab nx tetragono minorem habet proportionem, quam quod ab ab tetragonum ad equale ambobus, ei scilicet quod continetur ab ab, nx et tercie parti eius quod ab ny tetragono, ad tetragona autem quae ab eisdem sine eo quod ab ab tetragono maiorem proportionem habet eadem proportione. accipiatur a qualibet excedentium equali inuicem equalis excessui. quam itaque proportionem habet quod ab ab ad simul utrumque quod scilicet ab hiis quae sunt ab, fb continetur et ad terciam partem eius quod ab af tetragoni, hanc habet proportionem quod ab od tetragonum ad id quod continetur ab hiis quae sunt od, dq et ad terciam partem eius quod a qo tetragoni, et tetragonum quod est ab ea quae est pz ad id quod continetur ab hiis quae sunt pz, cz et ad terciam partem eius quod ab cp tetragoni, et quae ab aliis tetragona ad similiter accepta spatia; et omnia itaque quae ab omnibus hiis quae sunt od, pz, rt, sk, zm, yx ad omnia quae continentur ab nx et ab equali omnibus dictis lineis et ad tertias partes tetragonorum que sunt ab hiis quae sunt oq, pc, ru, sϡ, zϙ, yn eandem habebunt proportionem quam quod ab ab tetragonum ad simul utrumque quod scilicet continetur ab hiis quae sunt ab, fb et ad tertiam partem eius quod ab fa tetragoni. si igitur ostensum sit, quod continetur ab nx et ab equali omnibus hiis quae sunt od, pz, xt, sk, tm, yx et tertias partes tetragonorum, que producuntur ab hiis quae sunt oq, pc, $r\omega$, sϡ, zϙ, yn tetragonis productis ab hiis quae sunt ab, gd, ez, ht, ik, lm minora, tetragonis autem productis ab hiis quae sunt gd, ez, ht, ik, lm, nx maiora, ostensum erit propositum.

Est itaque quod continetur ab nx et equali omnibus hiis quae sunt od, pz, rt, sk, zm, yn et tertie partes tetragonorum qui ab hiis quae sunt oq, pc, $r\omega$, sϡ, zϙ, yn equalia tetragonis hiis quae a qd, cz, $\omega\tau$, ϡk, ϙm, nx et ei quod continetur ab ea quae est nx et equali omnibus hiis quae sunt oq, pc, $r\omega$, sϡ, zϙ, yn et tercie parti tetragonorum qui ab hiis quae sunt oq,

---

6 *ez*] corr. ex *ex* m. 1. 11 Ante *habet* del. *rationem* m. 1. 29 *xt*] *rt*? *tm*] *zm*? 34 *tertie*] alt. *e* e corr. m. 2.

pc, *r*ω, *s*ϡ, *z*ϙ, *yn*. que autem ab hiis quae sunt *ab*, *gd*, *ez*, *ht*, *ik*, *lm* tetragona equalia sunt hiis quae a *bf*, *qd*, *cz*, ωτ, ϡ*k*, ϙ*m* tetragonis et hiis quae ab *af*, *gq*, *ec*, *h*ω, *i*ϡ, *l*ϙ et ei quod continetur a *bf* et a dupla earum quae sunt *af*, *gq*, *ec*, *n*ω, *i*ϡ, *l*ϙ. communia quidem igitur sunt utrocunque tetragona quae ab equalibus ei quae est *nx*. quod autem continetur ab ea quae est *nx* et equali hiis quae sunt *oq*, *pc*, ω*r*, ϡ*s*, ϙ*z*, *yn* minus est eo quod continetur ab ea quae est *bf* et a dupla earum quae sunt *af*, *gq*, *ec*, *h*ω, *i*ϡ, *l*ϙ, propterea quod nunc dicte linee hiis quidem quae sunt *go*, *ep*, *rh*, *is*, *lz*, *yn* sint equales, reliquis autem maiores. et tetragona autem quae ab hiis quae sunt *af*, *gq*, *ec*, *ha*, *i*ϡ, *lq*. ostensum est enim hoc in superioribus. minora ergo sunt dicta spatia tetragonis hiis quae ab *ab*, *gd*, *ez*, *ht*, *ik*, *lm*. de cetero autem ostendemus, quod maiora sunt tetragonis quae ab hiis quae sunt *gd*, *ez*, *ht*, *ik*, *lm*, *nx*. rursum itaque tetragona quae ab hiis quae sunt *gd*, *ez*, *ht*, *ik*, *lm*, *nx* equalia sunt hiis quae a *qg*, *ec*, *h*ω, *i*ϡ, *l*ϙ et ei quod continetur ab *nx* et a dupla omnium que *gq*, *ec*, *h*ω, *i*ϡ, *l*ϙ. et sunt communia quidem quae ab hiis quae sunt *qd*, *cz*, ωτ, ϡ*k*, *m*ϙ, *nx*, maius autem quod ab ea quae est *nx* et a dupla omnium quae sunt *gq*, *ec*, *h*ω, *i*ϡ, *l*ϙ. sunt autem et tetragona quae ab hiis quae sunt *qo*, *cp*, ω*r*, ϡ*s*, ϙ*z*, *yn* hiis quae sunt a *gq*, *ec*, *h*ω, *i*ϡ, *l*ϙ maiora quam tripla. ostensum est enim et hoc. maiora ergo sunt dicta spatia tetragonis hiis quae a *gd*, *ez*, *ht*, *ik*, *lm*, *nx*.

Et si igitur similia describantur ab omnibus ab excedentibus equali inuicem et ab equalibus maxime, species omnes quae ab excedentibus equali inuicem praeter eam que a minima speciem minorem proportionem habebunt quam tetragonum quod a maxima ad equale ambobus ei scilicet, quod continetur a maxima et minima, et tertie parti eius quod ab excessu, quo excedit maxima minimam, ad species autem quae ab eisdem sine eo quod a maxima maiorem eadem proportione; eandem enim habebunt proportionem similes species tetragonis.

Si recta affigatur linea in plano manente altero termino ipsius equeuelociter circumducta quotiescunque restituitur iterum, unde incepit, simul autem cum linea circumducta feratur aliquod signum equeuelociter ipsum sibi ipsi per rectam incipiens a manente termino, signum elicem uel reuolutionem describet in plano. uocetur igitur terminus quidem recte manens ipsius circumducte principium elicis uel reuolutionis, positio autem linee, a qua incepit recta circumferri, principium circulationis rectum. siquidem in prima circulatione perambulet signum, quod per rectam fertur, prima uocetur, si autem

---

8 *hiis*] *hiis* $\bar{q}$. 14 Ante *ec* del. *e* m. 1. 15 *que*] $\bar{q}$ $\bar{q}$. 32 *per*] bis; corr. m. 2. *elicem*] *helicem*, *m* eras., m. 2. *uel*] eras. Supra *reuolutionem* add. *uolutam* m. 2. 34 *helicis* m. 2, ut fere semper. *uel*] comp. scr.

in secunda circulatione idem signum perambulet, secunda. et alie similiter hiis equiuoce circulationibus uocate sint. spatium autem comprehensum ab elice descripta in prima circulatione et a recta, quae est prima, primum uocetur, comprehensum autem ab elice descripta in secunda circulatione et a recta secunda secundum uocetur, et alia deinceps sic uocentur. et si a signo, quod 5 est principium elicis, ducatur aliqua recta linea recte eius ad eadem circulatio fuerit, praecedens uocetur, quae autem ad alteram partem sequens. descriptusque circulus centro quidem signo, quod est principium elicis, distantia autem recta, quae est prima, primus uocetur, descriptus autem centro quidem eodem, distantia autem dupla recta, secundus uocetur, et alii nunc consequenter hiis 10 eodem modo.

Si ad elicem una quidem circulatione qualicunque descripta a principio **12** elicis recte incidant quotcunque equales facientes angulos ad inuicem, equali excedunt inuicem.

Sit elix in qua quae *ab*, *ag*, *ad*, *ae*, *az* equales angulos facientes ad 15 inuicem. ostendendum, quod equali excedit quae *ag* eam quae *ab* et quae *ad* eam quae *ag* et alie similiter. in quo enim tempore linea, quae circumducitur, ab *ab* ad *ag* pertingit, in hoc tempore signum, quod per rectam fertur, excessum perambulat, quo excedit quae *ag* eam quae *ab*, in quo autem tempore ab *ag* ad *ad*, in hoc perambulat excessum, quo excedit quae *ad* eam 20 quae *ag*. in equali autem tempore linea, quae circumducitur, ab ea quae est *ab* ad eam quae est *ag* pertingit et ab *ag* ad *ad*, quoniam anguli equales sunt. in equali ergo tempore signum, quod per rectam fertur, perambulat excessum, quo excedit quae *gd* eam quae *ab*, et excessum, quo excedit quae *ad* eam quae *ag*. equali ergo excedit quae *ag* eam quae *ab* et quae *ad* eam 25 quae *ag* et relique.

Si recta linea elicem contingat, secundum unum solum signum contingit. **13**

Sit elix, in qua quae *a*, *b*, *g*, *d*, sit autem principium quidem elicis *a* punctum, principium autem circulationis quae *ad* recta, et contingat elicem recta aliqua *ze*. dico itaque secundum unum solum punctum contingere ipsam. 30 contingat enim, si possibile est, secundum duo puncta, quae sint *g*, *h*, et coniungantur quae *ag*, *ah*, et in duo diuidatur angulus, qui continetur ab *ah*, *ag*, punctum autem, secundum quod, quae in duo diuidit angulum, elici incidit, sit *t*; equali itaque excedit quae *ah* eam quae *at* et quae *at* eam quae *ag*, quoniam equales angulos continent ad inuicem. quare duple sunt quae 35 *ah*, *ag* ea quae est *at*. sed eius quae in trigono *at* in duo scindentis angulum

2 Post *autem* del. *con.* 6 Ante *recte* add. *et* m. 2. *eius*] comp. incerto. 7 Post *quae* del. *ad* m. 2. 12 **12**] m. 2. 13 Post *equali* litt. aliquot euan. 24 *gd*] m. 1, *ag* m. 2. 27 **13**] om. 36 Post *duo* del. *incidentis* (supra *in* scr. *s*) m. 1.

maiores sunt quam duple. palam igitur, quod, secundum quod concidit punctum ad *gh* rectam quae *at*, est intermedia punctorum *t*, *a*. secat ergo *ez* reuolutionem, quoniam aliquod punctorum, quae sunt in *gth*, est intra reuolutionem. supponebatur autem contingens. secundum unum ergo solum contingit quae 5 *ez* reuolutionem seu elicem.

14 Si ad elicem in prima circulatione descriptam incidant due recte a puncto, quod est principium reuolutionis, et educantur ad primi circuli periferiam, eandem proportionem habebunt quae ad reuolutionem incidunt ad inuicem, quam periferie circuli intermedie ultimi reuolutionis et ultimorum eductarum 10 rectarum ad periferiam prouenientium ad praecedentia acceptis periferiis ab ultimo reuolutionis.

Sit elix que *abgdet* in prima circulatione descripta, principium autem reuolutionis quidem sit signum *a*, que autem *ta* recta sit principium circulationis, et circulus *tkh* sit primus. protrahantur autem ab *a* signo ad reuo- 15 lutionem quae *ae*, *ad* et educantur ad circuli periferiam ad *z*, *h*. ostendendum, quod eandem habent proportionem que *ae* ad *ad*, quam quae *tkz* periferia ad *tkh* periferiam. circumducta enim *at* linea palam, quod *t* quidem signum per periferiam circuli *tkh* delatum est equeuelociter, *a* autem delatum per rectam *at* lineam perambulat, et *t* signum per circuli periferiam delatum per- 20 ambulat periferiam *tkz*, *a* autem *ae* rectam, et rursum *a* signum *ad* lineam et *t* periferiam *tkh*, utrumque equeuelociter quoniam sibi ipsi delatum. palam igitur, quod eandem proportionem habent quae *ae* ad *ad* quam quae *tkz* periferia ad *tkh* periferiam; ostensum enim est hoc in primis. similiter autem ostendetur, et si altera incidentium ad terminum reuolutionis incidat.

15 Si ad descriptam in secunda circulatione reuolutionem producantur recte 26 a principio reuolutionis, eandem habebunt proportionem recte ad inuicem quam dicte periferie cum tota quae accipitur circuli periferia.

Sit reuolutio in qua quae *abgdt*, quae quidem *abgdt* in prima circulatione descripta, quae autem *tlem* in secunda, et producantur rectae quae 30 *ae*, *al*. ostendendum, quod eandem habent proportionem quae *al* ad *ae* quam quae *tkz* periferia cum tota circuli periferia ad *tkh* cum tota circuli periferia. in equali enim tempore *a* signum per rectam delatum lineam *al* perambulat et *t* signum per circuli periferiam delatum totam circuli periferiam et adhuc periferiam *tkz* perambulat, et iterum *a* signum *ae* secundum 35 *e* totam circuli periferiam et adhuc eam, quae est *tkh*, utrumque equeuelociter ipsum sibi delatum. palam igitur, quod eandem habent proportionem *al* linea ad lineam *ae* quam *tkz* periferia cum tota circuli periferia ad peri-

---

2 *secat*] in ras. m. 2. 4 *supponebatur*] *-eba-* incerta. 6 **14**] m. 1, ut deinceps. 34 Ante prius *et* del. 2 litt. m. 1. 36 *ipsum*] bis, corr. m. 1.

feriam *tkh* cum tota circuli periferia. eodem autem modo ostenditur, et si ad reuolutionem in tercia circulatione descriptam adducitur recte, eandem proportionem habebunt ad inuicem quam dicte periferie cum tota circuli periferia bis accepta. similiter autem et, quae ad alias reuolutiones adducuntur, ostenduntur quod eandem habent proportionem quam dicta periferia 5 cum tota circuli periferia tociens accepta, quotus est uno minor numerus periferiarum, et si quae adducitur utraque ad terminum reuolutionis cadat.

Si reuolutionem in prima circulatione descriptam recta linea contingat, 16 et a contactu recta linea copuletur ad signum, quod est principium reuolutionis, anguli, quos facit contingens ad copulatam, inequales erunt, et qui 10 quidem in praecedentibus hebes, qui autem in sequentibus acutus.

Sit reuolutio, in qua *a*, *b*, *g*, *d*, *t* in prima circulatione descripta, et sit *a* quidem signum principium reuolutionis, que autem *at* recta principium circulationis, primusque circulus *tkh*, contingat autem aliqua recta linea reuolutionem quae *dez* secundum *d*, et a *d* ad *a* copuletur que *da*. ostendendum, 15 quod quae *dz* ad *ad* hebetem facit angulum. describatur circulus *dcn* centro quidem *a*, distantia autem *ad*. necesse itaque huius circuli eam quidem quae in praecedentibus periferiam cadere intra reuolutionem, eam autem quae in sequentibus extra, propterea quod rectarum productarum ab *a* ad reuolutionem quae quidem in praecedentibus maiores sint ipsa *ad*, que autem in 20 sequentibus minores. quod quidem igitur angulus, qui continetur ab *adz*, non sit acutus, palam, quoniam maior est quam qui semicirculi; quod autem non sit rectus, ostendendum sic. sit enim, si possibile est, rectus. que ergo *edz* contingit circulum *dcn*. possibile itaque est ab *a* ducere rectam ad contingentem, ut recta intermedia contingentis et periferie circuli ad eam quae 25 ex centro circuli minorem proportionem habeat ea, quam habet intermedia contactus et concidentis periferia ad datam periferiam. concidat itaque quae *ai*. scindit itaque ipsa reuolutionem quidem apud *t*, periferiam autem *dnc* circuli apud *r*, et habeat *ri* recta ad *ar* minorem proportionem ea, quam habet *dr* periferia ad *dnc* periferiam. et tota ergo *ia* ad *ar* minorem proportionem 30 habet quam quae *rdnc* periferia ad *dnc* periferiam, hoc est quam habet *shkt* periferia ad *kt* periferiam. quam autem habet *shkt* periferia ad *hkt* periferiam, hanc habet quae *al* recta ad *ad*; ostensum enim est hoc. minorem ergo proportionem habet quae *ai* ad *ar*, quam quae *la* ad *ad*; quod quidem est impossibile. non ergo est rectus, qui continetur ab *adz*; osten- 35 sum est autem, quod nec acutus; obtusus ergo est. quare reliquus acutus est. similiter demonstrabitur, et si contingens reuolutionem apud terminum contingat, idem accidet.

---

1 *ostenditur*] *-itur* in ras. m. 2. *et si*] in ras. m. 2. 27 *periferia*] *periferiā*, *ā* in ras. m. 2. 34 *ai*] seq. ras., *ai* mg. m. 1.

17 Et igitur, si reuolutionem in secunda circulatione descriptam contingat recta, idem accidat.

Contingat enim quae *ez* recta descriptam in secunda circulatione reuolutionem apud *d*, et alia eadem prioribus disponantur. similiter itaque peri-
5 ferie circuli *rnd* quae quidem in praecedentibus reuolutionis intra cadent, quae autem in sequentibus extra. angulus igitur qui sub *adz* non est rectus, sed obtusus. sit enim, si possibile est, rectus. continget itaque *ez* circulum *rnd* apud *d*. ducatur itaque rursum ad contingentem quae *ai* et secet reuolutionem quidem apud *q*, periferiam autem circuli *rnd* apud *r*, habeat
10 autem *ri* ad *ra* minorem proportionem quam ea, quam habet *dr* periferia ad totam periferiam circuli *drn* et ad eam quae *dnc*; ostensum est enim hoc possibile ens. et tota ergo *ia* ad *ar* minorem proportionem habet quam quae *rdnc* periferia cum tota circuli periferia ad periferiam *dnc* cum tota circuli periferia. sed quam habet proportionem quae *rdnc* periferia cum tota peri-
15 feria circuli *dncr* ad periferiam *dnc* cum tota periferia circuli *dncr*, hanc habet proportionem quae *shkt* periferia cum tota circuli periferia scilicet *tshk* ad periferiam *hkt* cum tota periferia circuli *tshk*. quam autem proportionem habent posterius dicte periferie, hanc habet proportionem quae *qa* recta ad *ad* rectam; ostensum enim est hoc. minorem ergo proportionem
20 habet quae *ia* ad *ar* quam *aq* ad *ad*; quod quidem est impossibile; equalis quidem enim quae *ra* ei quae *ad*, maior autem quae *ia* ea quae *aq*. palam igitur, quod obtusus est qui continetur ab *adz*, quia reliquus acutus est. eadem autem accident, et si contingens apud terminum reuolutionis contingat.

Similiter autem ostendetur, et si reuolutionem descriptam in qualicunque
25 circulatione contingat aliqua recta, et si apud terminum ipsius, quod inequales facient angulos ad copulatam a contacto ad principium reuolutionis, et eum quidem qui in praecedentibus obtusum, eum autem qui in sequentibus acutum.

18 Si reuolutionem in prima circulatione descriptam recta linea contingat
30 apud terminum reuolutionis, a signo autem, quod est principium reuolutionis, ad rectos angulos principio circulationis ducta concidet cum contingente, et recta intermedia contingentis et principii reuolutionis equalis erit periferie circuli primi.

Sit reuolutio quae *abgdt*, sit autem *a* signum principium reuolutionis,
35 quae autem *ta* linea principium circulationis, porro *tkh* circulus primus, contingat autem aliqua reuolutionem apud *t* que *tz*, et ab *a* ducatur ad rectos angulos ipsi *ta* que *az*. concidet itaque ipsa ad eam quae *tz*, quoniam quae

---

3 *ez*] *e* in ras. m. 2. 31 *ducatur aliqua* mg. m. 1. 35 *tkh*] *kh* in ras. m. 2, mg. m. 1: *tkh*.

zt, *ta* acutum angulum continent. concidant autem apud *z*. ostendendum, quod *za* equalis est periferie circuli *tkh*. si enim non, aut maior est aut minor. sit prius, si possibile est, maior. accipiam itaque aliquam rectam *la* ea quidem quae est *za* recta minorem, periferia autem circuli *tkh* maiorem. est itaque circulus quidam qui *thk*, et in circulo linea minor diametro 5 quae *th*, et proportio quam habet quae *ta* ad *al* maior ea, quam habet medietas ipsius *ht* ad eam quae ab *a* cathetum ad ipsam ductam, propterea quod et ipsa, quam habet quae *ta* ad *az*. possibile igitur est ab *a* producere ad eductam eam quae *an*, ut intermedia periferie et extraducte, quae est *nr*, ad *tr* eandem habeat proportionem, quam habet quae *ta* ad *al*. habebit 10 igitur quae *nr* ad *ra* proportionem, quam habet quae *tr* recta ad *al*. que autem *tr* ad *al* minorem proportionem habet quam quae *tr* periferia ad periferiam circuli *th*. que quidem enim *tr* recta minor est *tr* periferia, que autem *al* recta periferia circuli *thk* maior. minorem ergo proportionem habebit et quae *nr* ad *ra* quam quae *tr* periferia ad periferiam circuli *thk*. et 15 tota igitur *na* ad *ar* minorem proportionem habet quam quae *tr* periferia cum tota periferia circuli ad periferiam circuli *thk* quam autem proportionem habet *tr* periferia cum tota periferia circuli *thk* ad periferiam circuli *thk*, hanc habet quae *qa* ad *at*; ostensum enim est hoc. minorem ergo proportionem habet quae *na* ad *ar* quam quae *qa* ad *at*; quod quidem est im- 20 possibile. que quidem enim *na* maior est ea quae *aq*, que autem *ar* equalis est ipsi *ta*. non ergo maior est quam *za* periferia circuli *thk*. sit itaque rursum, si possibile est, minor quae *za* periferia circuli *thk*. accipiam itaque quandam rectam iterum eam quae *ai* ea quidem quae *az* maiorem, periferia autem circuli *thk* minorem, et ducam a *t* *tm* equidistantem ipsi *az*. rursum 25 igitur circulus est qui *thk* et in ipso linea minor diametro, quae est *th*, et alia contingens circulum apud *t*, et proportio quam habet quae *at* ad *al* minor ea, quam habet medietas ipsius *ht* ad cathetum ab *a* ad ipsam ductam, quoniam et ipsa, quam habet quae *ta* ad *az* minor est. possibile igitur est ab *a* producere eam quae *ap* ad contingentem, ut *rn* intermedia eius quae 30 in circulo recte et periferie ad eam quae *tp* acceptam a contingente hanc habeat proportionem, quam habet quae *ta* ad *al*. secat itaque quae *ap* circulum quidem apud *r*, reuolutionem autem apud *q*, et habebit etiam permutatim eandem proportionem quae *nr* ad *ra*, quam habet quae *tp* ad *al*. que

4 Post *za* del. *minorem* m. 1. *tkh*] *kh* in ras. m. 2. 5 *thk*] *tkh* m. 2. 8 *ipsa*] in ras. 2 litt. m. 2. in figura litt. *l*, *h*, *q* et rectae *tr*, *tq* m. 2. ubi *al* circulum secat, littera erasa est. 15 *thk*] *tkh* m. 2; item lin. 17, 18, 19, 22. 21 Ante *na* del. *n* m. 1. 22 Post *itaque* del. *si* m. 1. 28 Ante *ab* del. *ad* m. 1. 29 *ipsa*] in ras. 2 litt. m. 2. *minor est*] del. m. 2. 34 Ante *ra* del. *a* m. 1.

autem *tp* ad *al* maiorem proportionem habet quam quae *tr* periferia ad periferiam circuli *thk*. que quidem enim *tp* recta maior est periferia *tr*, que autem *al* minor periferia circuli *thk*. maiorem ergo proportionem habet quae *nr* ad *ar* quam quae *tr* periferia ad periferiam circuli *thk*. quare et
5 quae *ra* ad *an* maiorem proportionem habet quam periferia circuli *thk* ad periferiam *tkr*. quam autem proportionem habet periferia circuli *thk* ad periferiam *tkr*, hanc habet quae *ta* recta ad *aq*; ostensum est enim hoc. maiorem ergo proportionem habet quae *ra* ad *an* quam quae *ta* ad *aq*; quod quidem impossibile. non ergo maior est nec minor quam *za* periferia circuli
10 *thk*. equalis ergo.

19 Si reuolutionem in secunda circulatione descriptam apud terminum contingat recta, et a principio reuolutionis ducatur aliqua ad rectos angulos principio circulationis, concidet ipsa ad contingentem, et erit recta intermedia contingentis et principii reuolutionis dupla periferie circuli secundi.

15 Sit enim quae quidem *abgt* reuolutio in prima circulatione descripta, que autem *tec* in secunda, et circulus quidem *tkh* primus, qui autem *tmn* secundus. sit autem quaedam linea contingens reuolutionem apud *c* quae *tz*, que autem *za* ducatur ad rectos angulos ipsi *ca*. concidet autem ipsi *cz*, quia ostensum est angulum, qui continetur ab *acz*, acutum esse. ostenden-
20 dum, quod *za* recta dupla est periferie circuli *cmn*. si enim non est dupla, aut maior est quam dupla aut minor est quam dupla. sit prius, si possibile est, maior quam dupla. et accipiatur quaedam recta quae *la* minor quidem quam *za*, maior autem quam dupla periferie circuli *cmn*. est itaque quidam circulus qui *cmn* et in circulo descripta minor diametro, quae est *cn*, et
25 proportio, quam habet quae *ca* ad *al*, est maior ea quam habet medietas ipsius *cn* ad cathetum ab *a* ductam ad ipsam. possibile igitur est ab *a* lineam *as* producere ad lineam *cn* eductam, ut intermedia periferie et educte, quae est *rs*, ad *cr* eandem habeat proportionem quam quae *ca* ad *al*. secat itaque quae *as* circulum quidem apud *r*, reuolutionem autem apud *q*. et
30 permutatim eandem habebit proportionem quae *rs* ad *ca* quam quae *cr* ad *al*. que autem *cr* ad *al* minorem proportionem habet quam quae *cr* periferia ad duplam periferiam circuli *cmn*; est enim quae quidem *cr* recta minor quam periferia *cr*, que autem *al* recta maior quam dupla periferie circuli *cmn*. minorem ergo proportionem habet quae *rs* ad *ar* quam quae *cr* peri-
35 feria ad duplam periferie circuli *cmn*. tota igitur *sa* ad *ar* minorem proportionem habet quam quae *cr* periferia cum periferia circuli *cmn* bis dicta ad periferiam circuli *cmn* bis dictam. quam autem proportionem habent dicte

---

6 Mg. m. 1: *scilicet tota.* *thk*] *hk* in ras. m. 2. 18 Ante *cz* del. *t* m. 1. 32 *cmn*] corr. ex *mn* m. 2. *quae quidem*] bis; corr. m. 2.

periferie, hanc habet proportionem quae *qa* ad *ac*; ostensum est enim hoc. minorem ergo proportionem habet quae *as* ad *ar* quam quae *qa* ad *ca*; quod quidem est impossibile. non ergo *za* recta maior est quam dupla periferie circuli *cmn*. similiter autem ostendetur, quod nec minor quam dupla. palam igitur quod dupla est. per eundem autem modum ostendendum, et si reuo- 5 lutionem in qualicunque circulatione descriptam contingat aliqua recta apud terminum reuolutionis, et a principio reuolutionis ducta ad rectos angulos principio circulationis concidit ad contingentem, multiplex est periferie circuli qui dicitur secundum numerum circulationis eodem numero.

Si reuolutionem in prima circulatione descriptam recta linea contingat 20 non apud terminum reuolutionis, a contactu autem ad principium reuolutionis 11 recta copuletur, et centro quidem principio reuolutionis, distantia autem copulata circulus describatur, a principio autem reuolutionis ducatur aliqua ad rectos angulos copulate a contactu ad principium reuolutionis, concidet ipsa ad contingentem, et erit recta quae intermedia concidentis et principii 15 reuolutionis equalis periferie descripti circuli intermedie contactus et sectionis, secundum quam secat descriptus circulus principium circulationis, ad praecedentia accepta periferia a signo eo, quod est in principio circulationis.

Sit reuolutio, in qua que *abgd* in prima circulatione descripta, et contingat ipsam quaedam recta quae *edz* apud *d*, a *d* autem ad principium reuo- 20 lutionis copuletur quae *da*, et centro quidem *a*, distantia autem ea quae *da* circulus describatur qui *dmn*. secet autem iste principium circulationis apud *k*, ducatur autem quae *za* ad *da* orthogonaliter. quod quidem igitur ipsi concidit, palam. quod autem et equalis sit quae *za* recta ipsi *kmnd* periferie, demonstrandum. si enim non, aut maior est aut minor. sit, si est possibile, 25 prius maior. accipiatur autem aliqua quae *la* minor quidem quam *za* recta, maior autem quam periferia *kmnd*. rursum itaque circulus est qui *kmn*, et in circulo linea minor diametro quae *dn*, et proportio, quam habet *da* ad *al*; maior est ea, quam habet medietas *dn* ad cathetum ductam ab *a* ad ipsam. possibile igitur est ab *a* educere lineam *ae* ad lineam *nd* eductam, ita ut 30 linea *er* ad lineam *dr* eandem proportionem habeat quam quae *da* ad *al*; ostensum est enim hoc possibile esse. habebit igitur et *er* ad *ar* eandem proportionem quam quae *dr* ad *al*. que autem *dr* ad *al* minorem proportionem habet quam quae *dr* periferia ad periferiam *kmd*, quoniam quae quidem *dr* recta minor est quam periferia *dr*, que autem *al* maior est periferia *kmd*. 35 minorem igitur proportionem habet quae *er* recta ad *ra* quam quae *dr* peri-

---

In figura recta *cr* et litt. *k* a m. 2 sunt. 19 *circulatione*] m. 2. 28 Ante *linea* del. *minor* m. 1. 32 Mg. *quia ar est equalis ad* m. 2. 33 *dr*] (alt.) *d* m. 2.

feria ad periferiam *kmd*. quare et quae *ae* ad *ar* minorem proportionem habet quam periferia *dr* cum *kmd* periferia ad periferiam *kmd*. quam autem proportionem habet que *kmr* ad periferiam *kmd*, hanc habet quae *qa* ad *ad*. minorem ergo proportionem habet quae *ea* ad *ar* quam *aq* ad *da*; quod
5 quidem est impossibile. non ergo est *za* maior quam periferia *kmd*. similiter autem prioribus demonstrabitur, quod nec minor est. equalis ergo. per eundem autem modum demonstrabitur, et si reuolutionem in secunda circulatione descriptam contingat recta non apud terminum reuolutionis, alia autem eadem disponantur, quod recta intermedia concidentis ad contingentem
10 et principium reuolutionis equalis est toti periferie circuli descripti et adhuc intermedie dictorum signorum eodem modo accepta periferia. et si reuolutionem in qualicunque circulatione descriptam contingat aliqua recta non apud terminum reuolutionis, et alia eadem disponantur, quod recta intermedia dictorum signorum multiplex quaedam est periferie descripti circuli secundum
15 numerum minorem eo, secundum quem circulationes dicuntur, et adhuc equalis intermedie dictorum signorum similiter accepta periferia.

21 Accipienti spatium, quod continetur a reuolutione in prima circulatione descripta et a recta prima in principio circulationis, possibile est circa ipsum figuram planam circumscribere et aliam inscribere ex similibus sectoribus
20 compositam, ut circumscripta sit maior quam inscripta in minori quam omne praepositum spatium.

Sit reuolutio in qua *abgd* in prima circulatione descripta, sit autem principium quidem reuolutionis *t* signum, principium autem circulationis que *ta*, primus autem circulus *zhia*, que autem *ah*, *zi* diametri ipsius ad rectos
25 angulos inuicem. semper itaque recto angulo in duo secto et sectore rectum angulum continente erit reliquum sectoris minus praeposito. et sit productus sector qui *atk* minor praeposito spatio. diuidantur itaque anguli quatuor recti in equales angulos, qui continentur a lineis *at*, *tk*, et recte facientes angulos equales per reuolutionem ducantur. signum itaque, secundum quod
30 secat quae *tk* reuolutionem, sit *l*, et centro quidem *t*, distantia autem *tl* circulus describatur. cadet itaque ipsius quae quidem ad praecedentia periferia intra reuolutionem, que autem ad sequentia extra. describatur itaque periferia et concidet ipsi *ta* apud *o* que *om* et ei que post rectam *tk* per reuolutionem perducte. rursum itaque et signum, apud quod secat reuolutionem
35 quae *tm*, sit *n*, et centro quidem *t*, distantia autem *tn* circulus describatur, et concidet periferia circuli et ei quae post *tm* perducte per reuolutionem.

---

2 *periferia dr cum*] mg. m. 2. *kmd*] *d* e corr. m. 2. Fig. m. 2. 19 *sector-*] in ras. m. 2. 25 Supra scr. ·/· *secto in duo* m. 1. 29 *equales per*] in ras. m. 2. 33 *per*] in ras. m. 2. 36 *per*] in ras. m. 2

similiter autem et per alia omnia, ubi secant reuolutionem facientes equales angulos, circuli describantur centro *t*, donec concidat unaquaeque periferia praecedenti recte et sequenti. erit itaque circa acceptum spatium quoddam circumscriptum ex similibus sectoribus compositum et aliud inscriptum. quod autem circumscripta figura intrascripte maior sit minori praepositi spatii, 5 demonstrabitur. est enim qui quidem *tlo* sector equalis sectori *tml*, qui autem *tnp* ei qui *tnr*, qui uero *tqs* ei qui *tqc*. est autem et aliorum sectorum unusquisque eorum qui in intrascripta figura equalis commune latus habenti sectori eorum qui in circumscripta figura sectorum. palam igitur, quod et omnes sectores omnibus equales erunt. equalis ergo est figura intra- 10 scripta in spatio figure circumscripte circa spatium excepto sectore *tak*. solus enim iste acceptus est eorum qui in circumscripta figura. palam igitur, quod circumscripta figura intrascripte maior est sectore *akt*, qui est minor prepositi. ex hoc autem manifestum est, quod possibile est circa dictum spatium figuram, qualis dicta est, describere, ut circumscripta figura maior sit spatio in 15 minori omnis praepositi spatii, et rursum inscribere, ut spatium similiter maius sit intrascripta figura in minori omnis praepositi spatii.

Accipienti spatium, quod continetur a reuolutione in secunda circulatione 22 descripta et a recta, quae est secunda earum quae in principio circulationis, possibile est circa ipsum figuram planam circumscribere ex similibus sectori- 20 bus compositam et aliam inscribere, ut circumscripta maior sit quam intrascripta in minori omnis praepositi spatii.

Sit reuolutio in qua quae *abgde* in secunda circulatione descripta, et sit *t* quidem signum principium reuolutionis, que autem *at* principium circulationis, quae autem *ea* secunda recta earum quae in principio circulatio- 25 nis, circulus autem *azhi* sit secundus, et quae *agh*, *zi* diametri ipsius ad rectos angulos inuicem. rursum igitur in duo secto angulo recto et sectore rectum angulum continente erit reliquum minus praeposito. et sit productus sector qui *tka* minor praeposito spatio. diuisis itaque rectis angulis in equales angulos eo quod sub *kta* et aliis dispositis secundum eadem prioribus erit 30 circumscripta figura maior quam inscripta figura minori quam sector qui *tka*; maior enim erit excessu, quo excedit sector qui *tka* eum qui *ter*. palam igitur, quod possibile est et circumscriptam figuram accepto spatio esse maiorem minori omnis praepositi spatii, et rursum acceptum spatium intrascripta figura esse maius minori omnis praepositi spatii. per eundem autem modum 35 manifestum et, quod possibile est accipienti spatium, quod continetur a reuolutione in quacunque circulatione descripta et a recta quae in principio circulationis secundum eundem numerum dicta circumscribere figuram, qualis

---

4 *sector*-] in ras. m. 2. In fig. prop. 22 recta *er* et litt. *r* a m. 2.

dicta est, planam, ut circumscripta figura sit accepto spatio maior minori omnis praepositi spatii, et rursum inscribere, ut acceptum spatium intrascripta figura sit maius minori omnis praepositi spatii.

Accipienti spatium, quod continetur a reuolutione, quae est minor quam
23 descripta in una circulatione, non habente terminum principium reuolutionis,
6 et a rectis, quae ab ultimis reuolutionis ducuntur, possibile est circa spatium figuram planam circumscribere ex similibus sectoribus compositam et aliam inscribere, ut circumscripta figura quam inscripta sit maior minori omnis praepositi spatii.

10 Sit reuolutio in qua *abgde*, ultima autem ipsius *a*, *e*, sit autem principium reuolutionis *t*, et copulentur quae *at*, *te*. describatur itaque circulus centro quidem *t*, distantia autem *ta*, et concidat cum *te* apud *z*. semper autem angulo qui apud *t* et sectore *taz* in duo diuisis erit reliquum praeposito minus. sit sector *tak* minor praeposito. similiter itaque prioribus descri-
15 bantur circuli per signa, apud quae secant reuolutionem equales angulos facientes apud *t*, ut periferiarum unaquaeque concidat praecedenti et sequenti· erit itaque contentum spatium a reuolutione *abgde*, et a rectis *at*, *te* circumscripta figura plana ex similibus sectoribus composita et alia inscripta, et circumscripta inscriptam excedit minori praepositi spatii; minor enim est qui
20 *tak* sector. ex hoc autem manifestum est, quod possibile est circa dictum spatium planum, quale dictum est, circumscribere, ut circumscripta figura sit maior quam spatium minori omnis praepositi spatii.

Spatium comprehensum a reuolutione in prima circulatione descripta et
24 a recta prima earum quae in principio circulationis tertia pars est circuli
25 primi.

Sit reuolutio in qua *abgdet* in prima circulatione descripta, sit autem *t* quidem signum principium reuolutionis, que autem *ta* recta prima in principio circulationis, qui autem *akzhi* circulus primus, cuius tercia pars sit circulus in quo q. demonstrandum est, quod praedictum spatium sit equale
30 circulo q. si enim non, aut maius est aut minus. sit prius, si possibile est, minus. possibile itaque est circa spatium comprehensum a reuolutione *abgdet* et a recta *at* circumscribere figuram planam ex similibus sectoribus, ut circumscripta figura sit maior quam spatium minori excessus, quo excedit circulus q dictum spatium. circumscribatur itaque et sit sectorum, ex quibus
35 componitur dicta figura, maximus quidem qui *tak*, minimus autem qui *teo*. palam igitur, quod circumscripta figura minor est circulo q. educantur autem

---

6 *a rectis*] corr. ex *recta* m. 1. Mg. m. 1: *a rectis*. *ducuntur*] corr. ex *ducitur* m. 1. 7 *sectoibus* (h. e. sectionibus) m. 1; corr. m. 2. 13 *qui*] corr. ex *quod* m. 2. 18 *sectoibus* m. 1, *sectoribus* m. 2. 32 *sectoibus* m. 1, corr. m. 2.

recte ad *t* facientes equales angulos, donec ad circuli periferiam cadant. sunt itaque quaedam linee a *t* ad reuolutionem incidentes equali inuicem excedentes, quarum est maior quidem quae *ta*, minor autem quae *te* et minima equalis excessui. sunt autem et alie quaedam linee a *t* ad periferiam circuli incidentes multitudine quidem equales hiis, magnitudine autem quaelibet equalis maxime. et descripti sunt ab omnibus similes sectores, scilicet ab excedentibus equali inuicem et ab equalibus inuicem et maxime. sectores ergo qui ab equalibus maxime minores sunt quam tripli sectorum qui ab excedentibus equali inuicem; demonstratum enim est hoc. sunt autem sectores quidem qui ab equalibus inuicem et maxime equales circulo *azhi*, sectores autem qui ab excedentibus equali inuicem equales circumscripte figure. circulus ergo *akzhi* est minor circumscripta figura quam triplus. circuli autem q triplus. minor ergo est circulus q quam circumscripta figura. non est autem, sed maior. comprehensum ergo spatium a reuolutione *abgdet* et a linea *at* non est minus spatio q. neque igitur maius. sit enim, si possibile est, maius. est itaque rursum possibile intra spatium comprehensum a reuolutione *abgdet* et a recta *at* inscribere figuram, ut dictum spatium sit maius inscripta figura minori quam quo excedit dictum spatium circulum q. inscribatur itaque, et sit sectorum, ex quibus componitur inscripta figura, maximus quidem qui *trx*, minor autem qui *otc*. palam igitur, quod inscripta figura minor est circulo q. educantur itaque facientes equales angulos ad *t*, donec ad circuli periferiam cadant. rursum igitur sunt quaedam linee equali inuicem excedentes a *t* ad reuolutionem incidentes, quarum est maxima quidem quae *ta*, minima autem quae *te*, et est minima equalis excessui. sunt autem et alie linee a *t* ad periferiam circuli *azhi* incidentes multitudine quidem equales hiis, magnitudine autem unaquaeque equalis maxime. et describuntur ab omnibus similes sectores scilicet ab equalibus inuicem et maxime et ab excedentibus equali inuicem. sectores ergo qui ab equalibus maxime maiores sunt quam tripli sectorum qui ab excedentibus equali inuicem excepto eo quod a maxima; demonstratum est enim hoc. sunt autem sectores quidem qui ab equalibus maxime equales circulo *azhi*, qui autem ab excedentibus equali inuicem excepto eo quod a maxima equales intrascripte figure. maior ergo est circulus *azhi* quam triplus inscripte figure. circuli autem q triplus. maior ergo est circulus quam inscripta figura. non est autem, sed minor. non ergo est nec maius spatium quod a reuolutione *abgdet* et a recta *at* quam circulus q. equale ergo est comprehenso a reuolutione et a recta *at*.

Spatium a reuolutione in secunda circulatione descripta et a recta se- 25

---

1 *donec*] mg. m. 1. 17 Mg. $\overset{u}{\text{q}}$ m. 1. 26 *describuntur*] corr. ex *describantur* m. 1.

cunda earum quae in principio circulationis ad secundum circulum hanc habet proportionem, quam habent septem ad duodecim, quae est eadem ei, quam habent simul ambo, scilicet quod continetur ab ea quae ex centro secundi circuli et ea quae ex centro primi circuli et tercia pars tetragoni quod ab 5 excessu, quo excedit quae ex centro secundi circuli eam quae ex centro primi circuli, ad tetragonum quod ab ea quae ex centro secundi circuli.

Sit reuolutio in qua *abgde* in secunda circulatione descripta, sit autem *t* quidem signum principium reuolutionis, que autem *te* recta in principio circulationis prima, que autem *ae* in principio circulationis secunda, circulus 10 autem *azhi* secundus sit, et que *ah*, *iz* diametri ad rectos angulos inuicem. demonstrandum, quod spatium contentum a reuolutione *abgde* et a recta *ae* ad circulum *azhi* habet proportionem quam 7 ad 12. sit itaque quidam circulus qui ϙ, que autem ex centro circuli ϙ potentia equalis ei, quod continetur a lineis *at*, *te*, et tertie parti eius quod ab *ae* tetragoni. habebit ita-15 que circulus ϙ ad circulum *ahzi*, ut 7 ad 12, propterea quod et quae ex centro ipsius ad eam quae ex centro circuli *azhi* hanc habet potentia proportionem. demonstrabitur igitur circulus ϙ equalis spatio, quod continetur a reuolutione *abgde* et a recta *ae*. si enim non, aut maior est aut minor. sit itaque prius, si possibile est, maior. possibile itaque est circa spatium 20 circumscribere figuram planam ex similibus sectoribus compositam, ut circumscripta figura sit maior quam spatium minori, quam quo excedit circulus ϙ spatium. circumscripta sit igitur, et sit eorum, ex quibus componitur circumscripta figura, maximus quidem sector qui *tak*, minimus autem qui *tod*. palam igitur, quod circumscripta figura minor est circulo. educantur ergo 25 recte facientes ad *t* equales angulos, donec ad periferiam secundi circuli cadant. sunt itaque quaedam linee equali inuicem excedentes, que a *t* ad reuolutionem concidunt, quarum est maxima quidem que *ta*, minima autem que *te*. sunt autem et alie linee a *t* ad periferiam circuli *azhi* concidentes multitudine quidem pauciores una ipsis, magnitudine autem equales inuicem 30 et maxime, et descripti sunt similes sectores ab equalibus maxime et ab excedentibus equali inuicem, a minima autem non est descriptus. sectores ergo qui ab equalibus maxime ad sectores illos qui ab excedentibus equali inuicem excepto eo quod a minima minorem proportionem habent quam tetragonum quod a maxima, quae est *ta*, ad simul ambo, scilicet quod continetur 35 a lineis *at*, *te*, et terciam partem eius quod a linea *ea* tetragoni; demonstratum est enim hoc. est autem sectoribus quidem qui ab equalibus inuicem et maxime equalis *azhi* circulus, sectoribus autem qui ab excedentibus equali

---

4 *tercia pars*] corr. ex *terciam partem* m. 1. 29 Ante *pauciores* del. *minore* m. 1. *ipsis*] e corr. m. 2. 36 *est*] e corr. m. 2. 37 *azhi*] *i* in ras. m. 2.

inuicem excepto eo quod a minima equalis circumscripta figura. minorem ergo proportionem habet circulus ad circumscriptam figuram quam tetragonum quod ab *at* ad simul ambo quodque a lineis *at*, *te* et terciam partem eius quod ab *ae* tetragoni. quam autem proportionem habet tetragonum quod a *ta* ad id quod a lineis *ta*, *te* et terciam partem eius quod a linea *ae* tetragoni, hanc habet circulus *azhi* ad circulum ϙ. minorem ergo proportionem habet circulus *azhi* ad circumscriptam figuram quam ad circulum ϙ. quare minor est circulus ϙ circumscripta figura. non est autem, sed maior. non ergo maior est circulus ϙ spatio, quod continetur a reuolutione *abgde* et a recta *ae*.

Neque etiam minor. sit enim, si possibile est, minor. rursum igitur possibile est intra spatium, quod continetur a reuolutione et a recta *ae*, inscribere figuram planam ex similibus sectoribus compositam, ut spatium, quod continetur a reuolutione *abgde* et a recta *ae*, sit maius quam inscripta figura minori, quam quo excedit idem spatium circulum ϙ. sit igitur inscripta, et sit sectorum, ex quibus componitur intrascripta figura, maximus quidem sector *tkr*, minimus autem *teo*. palam igitur, quod intrascripta figura maior est circulo ϙ. educantur ergo facientes equales angulos apud *t*, donec ad circuli periferiam cadant. rursum igitur sunt quaedam linee equali inuicem excedentes, quae a *t* ad reuolutionem incidunt. quarum maxima quidem que *ta*, minima autem quae *te*. sunt autem et alie linee a *t* ad circuli periferiam incidentes multitudine quidem una pautiores hiis, magnitudine autem equales inuicem et maxime, et descripti sunt ab excedentibus equali inuicem similes sectores et ab equalibus maxime. sectores ergo qui ab equalibus maxime ad sectores eos qui ab excedentibus equali inuicem excepto eo quod a maxima maiorem proportionem habent quam tetragonum quod a *ta* ad simul ambo, scilicet quod continetur a lineis *at*, *te*, et terciam partem eius quod ab *ea* tetragoni. est autem sectoribus quidem qui ab excedentibus equali inuicem excepto eo quod a maxima equalis intrascripta figura in spatio, aliis autem circulus *azhi*. maiorem igitur proportionem habet circulus *azhi* ad intrascriptam figuram quam tetragonum quod a *ta* ad id quod a lineis *ta*, *te* et terciam partem eius quod a linea *ae* tetragoni, hoc est circulus *azhi* ad circulum ϙ. maior ergo est circulus ϙ quam intrascripta figura; quod quidem impossibile; erat enim minor. non ergo est nec minor circulus ϙ contento spatio a reuolutione *abgde* et a recta *ae*. quare equalis.

Per eundem autem modum demonstrabitur, et quod comprehensum spatium a reuolutione in quacunque circulatione descripta et a recta, quae

---

5 *te*] *t* in ras. m. 2. 13 *ex*] in ras. m. 2. 18 *facientes*] bis, corr. m. 1. 30 *azhi*] (pr.) mg. m. 2. 34 Ante *contento* del. *circum* m. 1.

dicitur secundum numerum eundem circulationibus, ad circulum, qui dicitur
secundum numerum eundem circulationibus, proportionem habet quam simul
ambo, scilicet quod ab ea quae ex centro circuli qui secundum eundem nume-
rum et ab ea quae ex centro, quod dicitur secundum una pautiorem circula-
5 tionum, et tertia pars tetragoni quod ab excessu, quo excedit quae ex centro
circuli maioris dictorum eam quae ex centro circuli minoris dictorum ad
tetragonum quod ab ea quae ex centro circuli maioris dictorum.

26 Spatium, quod continetur a reuolutione, quae est minor quam descripta
in una circulatione non habente terminum principium reuolutionis, et rectis
10 ab ultimis ipsius ad principium reuolutionis ductis, ad sectorem habentem
eam quidem quae ex centro equalem maiori ductarum a termino ad principium
reuolutionis, periferiam autem equalem intermedie dictarum rectarum ad
eadem reuolutioni hanc habet proportionem, quam habent simul ambo, scilicet
quod continetur a productis ab ultimis ad principium reuolutionis, et tertia
15 pars tetragoni quod ab excessu, quo excedit maior dictarum rectarum mino-
rem, ad tetragonum quod a maiori copulatarum ab ultimo reuolutionis ad
principium.

Sit reuolutio in qua *abgde* minor quam descripta in una circulatione,
ultima autem ipsius sit *a*, *e*, sit autem principium reuolutionis *t* signum, et
20 centro quidem *t*, distantia autem quae *ta* circulus describatur, et concidat
periferie ipsius quae *te* apud *z*. ostendendum, quod spatium contentum a
reuolutione *abgde* et rectis *at*, *te* ad sectorem *atz* hanc habet proportionem,
quam habent simul ambo, scilicet quod a lineis *at*, *te* et tertia pars eius
quod ab *ez* ad tetragonum quod a linea *ta*. sit itaque circulus in quo ϙ*q*
25 habens eam quae ex centro equalem potentia ei quod a lineis *at*, *te* et tercie
parti eius quod a linea *ez*, apud centrum autem ipsius sit angulus equalis ei
qui apud *t*. sector itaque qui ϙ*q* ad sectorem *taz* eandem habet proportio-
nem, quam habet quod a lineis *at*, *te* et tertia pars tetragoni quod ab *ez* ad
tetragonum quod a linea *ta*. que enim ex centris hanc habent proportionem
30 potentia ad inuicem. demonstrabitur itaque sector *q*ϙ equalis ens spatio,
quod continetur a reuolutione *abgde* et a rectis *at*, *te*. si enim non, aut
maior aut minor. sit enim prius, si possibile est, maior. possibile igitur est
circa dictum spatium circumscribere figuram planam ex similibus sectoribus
compositam, ut circumscripta figura sit maior quam dictum spatium minori,
35 quam quo excedit sector ϙ*q* dictum spatium. sit itaque circumscripta, et sit

---

5 *tertia pars*] corr. ex *tertiam partem* m. 1. 8 **26**] om. 9 *et*] del. (?) m. 2. *rectis*] corr. ex *rectam* m. 2. 10 *ductis*] corr. ex *ductam* m. 2. 13 Mg. *scilicet maiori et minori* m. 2. 15 *quod*] e corr. m. 2. 16 *ultimo*] *-o* e corr. m. 2. 21 Supra *ipsius* scr. *scilicet circuli* m. 2. 34 *figura*] corr. ex *figuram* m. 1.

sectorum, ex quibus componitur circumscripta figura, maior quidem qui *tak*, minor autem qui *tod*. palam igitur, quod circumscripta figura minor est sectore *q*ϙ. Protrahantur itaque recte facientes equales angulos apud *t*, donec ad periferiam sectoris *taz* cadant. sunt itaque quaedam recte excedentes equali inuicem a *t* ad reuolutionem concidentes, quarum est maxima quidem 5 *ta*, minima autem *te*. sunt autem et alie recte multitudine quidem pauciores hiis una, magnitudine autem equales inuicem et maxime incidentes a *t* ad periferiam sectoris *atz* sine ea quae *tz*, et descripti sunt similes sectores ab omnibus, scilicet ab equalibus inuicem et maxime et ab excedentibus equali inuicem, a linea autem *te* non sunt descripti. sectores igitur qui ab equalibus 10 inuicem et maxime ad sectores eos qui ab excedentibus equali inuicem sine sectore qui a minima minorem proportionem habent quam quod a *ta* ad simul ambo, scilicet quae a lineis *at*, *te* et tertiam partem eius quod ab *ez* tetragoni. est autem sectoribus quidem qui ab equalibus inuicem et maxime equalis sector *taz*, hiis autem qui ab excedentibus equali inuicem circum- 15 scripta. minorem ergo proportionem habet sector *taz* ad circumscriptam figuram quam tetragonum quod a *ta* ad simul ambo, scilicet quod a lineis *ta*, *te* et tertia parte eius quod a linea *ze*. quam autem proportionem habet quod a linea *ta* ad dictam, hanc proportionem habet sector *taz* ad sectorem *q*. quare minor est sector *q* quam circumscripta figura. non est autem, sed 20 maior. non ergo erit sector *q*ϙ maior spatio contento a reuolutione *abgde* et a rectis *at*, *te*.

Neque etiam minor. Sit enim minor, et alia eadem disponantur. rursum itaque possibile est intra spatium inscribere figuram planam ex similibus sectoribus compositam, ut dictum spatium sit maius quam intrascripta figura 25 minori, quam quo excedit idem spatium sectorem *q*ϙ. sit igitur inscripta, et sit sectorum, ex quibus componitur intrascripta figura, maior quidem *tbg*, minor autem *toe*. palam igitur, quod inscripta figura maior est sectore *q*. rursum igitur sunt quaedam linee excedentes equali inuicem a *t* ad reuolutionem incidentes, quarum est maxima quidem quae *ta*, minima autem quae 30 *te*. sunt autem et alie linee a *t* ad periferiam sectoris *taz* incidentes sine ea quae *ta* multitudine quidem pauciores una excedentibus equali inuicem, magnitudine autem inuicem et maxime equales, et descripti sunt ab unaquaque similes sectores, a maxima autem excedentium equali inuicem non est descriptus. sectores igitur qui ab equalibus inuicem et maxime ad sectores qui 35 ab excedentibus equali inuicem sine eo qui a maxima maiorem proportionem habent quam tetragonum quod a *ta* ad id quod a lineis *ta*, *te* et tertiam

---

34 *maxima*] *-a* in ras. m. 2. *excedentium*] *-um* in ras. m. 2. *est*] in ras. m. 2. *descriptus*] *-us* in ras. m. 2. 37 *te*] *t* in ras. m. 2.

partem eius quod a linea *ez*, quia et sector *taz* ad intrascriptam figuram maiorem proportionem habet quam quidem ad sectorem *q*. quare maior est sector *q* quam inscripta figura. non est autem, sed minor. non ergo est nec minor sector *q* spatio contento a reuolutione *abgde* et a rectis *at*, *te*.
5 equalia ergo.

27 Spatiorum contentorum a reuolutionibus et a rectis quae in circulatione tertium quidem secundi duplum est, quartum autem triplum, quintum autem quadruplum, et semper sequens secundum consequentes numeros multiplex secundi spatii, primum autem spatium sexta pars est secundi.

10 Sit proposita reuolutio in prima circulatione descripta et in secunda et in sequentibus quotcunque, et sit principium quidem reuolutionis *t* signum, recta autem *te* principium circulationis, spatiorum autem sit *k* quidem primum, *l* autem secundum, *m* autem tercium, *n* uero quartum, *x* autem quintum. demonstrandum, quod spatium quidem *k* sit sexta pars sequentis, *m* autem
15 duplum *l*, *n* uero triplum ipsius *l*, et consequentium semper sequens multiplex ipsius *l* secundum consequentes numeros. quod quidem igitur *k* sit sexta pars ipsius *l*, sic demonstratur. quoniam spatium *kl* ad secundum circulum demonstratum est hanc habere proportionem, quam habet 7 ad 12, secundus autem circulus ad primum circulum, ut 12 ad 3; palam enim est;
20 primus autem circulus ad spatium *k* se habet, ut tria ad unum, est ergo *k* spatium sexta pars ipsius *l*. rursum autem et spatium *klm* ad tercium circulum demonstratum est, quod hanc habet proportionem, quam habent simul ambo scilicet quod a *gtb* et tertia pars eius quod a linea *gb* tetragoni ad tetragonum quod a linea *gt*. tercius autem circulus habet ad secundum circulum
25 proportionem, quam habet tetragonum quod a linea *gt* ad id quod a linea *tb*. secundus autem circulus ad spatium *kl* habet proportionem quam tetragonum quod a linea *bt* ad simul ambo scilicet quod a lineis *bt*, *td* et terciam partem tetragoni quod a linea *ab*. haec autem habent ad inuicem proportionem quam 19 ad 7. ipsum igitur *m* ad *kl* habet proportionem quam 12 ad 7. porro
30 *kl* ad *l* habet proportionem, quam habent 7 ad 6. palam igitur, quod duplum est *m* ipsius *l*. quod autem sequentia proportionem consequentium numerorum habeant, demonstrabitur. quod enim *klmnx* ad circulum, cuius est ex centro quae *te*, hanc habet proportionem, quam habent simul ambo, scilicet quod continetur a lineis *et*, *td* et tertia pars eius quod a linea *de* tetragoni,
35 ad tetragonum quod a linea *te*. circulus autem, cuius est ex centro quae *te*, ad circulum, cuius est ex centro que *td*, hanc habet proportionem quam tetragonum quod a linea *te* ad tetragonum quod a linea *td*. circulus autem, cuius

---

23 *gtb*] m. 1; *gt*, *tb* m. 2. 32 *habeant*] -*ant* in ras. m. 2. *enim*] mg. m. 2.

est a centro quae *dt*, ad spatium *klmn* hanc habet proportionem quam tetragonum quod a linea *td* ad simul ambo scilicet quod a lineis *td*, *tg* et tertiam partem eius quod a linea *dg* tetragoni. et spatium ergo *klmnx* ad spatium *klmn* habet proportionem quam quod a lineis *te*, *td* et tercia pars eius quod a linea *de* ad id quod a lineis *dt*, *tg* et tertiam partem eius quod a linea *dg*. 5 diuidenti ergo et spatium *x* ad spatium *klmn* proportionem habet, quam habet excessus eius quod a lineis *et*, *td* cum tertia parte eius quod a linea *ed* ad id quod a lineis *dt*, *tg* et terciam partem eius quod a linea *dg*. simul ambo autem excedunt simul ambo, quo et quod ab hiis quae *etd* id quod ab hiis quae *dtg*. excedunt autem eo quod ab hiis quae *dt*, *ge*. spatium ergo 10 *x* ad spatium *klmn* proportionem habet quam quod ab hiis *td*, *ge* ad id quod a lineis *dt*, *tg* et tertiam partem tetragoni quod a linea *gd*. per eadem autem demonstrabitur et spatium *n* ad spatium *klm* hanc habere proportionem quam quod a lineis *tg*, *bd* ad simul ambo scilicet quod a *gtb* et terciam partem eius quod a *gb* tetragoni. spatium ergo *n* ad spatium *klm* hanc habet pro- 15 portionem quam quod a *tg*, *bd* ad id quod *tg*, *tb* et tertiam partem eius quod a *gb* et e contrario; haec autem equalia sunt ei quod a lineis *dt*, *tg* et tercie parti eius quod a linea *gd* tetragoni. quoniam igitur spatium quidem *x* ad spatium *klmn* hanc habet proportionem quam quod a lineis *td*, *ge* ad simul ambo scilicet quod a lineis *dtg* et tertiam partem eius quod a linea *gd* tetra- 20 goni, spatia autem *klmn* ad spatium *n* quam simul ambo scilicet quod a lineis *dtg* et tertia pars tetragoni quod a linea *gd* ad ea quae a lineis *tg*, *db*, habet ergo et spatium *x* ad spatium *n* eandem proportionem quam quod a lineis *td*, *ge* ad id quod a lineis *tg*, *db*. quod autem a lineis *td*, *ge* ad id quod a lineis *tg*, *db* eandem habet proportionem quam quae *td* ad *tg*, quoniam 25 equales sunt quae *ge*, *bd*. palam igitur, quod et spatium *x* ad spatium *n* hanc habet proportionem quam quae *td* ad lineam *tg*. similiter autem demonstrabitur et spatium *n* ad spatium *m* hanc habere proportionem quam quae *tg* ad lineam *tb* et spatium *m* ad spatium *l* quam quae *bt* ad *at*. que autem *et*, *dt*, *gt*, *bt*, *at* recte eam quae consequentium numerorum proportionem 30 habent.

Si in reuolutione in quacunque circulatione descripta duo signa acci- 28 piantur non termini, ab acceptis autem signis copulentur recte ad principium reuolutionis, et centro quidem principio reuolutionis, distantiis autem hiis quae a signis super principium reuolutionis circuli describantur, comprehen- 35 sum spatium a maiori periferiarum intermedia rectarum et reuolutionis intermedie earundem rectarum et recte educte hanc habebit proportionem ad spa-

---

1 Post *klmn* ras. 1 litt. m. 1. 5 *dt*] *d* in ras. m. 2. 6 *ergo et*] in ras. m. 2. 10 Post *autem* ins. *τ* m. 2. *dt*, *ge*] ex *dtge* m. 2. 11 *td*, *ge*] ex *tdge* m. 2.

tium comprehensum a minori periferia et eadem reuolutione et recta copulante terminos ipsarum quam que ex centro circuli maioris cum duabus tertiis partibus excessus, quo excedit quae ex centro maioris circuli eam quae ex centro minoris circuli cum una tertia parte eiusdem excessus.

5 Sit reuolutio in qua *abgd* in una circulatione descripta, et accipiantur in ipsa duo signa quae *a*, *g*, ut *t* signum sit principium reuolutionis, et ab *a*, *g* copulentur ad *t*, et centro *t*, distantiis autem hiis quae *ta*, *tg* circuli describantur. demonstrandum, quod *x* spatium ad *p* eandem habet proportionem, quam habent simul ambo scilicet quae *ht* et due tertie partes *h* ad 10 simul ambo scilicet ad lineam *ht* et unam tertiam partem ipsius *ha*. spatium enim *np* ad sectorem *hgt* demonstratum est hanc habere proportionem, quam habet quod a lineis *ht*, *at* et tertia pars eius quod a linea *ah* tetragoni ad tetragonum quod a linea *ht*. ipsum ergo spatium *x* ad spatium *np* hanc habet proportionem, quam habet quod a lineis *tah* cum duabus tertiis parti-15 bus tetragoni quod a linea *ha* ad simul ambo scilicet quod a lineis *ath* et tertiam partem eius quod a linea *ha*. et quoniam *np* spatium ad sectorem *nhx* hanc habet proportionem, quam habet simul utrumque scilicet quod a lineis *ta*, *th* et tertia pars eius quod a *ha* ad tetragonum quod a linea *th*, sector autem *nhx* ad sectorem *n* hanc habet proportionem quam quod a *th* 20 ad id quod a *ta*, habebit et *np* spatium ad sectorem *n* eandem proportionem, quam habet simul utrumque scilicet quod a *ta*, *th* et tertia pars eius quod a linea *ha* ad id quod a *ta*. spatium ergo *np* ad spatium *p* proportionem habet quam simul ambo scilicet quod a lineis *hta* et tertia pars eius quod a linea *ha* ad simul utrumque scilicet quod a lineis *ha*, 25 *ta* et tertiam partem tetragoni quod a linea *ha*. quoniam igitur spatium *x* ad spatium *np* hanc habet proportionem, quam habet simul utrumque scilicet quod a *tah* et due tertie partes tetragoni quod a linea *ha* ad simul ambo scilicet quod a *hta* et tertiam partem eius quod a linea *ha*, spatium autem *np* ad spatium *p* hanc habet proportionem quam simul ambo scilicet 30 quod ab hiis quae *hta* et tertia pars tetragoni quod a linea *ha* ad simul utrumque scilicet quod ab hiis quae *hat* et terciam partem tetragoni quod a linea *ha*, habebit et spatium *x* ad spatium *p* hanc proportionem, quam habent simul ambo scilicet quod a lineis *th*, *ha* et due tertie partes eius quod a linea *ha* ad simul utrumque scilicet quod a lineis *th*, *ha* et tertiam partem 35 eius quod a linea *ha*. at uero simul ambo scilicet quod a lineis *th*, *ha* et due tercie partes eius quod a linea *ha* ad simul ambo scilicet quod ab hiis

2 *maioris*] m. 2. 4 Post *minoris* add. *ad illam quae ex centro maioris* mg. m. 2. 5 *in*] m. 2. 6 *a*, *g*] ex *ag* m. 2. 7 *a*, *g*] ex *ag* m. 2. Ante *ad* add. *recte* mg. m. 2. 9 *h*] *ha* m. 2. 11 *np*] *n* in ras. m. 2. 25 *ta*] *a* in ras. m. 2. 30 *ab*] in ras. 1 litt. m. 2. 33 Mg. *ad hec stude usque in finem* m. 2.

quae *tha* et tertiam partem tetragoni quod a linea *ha* hanc habet proportionem, quam habent simul ambo scilicet quae *th* et due tertie partes linee *ha* ad simul ambo scilicet lineam *th* et tertiam partem linee *ha*. palam igitur, quod et spatium *x* ad spatium *n* hanc habet proportionem quam simul ambo scilicet quae *th* et due tertie partes linee *ha* ad simul utrumque scilicet lineam 5 *th* et terciam partem linee *ha*.

Completa fuit translatio hec anno X̊ 1269 mense februarii.

II.

Archimedis circuli dimensio.

Omnis circulus est aequalis trigono rectangulo, cuius quae quidem ex 10 centro est aequalis uni earum quae circa rectum angulum perimeter autem basi. habitudinetur circulus *abgd* trigono *e*, ut supponitur. dico, quod aequalis est. si enim est possibile, sit maior circulus, et inscribatur tetragonum *ag*, et secentur periferie in duo aequa, et sint portiones iam minores excessu, quo excedit circulus trigonum rectilineum. ergo adhuc est maius trigono. acci- 15 piatur centrum *n* et cathetus quae *nx*. minor ergo quae *nx* latere trigoni. est autem et perimeter rectilinei minor reliquo latere, quoniam et perimeter circuli. est ergo rectilineum minus trigono *e*; quod quidem est inconueniens. sit autem, si possibile est, circulus minor trigono *e*, et circumscribatur tetragonum, et secentur periferie in duo aequa, et ducantur attingentes per signa. 20 rectus ergo qui ab *oar*. linea ergo *or* est maior linea *mr*. quae enim *rm* est aequalis lineae *ra*, et trigonum ergo *rop* est maius quam dimidium figurae *ozam*. accipiantur sectores similes ipsi *pza* minores excessu, quo excedit trigonum *e* circulum *abgd*. adhuc ergo circumscriptum rectilineum est minus trigono *e*. quod quidem inconueniens. est enim maius, quia quae 25 quidem *na* est aequalis catheto trigoni, perimeter autem est maior base trigoni. aequalis ergo est circulus *abgd* trigono *e*.

---

6 In fig. litt. *p*, *b*, *x* renouatae m. 2.

II Orthographische Kleinigkeiten nicht berücksichtigt. 9 *Archimedis circuli dimensio*] in ras. m. rec. O; *Archimedis Syracusani liber* GT. *Theorema primum. propositio prima* T. 11 *perimetur* GT. 16 *kathetus* GT. *nx*] (pr.) *nz* e corr. m. 2 O. *ergo*] seq. ras. 1 litt. O. 17 *perimetur* GT. *perimetur* GT (et O?). 19 *circunscribatur* GT. 21 *rectus*] e corr. m. 2 O, *recta* GT 23 *ozam*] O, *oram* G, *okam* T (qui in fig. *k* habet pro *z*). *pza*] *pra* G, *pka* T. 24 *circunscriptum* GT. 25 Post *quia* del. *qui* m. 1 O. 26 *katheto* GT. *trigono* GT. *perimetur* GT. *basi* GT.

Circulus ad id quod a diametro tetragonum proportionem habet quam undecim ad quatuordecim. sit enim circulus, cuius diameter quae *ab*, et circumscribatur tetragonum *gh*, et lineae *gd* duplam quae *de*, septima autem pars ipsius *gd* quae *ez*. quoniam igitur quod *age* ad ipsum *agd* proportionem
5 habet quam 21 ad 7, ad id autem quod *aez* id quod *agd* proportionem habet quam 7 ad unum, quod *agz* ad id quod *agd* est ut 22 ad 7. scilicet ipsius *agd* quadruplum est tetragonum *gh*, trigonum autem *agdz* est aequale circulo *ab*, quoniam quae quidem *ag* cathetus est aequalis ei quae ex centro, basis autem est tripla diametri et septima propinquissime excedens demon-
10 strabitur. circulus igitur ad tetragonum *gh* proportionem habet quam 11 ad 14.

Omnis circuli perimeter tripla est diametri et adhuc excedit minori quam septima parte diametri, maiori autem quam decem septuagesimis primis.

Sit circulus et diameter quae *ag* et centrum *e* et quae *glz* contingens
15 et qui *zeg* tertia recti. quae *ez* ergo ad *zg* proportionem habet quam 306 ad 153, quae autem *eg* ad *gz* proportionem habet quam 265 ad 153. secetur igitur qui sub *zeg* in duo aequa per *eh*. est ergo ut quae *ze* ad *eg* quae *zh* ad *hg*. et permutatum et componenti; ut ergo simul utraque quae *ze eg* ad *zg* quae *eg* ad *gh*. quare quae *ge* ad *gh* maiorem proportionem habet
20 quam 571 ad 153. quae *eh* ergo ad *hg* potentia proportionem habet quam 349450 ad 23409. longitudine ergo quam 591 ad 153. rursum secetur in duo qui sub *heg* per *et*. propter eadem ergo quae *eg* ad *gt* maiorem pro-

---

1 *Theorema II propositio II* T. *dyametro* T. 2 *XIIII* G, *14* T. *dyameter* T. 3 *circunscribatur* GT. 4 *ez*] *er* GT (in fig. *r* pro *z*). *quoniam*] *unde* GT. 5 *aez*] *aer* GT. 6 Post *quod* supra scr. *e* m. rec. O. *agz*] *agr* GT. *scilicet*] comp. O, *uidelicet* GT. 7 *agdz*] *d* del. m. 2 O, *agdr* GT. 8 *kathetus* GT. 9 *dyametri* T. *excedit* GT. 12 *Theorema III propositio III* T. *diameter* G, *dyameter* T. Post *minori* ins. *quidem* m. 3 O. 13 *dyametri* T. *primis*] in ras. m. 2 O. 14 *dyameter* T. *quae*] del rubr. O. *quae*] del. rubr. O. *glz*] *gk* T, *gr* G. 15 *qui*] e corr. m. rec. O; *quia* GT. Deinde add. *sub* m. rec. O. *zeg*] *reg* GT. *tertia*] e corr. m. 2 O. *quae*] del. rubr. O. *ez*] *er* GT. *zg*] *rg* GT. 16 *quae*] del. rubr. O. *eg autem* rubr. O. *gz*] *gr* GT. Deinde add. *maiorem* mg. m. 3 O, T. 17 *igitur*] comp. e corr. m. 3 O. *qui*] e corr. m. 2 O, *quae* GT. *sub*] supra scr. m. 1 O. *zeg*] *reg* GT. *quae*] del. rubr. O. *ze*] *re* GT. *quae*] del. rubr. O. 18 *zh*] *rh* G, *kh* T. *componenti et permutatum* rubr. O. *quae*] del. rubr. O. *ze*] *re* GT. *eg*] om. G, *et eg* T. 19 *zg*] *rg* GT. *quae*] del. rubr. O. *quae*] del. rubr. O. 20 *quae*] del. rubr. O. *ad*] om. GT. Post *potentia* add. *maiorem* mg. m. 3 O. 21 *349450*] *349* rubr. in lacuna m. 2 O, om. G. *23409*] *2* in lac. m. 2 O, *13409* T. *quam*] *maiorem quam* T. Post *591* add. *8* mg. m. 3 O. *secetur*] del. rubr. O. 22 *duo*] *duo aequa* GT, m. 2 O. *qui*] corr. ex *quae* m. 3 O, *quae* GT. *per*] *propter* GT. *eandem* GT. *quae*] del. rubr. O.

portionem habet quam 1162 ad 153. quae *te* ergo ad *tg* maiorem proportionem quam illa quam 1172 ad 153. adhuc in duo qui sub *teg* per *ek*. quae *eg* ergo ad *gk* maiorem proportionem habet quam illa quam 2334 ad 153. quae *ek* ergo ad *gk* maiorem proportionem habet quam illa quam 2339 ad 153. adhuc in duo qui sub *keg* per *le*. quae *eg* ergo ad *lg* maiorem 5 longitudine proportionem habet quam 4673 ad 153. quoniam igitur qui sub *zeg* tertia pars existens recti sectus est quadruplum in duo, qui sub *leg* recti est 48. ponatur igitur ipsi aequalis qui apud *e* qui sub *gem*. qui ergo sub *lem* recti est 24. et quae *lm* ergo recta est lateris poligonii circa circulum habentis 96. quoniam igitur quae *eg* ad lineam *gl* ostensa est habere maio- 10 rem proportionem quam 4673 ad 153, sed ipsius quidem *eg* dupla quae *ag*, ipsius autem *gl* dupla quae *lm*, et quae *ag* ergo ad perimetrum poligonii 96 maiorem proportionem habet quam 4673 ad 14688. et est tripla, et excedunt 667. 5, quae quidem ipsorum 4673. 5 minora sunt quam septima. quare poligonium quod circa circulum est triplum diametri et minus quam septima 15 parte maius. circuli ergo perimeter multo magis minor est quam tripla et septima parte maior.

Sit circulus et diameter quae *ag*, qui autem sub *bag* tertia recti. quae *ab* ergo ad *bg* minorem proportionem habet quam illa quam 1351 ad *ago*. secetur in duo qui sub *bag* per *ah*. quoniam igitur aequalis est qui sub *bah* ei 20 qui sub *hgb*, sed et ei qui sub *hag*, et qui sub *hgb* ei qui sub *ahg* est aequalis. et communis qui sub *ahg* rectus. et tertius erit qui sub *hzg* tertio ei qui

---

1 *quam*] *quam illa quae* GT. *1162*] *1162. 8* GT, m. 2 O. *quae*] del. rubr. O. *maiorem*] *minorem* GT. 2 *1172*] *1172. 8* GT, m. 2 O. *qui*] corr. ex *quae* m. 2 O. *ek*] *eb* G. 3 *quae*] del. rubr. O. *maiorem*] *minorem* GT. *2334*] *2334. 4* in ras. m. 2 O, *2334 quae* GT. 4 *quae*] del rubr. O. *minorem* GT. *2339*] *2339. 4* GT, m. 2 O. 5 *qui*] corr. ex *quae* m. 2 O. *quae*] del. rubr. O. 6 *longitudinem* GT. *4673*] *6* in ras. m. 2 O, deinde add. *z* (sscr. *t*) m. 2. 7 *zeg*] *reg* GT. *pars*] e corr. m. 2 O. Post *recti* in ras. add. *ie* O. *quadruplum*] *quater* GT, m. 2 O. *in*] *in equa* GT, m. 2 O. 8 *48*] *48*[a] m. 2 O. *ipsi*] e corr. m. 2 O. 9 *24*] *24*[a] m. 2 O. *quae*] del. rubr. O. *lateris*] del. m. 2 O, om. GT. 10 *96*] *latera 96* GT, m. 2 O. *quae*] del. rubr. O. *extensa* GT. 11 *4673*] *4673. 5* m. 2 O, *4673. 7* GT. *quae*] del. rubr. O. 12 *quae*] del. rubr. O. *quae*] del rubr. O. 13 *4673*] *4673. 5* G, m. 2 O; *4673. 7* T. 14 *5. quae quidem ipsorum*] in ras. 8—9 litt. m. 2 O. *4673. 5*] supra scr. m. 2 O. *quam*] in ras. m. 2 O. 15 *dyametri* T. 16 *perimet͡* O, *perimetrum* GT. 18 *dyameter* T. *tertia*] *-a* e corr. m. 2 O. 19 *1351*] m. 2 O; *351* m. 1 O, GT. *ago*] *780* GT, *ad 780 que autem ag ad gb quam 1560* mg. m. rec. O. 20 *secetur*] del. m. 2 O. *duo*] *duo aequa* m. 2 O, GT. *igitur*] comp. e corr. m. 2 O. *qui*] om. GT. 21 *sub*] om. GT. *hgb*] *hag* T. *hgb*] *hgb ergo* GT. *ahg*] *hag* m. rec. O. 22 *qui*] corr. ex *que* m. 2 O. *rectus*] corr. ex *recta* m. 2 O, *rectis* GT. *tertius*] corr. ex *tertia* m. 2 O, *terminatis* GT. *qui*]

sub *agh.* equiangulum ergo quod *ahg* trigono *ghz.* est ergo ut quae *ah* ad *hg* quae *gh* ad *hz* et quae *ag* ad *gz.* sed ut quae *ag* ad *gz* et simul utraque quae *gab* ad *bg.* et ut simul utraque ergo quae *bag* ad *bg* quae *ah* ad *hg.* propter hoc igitur quae *ah* ad lineam *hg* minorem proportionem habet quam
5 quidem 2911 ad 780. quae autem *ag* ad *gh* minorem quam 3013. 3. 4 ad 780. item in duo qui sub *gah* per *at.* que *at* ergo propter eadem ad *tg* minorem proportionem habet quam illa quam 5324. 3. 4 ad 780 aut quam 1823 ad 250; utraque enim utriusque. quare quae *ag* ad *gt* aut illa quam 1838. 9 ad 240. adhuc in duo qui sub *tag* per *ka.* et quae *ak* ad *kg* mino-
10 rem ergo proportionem habet quam illa quam 1007 ad 266; utraque enim utrique extimo. ergo ad *kg* quam 1009. 6 ad 66. adhuc in duo qui sub *kag* per *la.* quae *al* ergo ad *ag* minorem proportionem habet quam illa quam 2016. 6 ad 66. quae autem *ag* ad *gl* minorem quam 2017. 4 ad 66. 'e conuerso ergo perimeter poligonii ad diametrum maiorem proportionem habet
15 quam 6301. 6 ad 7012, quae quidem ipsorum 2017. 4 maiora sunt quam tripla et 10. 71. et perimeter ergo poligonii 96 eius quod in circulo est tripla diametri et maior quam 10. 71. quare et circulus adhuc magis triplus est et maior quam 10. 71. perimeter ergo circuli est triplus diametri et minor quidem quam septima parte maior.

corr. ex *que* m. 2 O. *hzg*] *hrg* GT, *hzg equalis* m. rec. O. *tertio*] corr. ex *tertius* m. 2 O. *qui*] GT, *que* O. 1 *ghz*] *ghr* GT. 2 *hz*] *hr* GT *gz*] *gr* GT *gz*] *gr* GT *utrumque* G, *utrunque* T. 3 *et — bg*] om. GT. *ah*] *a* e corr. m. 2 O. 4 *quam*] del. m. 2 O. 5 *quidem — minorem*] add. m. 2 O. Ante *quam* add. *quam illa* m. rec. O. *3. 4*] GT, *2 4* in ras. m. 2 O. 6 *qui*] corr. ex *que* m. 2 O. *que at*] om. GT. *eandem* GT. 7 *5324. 3. 4*] GT, *5924. 2 4* in ras. m. 2 O. 8 *250*] m. 1 O, GT; *240* m. 2 O. Post *utriusque* add. $^4/_{13}$ m. rec. post ras. O. *aut*] GT, *quam* in ras. m. rec. O. 9 *9*] GT, $^9/_{11}$ — in ras. m. rec. O. 10 *1007*] GT, *7* e corr. m. 2 O. *266*] GT, *2* eras. O. 11 *utrique*] GT; *utq̄ʒ* m. 1 O, *utriusque*(?) m. rec. *extimo*] GT, $^{11}/_{40}$ in ras. m. rec. O. *ergo*] supra scr. *quae ag* m. rec. O. *kg quam 1009. 6*] O, *1076* GT. *qui*] m. rec. O, *que* m. 1 O, GT. 12 *la*] *li* GT. 13 *2016. 6*] *6* in lac. m. 2 O. *4*] in lac. m. 2 O. 14 *dyametrum* T. 15 *6301. 6*] GT, *633 6* e corr. m. 2 O. *7012*] GT, *2017. 4* in ras. m. 2 O. *ipsorum*] GT, in ras. m. 2 O. *4*] GT, *4* in ras. 5—6 litt. m. 2 O. 16 *et 10*] comp. O, *710* GT; post *10* del. *pep* m. 1 O. *eius*] O, *ei* GT. 17 *triplus* GT. *dyametri* T. Post *maior* del. *quam illa* m. 2 O. *10. 71*] GT, in ras. m. 2 O. *adhūc* G, *ad hunc* T. 18 *10*] renou. m. 2 O. *tripla* m. 2 O. *dyametri* T. 19 *maior*] -*r* in ras. 8—9 litt. m. rec. O; deinde add. *aut quam decem septuagesimunis* m. rec. O, τελοσ GT.

Obschon die Unterscheidung der corrigirenden Hände, die in diesem Schriftchen besonders thätig gewesen, sehr schwierig ist, so dass nicht alles

passt, so kann doch im allgemeinen folgendes festgestellt werden. m. 2 ist die erste Hand nur mit anderer Dinte; der Uebersetzer hat also nachträglich seine Arbeit durchmustert, und zwar unter Herbeiziehung seiner griechischen Vorlage. m. 3, die ohne Zweifel hie und da für m. 2 anzusetzen ist, ist noch ziemlich alt; m. rec. dagegen ganz jung (saec. XVII); sie benutzte irgend eine emendirte Hds. (oder die ed. princeps?). Die rothe Hand endlich, die übrigens in der Mitte abbricht, hat nur stilistische Aenderungen auf freie Hand gemacht. Die Quelle von GT war von O abgeschrieben, nachdem die Correcturen m. 2 gemacht waren, aber vor den übrigen.

III.

Incipit secundus tractatus.

Archimedes dositheo gaudere. prius quidem misisti mihi, ut scriberem demonstrationes problematum, quorum ego ipse propositiones misi cononi. accidit autem ipsorum plurima scribi per theoremata, quorum demonstrationes prius misi tibi, quod omnis spere superficies est quadrupla maximi circuli eorum qui in spera; et etiam quod omnis portionis spere superficiei est aequalis circulus, cuius quae ex centro est aequalis rectae productae a uertice portionis ad periferiam basis; et etiam quod omnis spere cylindrus basem quidem habens maximum circulum eorum qui in spera, altitudinem autem aequalem diametro spere, ipse est emiolius spere magnitudine. et superficies ipsius emiolia superficiei spere; et quia omnis sector solidus est aequalis cono basem quidem habenti circulum aequalem superficiei portionis eius quae in sectore spere altitudinem autem aequalem ei quae ex centro spere. quaecunque quidem igitur theorematum et problematum scribuntur per haec theoremata, in hoc libro scribens mitto tibi. quaecunque autem per aliam inueniuntur theoriam, uidelicet quae de elicis et quae de conoidalibus, conabor cito mittere. primum autem problematum erat hoc. spera data inuenire planum spatium aequale superficiei spere. est autem hoc manifestum demonstratum ex praedictis theorematibus; quadruplum enim maximi circuli eorum qui in spera et spatium planum est et aequale superficiei spere.

III Ottobon. fol. 31. 15 Post *quod* add. *que* m. 2. 17 Post *aequalis* del. *circulus.* *uertice*] in ras. 20 *ipse*] m. 1, *ipse que* m. 2. *emiolius*] m. 1, *hemiolius* m. 2. 21 *et quia*] compp. m. 1, *etiam quod* m. 2.

IV.

Cum praedixissem exponenda ab ipso theoremata consuetum omnibus geometris in expositione seruans, nominationes, quibus ipse secundum potestatem usus est, et diffinitiones ypothesum et ipsas ypotheses a principio
5 libri explanare, uult et ait primum esse quasdam in plano curuas lineas, quae copulantium ultima ipsarum rectarum aut omnes ad eadem sunt, aut nichil habent ad altera. planum utique erit quod dicitur, si nouerimus, quas uocat eas quae in plano curuas lineas. sciendum igitur, quod curuas lineas uocat non simpliciter circulares uel conicas uel non fractam habentes continuitatem,
10 sed omnem simpliciter in plano lineam praeter rectam curuam nominat. unam autem lineam in plano qualitercunque copulatam, ut et si ex rectis componatur

ipsi *abgd*. sed quoniam, ut et superius dictum est, curuas lineas non periferiales solum uocat, sed et ex rectis compositas. ex hiis autem erat descriptio curuarum ad eadem. contingens utique erit accipere in aliqua
15 linea ad eadem concaua duo quaecunque signa, ita ut quae ad eadem copulans recta ad neutras quidem partes cadat lineae ad ipsam autem adaptetur. propter quod ait ad eadem curuam uocare lineam, in qua recte per duo quaecunque signa producte aut omnes ad easdem partes lineae cadunt, aut quaedam quidem ad easdem, quaedam autem in ipsa, ad alteras autem partes nulla.
20 eadem autem licet intelligere de superficiebus.

V.

Die Angaben vor dem] beziehen sich auf meine Ausgabe II. Bd., darauf folgt die Lesart des cod. Ottobon.

S. 359, 1—3] liber Archimedis de insidentibus aque 11] „1" mg. 12 plane] plano signum] om. 13 faciente

S. 360, 2 spere 4 super] semper facientes] -s eras. 6 spere 9 sit] sint itaque] itaque quae 16 superficiem spere 18] „2" mg. 20 spere (so immer)

S. 361, 3 linea] (alt.) lineam 6 igitur] itaque 17, 18 quarundam 20 ab] a 21 RK] hk 22 quidem] quaedam 24 positae] positae et Auf der Fig. Z statt R

IV Ottob. fol. 34. 12 Ante *ipsi* columna dimidia uacat; mg. m. 1: hic de exemplari greco perditum erat unum folium. 16 Post *autem* del. *congru* m. 1.

S. 362, 1 POBE] om. AB] zb, mg. xoba 3 BE] sic, mg. pobl 5 quare] quare n̄ (n̄ del.), mg. ου μη ιυ τι expelletur] expellentur 6 etiam] om. 9 linea] lineam est] esse 10 si] quo, dann lacuna litt. 8, worin m. 2: modocunque aliter, mg. και πως ϛ̓ αλλως 13 terrae] terrae ē (e corr.) superficies] seq. ras. 2 litt 17 Vor habentis add. mg. m. 2: centrum 18] „3" mg. 21 excedant nihil et] nihil eras., -ant et in ras. m. 2 referentur] ferentur 23 demonstratur] dimittatur aliqua] aliq̄

S. 363, 6] mg. οχ̱ημα 12 comprehensa 21 secetur] corr. ex secentur hoc] h̄ plani] m. 1, secundum xop mg. m. 2 25 humido assumpta] ab humido absumpta RSEY] rscy 26 BHGT] bhtg 27] sunt] scilicet Auf der Figur C statt E

S. 364, 3 et] in ras. 3—4 litt. m. 2 similiter autem non] non (mg. m. 2) similiter autem 4 etiam] enim 5 superficie] superficierum 7 RSEY] rscy 11 RSEY] rscy 14 aequale] inequale 15 igitur] supra scr. m. 1 20 fertur] feretur

S. 365, 1] „4" mg. 3 humidi] humido 16 per] secundum 17 R] qua z 20 R] z Auf der Figur z statt R 27 secetur] seceturque

S. 366, 2 R] z 5 superficie] secundum superficiem 7 in] enim in 9 R] z 11 premitur] m. 1, a solida magnitudine quae secundum hb add. mg. m. 2 continente] continenti 12 exsistente] et existente 14 R] z 15 magnitudine 16 humidi] post lacunam 7 litt., mg. τασ δε; mg. m. 2 add.: autem 17 R] z

S. 367, 1] „5" mg. 2 leuior] leuior humido 12 quae premitur] qua premuntur 14 grauitati] corr. ex grauitate m. 1 15 RSEY] rscy 17 RSEY] rscy Auf der Fig. C statt E; L, A, D, N fehlen wie die Gerade AD; „figura quintae" m. 2

S. 368, 1] „6" mg. 2 ui pressa] impressa surrexi feruntur] sursum referuntur 9 ubi] ui 10 referetur 14 eadem] eandem 15 ex] que ex 18 ipsis — 20 aequalem] cum ipsis est maior quam bg quia humidi habentis molem aequalem 26 est] est enim sit] sint quaedam] om. (-s hu- in ras. m. 2) Auf der Fig. ist BG durch eine Gerade ersetzt; „sextae" m. 2

S. 369, 3 est] om. 5 enim] seq. ras. 1 lin., mg. Λγτ (undeutlich) ταυτ̓ δεδυκτΛ τελειον εσΛται δεδυκ⁰ του δεδειγμενου 6 tanta] seq. que d ē(?) superius, sed del. 7 ab — premitur] premitur, mg. m. 1 add.: ab eo quod supra scilicet d 12] „7" mg. 14 mg. ἑστὰν καταβαντι 17 quidem] quidem ergo mg. εστον κατβαντι 18 ipsius] ipsis

S. 370, 14 humidi] autem humidi 24 solidae] supra scr. m. 1

S. 371, 1 grauius quam D ipsa G grauitate] in grauitate g grauius magni-

tudine d   3] om.   7] „8" mg.   12 trahatur   13 secundum] si   14 mg. m. 1: /· et erat uacuum dimidium folium. probatio huius theorematis deficiebat in exemplari greco, et erat finis quaterni, et in principio sequentis quaterni stabant figure istius theorematis ut puto.

S. 372, 1] om.   10 autem] autem que   14 statuetur] stabtuetur   15 figura] figura primo   18 terrae centrum   19 KL] que kl absumpta   20 habet] m. 1, mg. m. 1 habens

S. 373, 2 absumpta] seq. lacuna 6—8 litt.   6 perpendicularis ducatur LO] perpendiculari seq. lac. 20 litt., mg. ra   Auf den Figg. fehlen einige Buchstaben

S. 374, 1 super] semper   In fine: Archymedis syracusani de insidentibus in humido liber primus explicit   Ueber II.: de eisdem eiusdem liber secundus incipit

S. 375, 7 dimittatur   8 sit] om.   9 ipsum] ipsius   13 quam] quam habet   14 humidi   15 sit] om.   20 ad] seq. nr, sed del.

S. 376, 4 est I] scilicet (?) est   6 grauitas B] seq. est equalis, del. m. 1   13 FA] seq. lacuna 6 litt.   magnitudini   16 proportionem] seq. lacuna 5—6 litt.   17 R] seq. lacuna 3—4 litt., mg. rn   Satznummern fehlen   19 conoydalis, wie immer   20 non] om.   21 axem] ad axem

S. 377, 10 IS] k   12 IS] is. /·k, mg. hk.if   13 NO] no, mg. /·nt   14 mg. m. 1: hic in exemplari erat uacuum dimidium folium et deficiebat residuum demonstrationis

S. 378, 3 non] om.   4 axem] seq. h, del.   13 mg. pf

S. 379, 4 figurae] seq. sit g, del.   6 ROK] rωk   8 Ω] o   autem] seq. a gb, del.   mg. rt

S. 380, 1 axem] seq. ad tetragonum quod ab axe (supra scr. uacat m. 2), mg. non erat in greco, tamen ea deficere   4 rectangula   18 equedistans   21 inter] intra   22 BR] que tr   23 humidi] humidum

S. 381, 2 RH] rm   ei] sic, mg. ea ῒ οὖν   3 OH] on   4 HM] rm   sit] fit   5 ipsius] seq. h, del.   6 MN] nm   est] seq. lac. 4—6 litt.   mg. a   8 RH] rm   10 excessu] seq. quod, del.   14 proportione] mg. m. 1

S. 382, 1 ab PF ad tetragonum quod] lacuna 20 litt.   2 ab NO] mg. m. 1   iis] hiis   7 non] non, mg. οὐκ   10 HO] no   11 H] m; die Fig. wie die Tartaglias, vgl. not. crit.   intra] intus   12 equedistanter   13 MT] n t, mg. nt   perpendicularis] perpendicularis, mg. ↑   14 RH] rm   15 facit] faciet   20 absumitur

S. 383, 1 fertur] feretur 3 absumptum feretur 19 dimittatur 24 superficiei] superficies

S. 384, 2 equedistans 10 absumpti 12 RH] rm 14 OH] ′oh, mg. ′on HM] ′hm, mg. ′nm 16 in grauitate] supra scr. m. 1 27 portionem] proportionem

S. 385, 1 MO] mτ, mg. mo for. 2 quam] quae 5 id] id quod 8 HO] no 9 H] m NO] ro ad rectos angulos] equedistans 11 equedistanter 12 NO] ro HT] mt perpendicularis] sic, mg. ↑ 13 RH] rm

S. 386, 2 motum] imotum 7 quam ut habet hanc] ut hanc habeat 10 humidum] supra scr. m. 1 21 quae] om. 24 NO] sic, mg. ν′ω; mg. infra: de hoc puto

S. 387, 14 P] seq. de, del. m. 1 15 autem] aut 17 aut] χ in lacuna, mg. χ 18 persumpta] per sumpta ΩN] ωh mg. Πω 19 IP] ih

S. 388, 9 FR] τr, mg. m. 2 fr angulos faciet] facit angulos 12 FB] sic, mg. m. 2: f′r 14 inter] intra absumpta 21 reuoluetur] reuoluebtur, mg. ανακλιθησεται 27 secunda] solida Auf der Fig. fehlen mehrere Geraden und Buchstaben; dabei: linea br debet protrahi usque ad ip eductam

S. 389, 7 quam] om. 8 mg. quam relata mī m. 1 20 SL] sa 21 PF] p′f 24 PF] pω

S. 390, 4 SL] af 7 emiolia (so immer) 8 erit] sit OI] oτ IN] τn 10 mg. ταῦτα 11 RT] rf, mg. rτ

S. 391, 1 RT] rf inter] intra 6 uoluitur] aduoluetur 7 unum] supra scr. 8 feretur] fertur 10 ipsam] om. 14 quam] om.

S. 392, 1 habeat] hanc habeat 2 grauitate] grauitas 15 habeat] om. 19 quod CB] quae gd 24 ipsa] ipsam Für X hier und im folg. x, auf der Fig. ψ

S. 393, 1 KR, BX] krx 10 mg. ig̃ f̊το n̄

S. 394, 1 OΩ] ιω e corr., mg. ιω post ras. 5 PIN] sic, mg. pi′m PYI] lacuna, mg. flατο . ω . νhως 7 IY] ι, seq. lacuna; ebenso Z. 10 11 YI] ι post lac.; ebenso Z. 14, 15 16 XB] cd IY] ω 17 sept′imum theorema p′rimi, mg. az

S. 395, 13 MP] mh 16 ergo] igitur 17 et] quae autem PH] ph est

S. 396, 1 edúcatur, mg. et′ sit educta. 5 fertur] feretur 6 ad] super 12 perducit] perducitur mg. gd 13 L] om. et] supra scr. m. 1 14 A] zg 16 mg. uel l 17 mg. ου χρηστ̀ feretur] ferentur 22 IY] ιω 23 YI] ωι

S. 397, 2 IY] ιω 3 maior] lacuna 2—3 litt., mg. μ′ 4 OΩ] ωτ 7 MP] seq. minor quam, del. PM] quae pm 10 igitur rursum] rursum igitur Auf der Fig. ψ für X

S. 398, 1 ducatur] ducantur perpendicularis] perpendiculares 3 NO] no, mg. kτ 6 ad humidum] supra scr. m. 1 9 ΩI] ωι, mg. rω 10 MP] quae mh 11 ipsi HM] ipsius hω, mg. m autem] seq. lacuna 3—4 litt., mg. το δε ⊬ (del.) *H* ⊬ 12 H] om. 15 pelluntur 15 ad] ab 19 quam] om.

S. 399, 5 dimissa 7 posita] seq. in humido, del. nec] nec conuertetur 16 tetragonum] sic, supra scr. no-ta 17 tetragonum] (pr.) sic, supra scr. ac c (seq. ras.) Auf der Fig. fehlen die Buchst. OCT, für Z steht τ, für Ξ auch hier ψ

S. 400, 3 minorem—6 excessus] om. 8 in] hic des. fol. 58ᵛ 14 quod] corr. ex autem portio] corr. ex portionem 15 demissa] dimissa corr. ex dimissam 16 consistet 18 dimittatur 26 quae] et quae quidem] supra scr.

S. 402, 4 quae] om. ergo] que ergo 5 PH] pm 6 PZ] p'z, mg. p'm . pu(to) 11 TH] t'h, mg. tn for. 13 quae] supra scr. m. 1; seq. perpendiculares, sed del. th] tn' mg. th' Figur fehlt

S. 403, 3 mg. ακλινεσ 5 deorsum — 6 A] om. 9 consimiliter] seq. b, del. 16 mg. τοῦ ὃν 17 dimissa

S. 404, 2 habeant] habente humidum 9 BK] bd 12 sit — 13 axem] om. Auf der Fig. fehlen ausser den punktirten Geraden die Buchst. G und C (für C Rasur); Ξ ist x, für *X* steht q, für *Φ* ein sonderbares f (oder ψ?), R in ras.

S. 405, 1 DS] lacuna, mg. λc.lf 2 copuletur] copulata 4 aequalia] equa 8 ATD] ath ABL] abl corr. ex abi, mg. l. 11 cum] c̄ (tum?) 12 OGN] om. PYQ] pyq'·, mg. '·ngo 13 ATD] aod 14 PΦ] pψ OX] o seq. lac. 15 sunt] sunt autem

S. 406, 2 basem] seq. lac. 3—4 litt., mg. *H*λ*H* 3 NΞGO] nx.pno et a Q quae QFYP] om., lac. 10 litt., mg. nh, supra scr. p 10 DZ, DA] da dz 11 sunt ipsae] lacuna

S. 407, 4 unum] unum, duplam autem proportionem habent duo ad unum 6 DS] bis, sed. corr. 13 dimissa 16 minorem proportione] om. 20 hemiolium] emiolius quae] quae usque 21 dimissa

S. 408, 6 ΞO] xτ dimissa 8 nichil 10 *X*] m 14 dimissa 16 unum — 18 aequalem] ampliorem locum humectetur ab humido 21 dimissa 25 *Φ*] *Ψ*

S. 409, 1—8] om. 16 *Φ*] *Ψ* 18 itaque haec] autem hoc

S. 410, 2 ut] om. 8 AΞD] azd MN] no 10 *H*] lacuna, mg. λ̄ RG] rq V] b'·, mg. '·cB 11 MH] lacuna, mg. '·oμ HN] lacuna, mg. λ*N* Die Buchstaben ψ und x kaum zu unterscheiden. Auf der Fig. fehlen N, Ξ, F, G, H, V, M und die Gerade *Ψ*.

S. 411, 1 demonstratum] demonstrata OG] pt GX] Sx 2 M] o MY] oq 3 MC] oc 5 sectionibus] portionibus 7 sectiones] portiones 11 MY] oS dimissa 13 tangit] tangat; seq. χ in lac., mg. χ 14 angulo *X*] excessu

S. 412, 1 quae] seq. ao, del. portionis] sectionis 2 sectionis] om. 5 et contingat] contingens 18 NM] no 19 AMQ] apq 20 APO] apf 22 AMQL] ablk 23 OA] ta Auf der Fig. fehlt E

S. 413, 2 MV] qt VN] qkn 3 minor] minor est MV] 'o seq. lac., mg. o⋀S VN] S⋀u 7 inter] intra 13 inclinabitur] supra scr. re m. 1 15 ergo] igitur 17 X] y 19 grauitate] grauitate hanc

S. 415, 1 autem] a' 9 AX] quae aχ 10 OX] oy 11 XO] χa 17 axes] diametri 18 aequales] om. 20 portiones] seq. al, del. 23 axem] diametrum

S. 416, 1 X] y quam] om. N] h BC] quae bc 3 OG] oy, seq. 3 litt. PZ] pn; seq. lac. 3—4 litt. *M*$\varsigma\tau\eta\sigma$⋀*H*, mg. ķ p⋀ 5 OG] oy 6 GX] q3 7 PZ] p⋀ 8 ZT] ⋀t 17 KZ] k⋀, mg. kz 19 KZ] k⋀, mg. kz. pu(to)

S. 417, 8 axes] diametros 9 X] y mg. μ' ZT] ⋀t 10 HK] ⋀k 11 quae] corr. ex quod m. 1 12 mg. ⋀́ 15 k⋀ mg.

S. 418, 3 FP] h'p, mg. μ'p 8 Φ] f 10 sit] habeat, supra scr. sit m. 1 12 FP] zp 16 habeat] h̄t (habet) 18 FP] zp XO] $\chi\Gamma$, mg. $\acute{\chi}$o autem] autem in intermedio sectionum] portionum AXD] a (lac.) d 20 VI] fi 21 VY] fy

S. 419, 1 OG] t seq. lac. 3—4 litt. ipsius] ipsi 2 GX] xy mg. oθ~ 3 V] f 4 VΩ] fω 6 VΩ] fω 7 dimissa 9 inclinabitur] seq. ita, del. 10 dimittatur 12 unum] seq. contingat, del. 16 portionis] sectionis sectionis] portionis

S. 420, 1 signum] signa 3 HL] h7 6 mg. o' 10 ad] ad id 16 et] ē (est) VI] fi AVQ] afq 21 axem] diametrum 23 HLS] hle Ω] seq. lac. 8 litt., mg. $\tau o \upsilon$ Φ $\tau\tilde{\omega}$ $\bigtriangledown$ 25 HX] hl 26 VH] fh quae autem] lacuna 5 litt. XT] ⋀t mg. H⋀ 27 VY] fy

S. 421, 1 HX] h⋀ XT] ⋀t 2 Hm] hl MT] lt 9 VI] fi AVQ] afq 12 axes] diametros 14 triangulorum] om. VCΩ] ahbz 15 MSL] afq 19 MX] m⋀ VH] fh 20 XT] ⋀t HI] mi 22 VY] fy 23 MX] h⋀

S. 422, 1 XT] ⋀t MN] h⋀ 2 NT] lt 10 FP] no 12 ad —

13 BD] om. 13 FP] on mg. tn 15 AXD] amd VI] pi 19 VY] py 20 GX] gh 21 VΩ] pω V] p 22 VC] pe

S. 423, 2 VΩ] pω 4 dimissa posita] et posita 7 Φ] f nec] neque 8 dimittatur

S. 424, 5 mg. nō 7 quam] quam habet a] quod a 10 mg. nō for. 12 AHZ] amz 14 AHL] akhl

S. 425, 1 axes] diametros 2 VΩC] pωe 3 CB] eb 4 CR] er HX] h⁄\(?) VH] ph 5 XT] ⁄\t 6 YV] py 7 HX] h⁄\ XT] ⁄\t 8 HY] quae ny 9 YKC] ykt 17 Φ] f 19 Φ] f 22 TH] ih L non] hl

S. 426, 1 Φ] f BS quam BC] lac. 10—12 litt., mg. HSBIHCCB neque minor] nȝ quae ǫr 2 quae] quam quam C, R] om. MX] quae n⁄\ 5 HA] h/\ 6 AH] /\h 7 MX] h/\ TX] t/\ 8 MY] hy 11 Φ] f In fine: Archimedis de insidentibus in humido liber secundus explicit. completa fuit translatio eius decima die decembris anno X 1269.

Dass die Uebersetzung nach dem Griechischen gemacht ist, kann nicht nur aus der Beschaffenheit derselben geschlossen werden, sondern ist nunmehr durch die am Rande beigeschriebenen griechischen Wörter und Angaben über das exemplar Graecum urkundlich bestätigt. Ich will hier noch einiges der Art anführen, das sonst keinen Platz gefunden hat:

I S. 90, 10 *τῷ περιλείμματι*] circum accepto (derelicto m. 2), mg. *τω περιλημματι.*

I S. 298, 5 *τὰ παραβλήματα*] quoniam et secus iacta (?), mg. *ϖαραιλημα.*

I S. 304, 2 *λελάφθω δὲ παρ' ἂν δύνανται*] sumatur autem secus quam possunt, mg. *παραν δυνανται αι απο.*

I S. 304, 13 *παρὰ τὰν ἴσαν τᾷ N παραπίπτοντα*] penes equalem ipsi m secus cadentia, mg. *παραπιπτοντ·*

I S. 334, 6 *ὀρθὸς ἐσσεῖται*] erit rectus, mg. *ορθοσ.*

I S. 364, 16 *ἐπὶ γὰρ τὰν ἐπιψαύουσαν πεσεῖται*] super contingentes enim cadet, mg. *επι γ̸ ταν επιψαυουσαν.*

I S. 462, 29 *ἕξει οὖν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων*] habebit igitur utique similiter proportionum, mg. *ανομοιωσ* (er hat *ἂν ὁμοίως* übersetzt, denn utique ist *ἄν*).

Man sieht, dass der Uebersetzer vernünftiger Weise das Griechische beischrieb, wo der Sinn ihm unklar war. Direct von seiner griechischen Hds. spricht er u. a. an folgenden Stellen:

I S. 80, 26—82, 13 steht alles am Rande mit der Bemerkung: non est de libro, sed erat in exemplari greco ante sequens theorema (ab euclide sunt demonstrata m. 2).

I S. 296, 5 ποτὶ μὲν πάντα] hec ad omnia quidem, mg. in greco deficit (natürlich das durch die Punkte getilgte hec).

Der Figur I S. 299, die mit der meinigen stimmt, nur dass die spatia *Θ*, *I*, *K*, *Λ* wie übrigens auch in cod. Florent. in umgekehrter Ordnung stehen, ist beigeschrieben „spatium *tikl* in greco non erat sic diuisum, sed per equalia, quod mihi videbatur esse falsum."

Die Figur I S. 303, die dadurch von der meinigen abweicht, dass *ΔZK* und *KΛ* nicht senkrecht auf einander, *BH* und *ΔK* nicht parallel sind, hat die Bemerkung „in exemplari linea *dk* non secabat (per me *del.*)*) in duo equa lineam *ae*, sed (erat *del.*) secabat eam prope *a*, et linea *ak* brevis et perpendicularis super eamque (?) equedistans linee *gt*.

Bei der Gnomonfigur I S. 442 steht „ista figura in exemplari habebat omnes gnomones equales. praeterea puto, quod mensura latitudinis gnomonum debet esse non super diametrum tetragoni, sed super latera. tamen in exemplari erat super diametrum."

Bei der Figur I S. 463 steht „ultimum sine gnomone vacat. non debet esse" und „in exemplari duo maiores gnomones protrahebantur usque ad lineam *na* et in pede" . . . . (Schluss weggeschnitten).

Auch in der Katoptrik des „Ptolemäus" kommen griechische Wörter am Rande vor, ebenso im Buche de analemmate.

In den hier angeführten Stellen war nur von einem exemplar Graecum die Rede. Es sind aber auch solche vorhanden, wo ein zweites erwähnt wird, nämlich

1. de plan. aequil. I, 7 p. 158, 12 εἰ γὰρ μὴ ἰσορροπήσει τὸ *AB* τεθὲν ἐπὶ τῷ *Z* τῷ *Γ* τεθέντι ἐπὶ τῷ *Δ*] si enim non aequaliter repant *ab* positum super *z*, *g* autem positum super *d* (d. h. τὸ δὲ *Γ* τεθέν), mg. m. 1: in alio (a^0) si enim non equaliter repent *ab* positum super *z* ipsi *g* posito super *d*.
2. ibid. p. 158, 17 ff. stimmt die Uebersetzung genau mit dem Text, mg. m. 1 hic discordant exemplaria, was sich möglicherweise auf Z. 19 bezieht, wo cod. Florent. τὸ γη̄ ἁ δ̄ε hat, die Uebersetzung aber richtig: *g* quam quae *de*.
3. ibid. p. 160, 2 εἰ τὸ *Γ* μεῖζόν ἐστιν ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ *AB* (τὸ *A* cod. Florent.)] *n. g.* sit maius quam ut aequaliter repat ipsi *a*, mg. m. 1: in alio maius est, pot̄ equaliter repere ipsi *a*.
4. de plan. aequil. II, 8 p. 214, 11 ἔστω οὖν τοῦ μὲν *AKB* τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ *M*] sit igitur portionis quidem *akb* centrum grauitatis *m*, mg. m. 1: in alio erat p⁝ 9 (unleserlich).

*) Wiederum ein Beweis, dass wir das Arbeitsexemplar Wilhelms vor uns haben; er wollte anfangs *per medium* schreiben.

5. ibid. p. 216, 15 τριπλάσιον δὲ τὸ *ΑΒΓ* τρίγωνον τῶν τμαμάτων, ἐπειδήπερ τὸ ὅλον τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ *ΑΒΓ* τριγώνου] trigonum autem *abg* est triplum portionum, quoniam tota portio est epitrita trigoni *abg*; mg. m. 1: in alio sic. utique falsum.
6. de plan. aequil. II, 9, wo die Uebersetzung wie Tartaglia (Archimedis opp. III p. XLV) die Paraphrase des Eutocius in etwas gekürzter Gestalt statt des schwerfälligen archimedischen Beweises im Text hat, steht darauf (im Text) der echte Beweis mit dem Zusatz: in alio exemplari graeco sic habebatur ab illo loco quoniam enim proportio (was Tartaglia raschweg mit abdruckt). Diese Stelle beweist, wenn es nöthig ist, dass auch bei den übrigen Citaten in alio an ein zweites griechisches Exemplar gedacht werden muss.
7. plan. aequil. II, 10 p. 234, 1 ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς *ΟΝ* καὶ τᾶς *ΤΝ*] compositam ex *on* et *cn*, mg. m. 1 (später hinzugefügt): in alio ex duplo linee *od*.
8. ibid. p. 234, 5 καὶ ὁ ἀπὸ *ΑΖ* κύβος] om. cod. Florent., „et cubus qui ab *az*" Tartaglia, „vacat secundum aliud exemplar" bei dieser Stelle Ottobon. mg. m. 1, später hinzugesetzt.
9. quadrat. parab. praef. II p. 296, 11 νῦν δὲ ὑφ' ἡμῶν τεθεώρηται] ab aliis speculatum est, mg. m. 1: in alio a nobis.

Hierzu kommen noch in dem Buche περὶ κωνοειδέων mehrere Stellen, wo eine abweichende Lesart am Rande notirt ist mit dem Zusatz ſm̄; denn das kann doch wohl nur secundum aufgelöst werden, d. h. „das zweite Exemplar". Allerdings ist es so sehr auffallend, dass in derselben Schrift sonst mehrmals von dem exemplar Graecum in den Randbemerkungen gesprochen wird (s. oben), und dass die mit sm̄ angeführten Lesarten immer unrichtige sind; besonders anstössig ist die Stelle p. 462, 18, wo im Text eine Lacune ist und am Rande bh sm̄ steht, was mit der falschen Lesart des cod. F stimmt. Aber trotz dieser Schwierigkeiten sehe ich vorläufig keine andere Möglichkeit der Erklärung, als dass wir annehmen müssen, der Uebersetzer habe auch hier ein zweites griechisches Exemplar benutzt. Die Stellen sind folgende:

I p. 322, 6 *ΔΞ*] *ΑΞ* F; *lx*, mg. *ax* sm̄.
I p. 344, 16 *ΓΑ*] *ΓΔ* F; *ga* in ras. m. 1, mg. *gd* sm̄.
I p. 348, 1 *ΤΜΒ*] *ΤΔΒ* F; *cmb*, mg. *clb* sm̄.
I p. 392, 7 *ΔΙ*] *ΔΓ* F; *di*, mg. *dg* sm̄.
I p. 410, 1 *ΑΧ*] *ΑΓ* F; *aq*, mg. *ag* sm̄.
I p. 434, 26 *ΖΔ*, *ΔΒ*] *ΖΔΒ* F; *zdb*, mg. *zlb* sm̄.*)

*) Unsicher ist I p. 390, 26 mg. „deficit sm̄" (?), wo ich nicht weiss, ob die Lacune des cod. F auch in Ottobon. ist, und in Prop. 20 „*dg* sm̄", wo die Ueber-

In den übrigen Büchern (de sphaera et cyl., dimensio circuli, de spiralibus, Eutocius) finden sich solche Bemerkungen nicht. Denn die Notiz zu III p. 354, 28 *συναμφότερος ἑκάστη*] simul utraque unicuique, mg. „vel unaqueque" ist ganz verschieden; der Uebersetzer hat die Stelle nicht verstanden und konnte desshalb nicht entscheiden, ob das *εκαστη* der Hds. Nominativ oder Dativ sei. Ebenso wenig gehören hierher die Stellen, wo eine Randbemerkung den Zusatz for(te) hat; denn das sind offenbar Vermuthungen und Berichtigungen, die auf Conjectur des Uebersetzers beruhen.

Wir müssen also schliessen, dass die eine griechische Hds. des Uebersetzers nicht die Bücher de sphaera, dim. circ. und de spiral. enthielt, auch nicht die Commentare des Eutocius, dagegen de plan. aequil. I—II, quadr. parab. und, wenn die oben vorgetragene Deutung des s̄m̄ richtig ist, de conoidib. Da wir aber unten sehen werden, dass die andere Hds. des Uebersetzers mit unserer Urquelle, dem codex G. Vallae, aufs engste verwandt ist, hat sie gewiss nicht die beiden Bücher *περὶ ὀχουμένων* enthalten; denn sie fehlten im cod. Vallae. Also gelangen wir zu dem Resultate, dass Wilhelm zwei griechische Handschriften benutzte, von denen die eine nur die auf die Mechanik bezüglichen Schriften des Archimedes enthielt: plan. aequil. I—II, quadr. parab. (dessen eine Hälfte der Mechanik anhört) und *περὶ ὀχουμένων*, womit wahrscheinlich das Buch *περὶ κωνοειδέων* verbunden war, ohne Zweifel wegen des mit den Büchern *περὶ ὀχουμένων* eng verwandten Inhalts (im II. Buche *περὶ ὀχουμ.* werden Sätze aus de conoid. fortwährend angewandt). Vielleicht standen in diesem corpus mechanicorum auch die inhaltlich nicht allzu fernstehenden Bücher Ptolemaeus de analemmate und Ptolemaeus-Herons Katoptrik. Wir wollen sie im folgenden mit O^2 bezeichnen.

Diese Hds. nun war nach Ausweis der griechischen Randbemerkungen der genannten Bücher, in alter Minuskel geschrieben mit vielen Abkürzungen (*ꝉ ἄρα, ϛʹ καί, δεδυκ⁰ δεδυκός, χρηστ̀ χρηστόν, ουκ̃ οὐκοῦν, μ̦ʹ μείζων* usw.), die der Uebersetzer nicht verstand, da er öfters ihnen entsprechend Raum offen lässt, und die eben desshalb dafür bürgen, dass die griechischen Randbemerkungen der Vorlage treu nachgemalt sind. Accente scheinen wenigstens theilweise gefehlt zu haben, ebenso Spiritus. Die Hds. war an mehreren Stellen lückenhaft (*περὶ ὀχουμ.* I, 8; II, 2). Sie stammte nach dem Schriftcharakter ohne Zweifel aus der Zeit, welcher wir überhaupt unsere besten Hdss. der Mathematiker verdanken, dem X—XI. Jahrh. Noch ist zu bemerken, dass wir aus den griechischen Randbemerkungen lernen, dass auch

---

setzung sich vom griechischen Text zu entfernen scheint; denn die Worte „diametrus autem ipsius que *ag*", worauf sich diese Bemerkung bezieht, haben im Griechischen nichts Entsprechendes. Die Bemerkung zu p. 420, 11 *to* s̄m̄ bezieht sich wohl auf die Lesart des F *ΘO* für *ΘP*.

die Bücher περὶ ὀχουμένων in dorischem Dialekt überliefert waren (vgl. die Formen καταβαντι und εσειται oben, zu II p. 369).

Wir wollen jetzt die Bücher de plan. aequil. und quadr. parab. mit unserem griechischen Text vergleichen. Für die Uebersetzung benutze ich die Ausgaben von Tartaglia und Gauricus, da eine Collation derselben mit der Hds. für plan. aequil. I, 1—7 und die Vorrede der quadr. parab. ergeben hat, dass sie, einige grobe Schreibfehler abgerechnet, welche für unsere Frage unerheblich sind, die Hds. genau reproduciren. In den genannten Theilen finden sich folgende Abweichungen (ausser den schon angeführten Randbemerkungen in alio):

Ueberschrift incipit liber Archimedis (Archimenidis T) de centris grauium uel de (ualde planis T) aequerepentibus. Die Zusätze „a N. Tartalea Brixiano interprete addita", so wie die Ueberschriften „petitiones sunt sex", „petitio prima", „theorema I propositio I" usw. fehlen, ebenso wie gesagt die Interpolation bei T p. 5 „dixerunt enim — premittitur."

II p. 142, 3 ἀπὸ ἴσων] ab aequalibus O, aequalibus T 13 τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων] aequalium et similium T, -um bis in ras. m. 1 O 20 πλευράς] latera T, la///// O.

II p. 144, 1—3] om. T, si magnitudines ab aliquibus longitudinibus equaliter repant et equales ipsis ab eisdem longitudinibus equaliter repent O 4 ἐπὶ τὰ αὐτά] ad eadem O, ad eandem partem T 6 τούτων] hiis O, his T 10 οὐκ ἰσορροπησοῦντι] non equaliter repent O, aequaliter repent T 11 ἰσορροπεόντων] equaliter repentium O, aequaliter repetentem T 19 ποτετέθῃ] ποτιτεθηι F, appositum est O, apponitur T.

II p. 146, 15 ὅτι καί] quod et O, quod T 17 τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος] que a minori O, a minori T.

II p. 148, 2 τᾶς ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα] connectentis centra O, contentis centrum T 22 τὰ κέντρα] centra O, centrum T 24 ἔχωντι] habeant T et in ras. m. 1 O ibid. ἴσαι ἔωντι] equales sint, del. erunt ante sint m. 1 O, aequales sint T.

II p. 150, 9 ἐκ πάντων] ex omnibus O, et omnibus T. 16 ἀπὸ τοῦ μέσου] a media T; et O, del. mag post a.

II p. 152, 8 τᾶς ἐπιζευγνυούσας] connectentis O, centris T 12 τὸν αὐτὸν λόγον] eandem rationem O, eadem ratione T 21 σύμμετρον τουτέστι] commensurata hoc est O, commensurat he T.

II p. 154, 1 ὥστε] qua O, quia T 2 κείσθω] ponatur T; et O, mg. m. 1 iaceat 6 τᾶν *ΑΗ*, *ΗΚ*] horum *lh hk* O, eorum *lh kh* T 12 Z] *z* O, *x* T; item l. 13, 15, 17 bis, 18, 20, p. 156, 1, 2, 10 14 mg.

δισον m. 1 O 19 *οὖν*] g̊ O, ergo T 21 *τοῖς ἐν τῷ Α τμαμάτεσσιν*] decisionibus que in *a* O, decisionibus quam in *a* T.

II p. 156, 2 *τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ ΑΗ*] decisionum earum que in *lh* O, decisionum erunt quae in *lh* T 6 *ἐστι*] sunt T; bis O, sed corr. m. 1 8 *ὁμοίως δὲ δειχθήσεται*] similiter autem demonstrabitur O, similiter demonstraretur T 14 *κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ Β*] penes *e* penes (del. m. 1) *b* autem O, penes *e b* autem T. Mg. *ἐπικείμενον* O 20 *ἃ μὲν ΑΕ*] que quidem *le* O, quam quidem *le* T.

II p. 158, 1 *τοῦ μὲν ἄρα Α κειμένου*] ipsius quidem igitur *a* posito O, mg. m. 1 ipso; ipsius igitur quidem *a* posito T 7 *ἀσύμμετρα*] incommensurate O, incommensurabiles T 8 *ΕΖ*] *ez* O, *ex* T; item l. 9, 19, 20. 9 *μᾶκος*] longitudinē O, longitudine T 12 Z] *z* O, *x* T; item p. 160, 1 13 *Γ ἢ ὥστε*] *Γ ὥστε* F, *g* ut O, *g* aut minor sit prius maior ut T 14 *Γ ἢ οὗ*] *ΓΗ ου* F, *gh* quo O, *g* quomodo T.

(quadr. parab.) Ueberschrift: Liber Archimedis qui dicitur quadratura parabolae O, incipit Archimenidis (Archimedis T) quadratura parabolae GT.

II p. 294, 3 *ὅς*] qui O, quod GT 5 *τοῦ μὲν τετελευτηκότος*] mortui quidem O, grauiter mg. m. 1; mortuum quidem GT 7 *θαυμαστοῦ*] mirabili O, mirabile GT 10 *τεθεωρημένον*] theorizatum O, theorematum GT 12 *διὰ μηχανικῶν*] per mechanica O, per mathematicam G, per mecanicam T 12 *διὰ τῶν γεωμετρικῶν*] per geometria O, per geometriam GT 14 *ἐπεχείρησάν τινες*] conati sunt quidam O, conati quidem GT 19 *οπερ* mg. O.

II p. 296, 1 *κατεγνωσθεν* mg. O 6 *εὐθείας καί*] recta et O, recta GT ibid. *ἐπίτριτον*] epitrita O, epytrica GT 15 *τᾶν διαμέτρων*] diametrorum G et post del. respectu O, dyametrorum T ibid. *ἀποδεδείχασιν*] demonstrauerunt O, demonstrarunt GT 16 *τὰς σφαίρας*] speras O, in sphaeras GT 17 *τᾶν διαμέτρων*] diametrorum OG, dyametrorum T ibid. *ἔτι*] adhuc O, et adhuc GT 20 *τοῦ κυλίνδρου*] cylindri O, chilindri GT 23 *ἔγραφον*] scripserunt O, sumpserunt GT 26 *ἀναγμένων*] *αναγμενον* F, inductum GT, red (del. m. 1) inductum O.

II p. 298, 2 *διὰ τῶν μηχανικῶν*] per mechanica O, per mathematicam G, per mecanicam T 3 *ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων*] qualiter per geometrizata O, aequaliter per geometricata GT 4 *προγράφεται*] p̄scribuntur O, perscribuntur GT.

Von dieser langen Reihe ist weitaus das meiste Schreib- oder Lesefehler der Herausgeber oder wohl zum grössten Theil ihrer Vorlage. Interpolation, und zwar eine sehr grobe und handgreifbare, finden wir nur II p. 158, 13.

Wir können also der Hauptsache nach den Ottobon. nach den Ausgaben von Gauricus-Tartaglia beurtheilen; namentlich werden sie kaum etwas durch Conjectur berichtigt haben. Wenn wir also von den zufälligen Verunstaltungen absehen, giebt eine Vergleichung mit unserem griechischen Text das Resultat, 1) dass sehr viele, und zwar meist die schwereren, Fehler unserer griechischen Handschriften schon in der Handschrift des Uebersetzers da waren. Beispiele:

II p. 144, 14 ἰσορροπησοῦντι] ισορροπουντι F, aequaliter repunt

II p. 146, 5 ἰσορροπεόντων] ισορροπεοντα F, aequaliter repentes 7 δή] δε F, autem 14 ἐπὶ τὸ ἀπό] ἀπό F, a

II p. 148, 12 προδεδείκται] δέδεικται Eutoc., preostensum est

II p. 150, 9 δῆλον οὖν] δῆλον F, palam 18 τῶν κέντρων] του κεντρου F, centri

II p. 152, 4 καί — 5 αὐτῶν] om. F, om. 13 ἀντιπεπονθότως] αντιπεπονθοτων F, contra passis

II p. 156, 6 καί — 7 πλήθει] om. F, om.

II p. 158, 5 ἀντιπεπονθότως] αντιπεπονθοτων F, contra passis 14 ἢ ὥστε] ὥστε F, ut; ebenso Z. 16 τῷ Γ ἢ οὗ] τω $\overline{\gamma\eta}$ ου F, ipsi gh quo

II p. 160, 8 ἐφ' ἅ] εφ' ο F, ad quod

II p. 162, 12 πλευρᾶν] πλευρας F, lateris

II p. 162, 19 ποκὰ ἁ καταλειπομένα] ποια καταλειπομενα F, aliqua relicta

II p. 170, 13 *ΕΔΝ*] *ΕΔΗ* F, edh 14 *ΕΔΗ*] *ΕΔΝ* F, edn

II p. 172, 6 *ΔΘ*] *ΒΘ* F, bt

II p. 174, 17 ποκά] αποκα F, aliqua (cfr. p. 162, 19)

II p. 176, 9 ἔστω] εσται F, erit 21 ὅλας] om. Eutoc., totius

II p. 178, 12 εὐθείας] (alt.) και F, et

II p. 182, 18 ἐσσεῖται] ει F, si

II p. 186, 25 *ΡΣΠ*] *ΡΠΣ* F, rps

II p. 188, 6 ἔχωντι] εχοντα F, habentia*) 16 ταῦτα] τουτο F, hoc

II p. 198, 3 δή] δε F, autem

II p. 200, 12 λοιποῦ] λοιπον F, reliqua (?) 17 εἴη κα] ειη και F, erit et 19 τᾶς] τα F, *ipsa* enim quae per m penes bd ducta

II p. 204, 18 διάμετρος] διαμετρων F, diametrorum 19 rectilineum, 21 rectilinei (vgl. II p. 205 not. 7; auch ὅλου, ibid. not. 8, ist da: totius)

II p. 210, 22 τὰ τμάματα] τω τμηματι F, portioni

II p. 218, 4 μεγίστας τᾶν ἀνάλογον] μεγιστας ταν αναλογιαν F, maximam proportionem

---

*) Aber vielleicht ist Z. 3 zu lesen εἴ κα ᾖ δύο; Tartaglia hat sint, d. h. wohl *si* sint. ἅ Z. 4 fehlt bei ihm, wohl nur durch Versehen.

II p. 228, 23 δή] δε F, autem

II p. 230, 22 ἐπί] απο F, a   ἐφαπτομένᾳ] εφαπτομεναι F, attingentes

II p. 232, 13 *IP*] *NT* F, nc O (hb T)   17 καὶ ὃν ἁ διπλασία] ὅν om. F, et dupla   22 ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς *AZ*] εκ τε τας *AZ* F, ex linea az O (ex dupla ipsius az T aus Conjectur)

II p. 234, 17 τᾶς *AZ* — 18 διπλασίας] om. F, om.   27 τὰν *NT*] *NT* F, nc (nicht ipsam nc, c = t).

II p. 236, 1 *MN*, *NT*] *MNT* F, mnc; ebenso Z. 3, 5, 16, p. 234, 25   2 *NΞ*, *NO*] *NΞO* F, nxo; ebenso Z. 4   4 ὡς *ZH*] scr. ὡς ἁ *ZH*, ut zh (nicht ut quae zh)   6 *ΞN*, *NO*] *ΞNC* F, xno   10 *MN*, *NΞ*, *ON*, *NT*] *MNΞ ONT* F, mnx onc   16 *ΞN*, *NO*] *ΞNO* F, xno   22 ἄρα] om. F, om.   23 ἐπ' εὐθείας τᾷ *XP*] επ' ευθειας τας *XP* F, in recta qr (q = *X*)

II p. 294, 4 τίν] τινα F, quendam   8 τοι] om. F, om.   13 οὖν] om. F, om.   17 ὅλου] totius   19 ὥστε] ὅπερ F, quae quidem (mg. οπερ)

II p. 296, 2 ὑπ' εὐθείας τε καί] om. F, om.   3 προτέρων] πρωτων F, primorum   11 αὐτὰν ἑαυτᾷ] αυταν F, ipsum   23 δέ] om. F, om.*)

II p. 298, 8 ἦ δὲ ἁ μὲν *BΔ*] η δε *BΔ* F, quae autem bd

II p. 300, 2 ἁ δέ] η δε F, sit autem (d. h. ἦ δέ)   16 κα ἀχθῇ] καταχθειη F, producatur   21 *KH*] *KI* F, ki

II p. 302, 13 εἰς] om. F, om.

II p. 304, 26 κάτω νοείσθω] κατανοεισθω F, intelligantur

II p. 306, 1 δηλονότι—*BΓ*] habet   5 ἔχοντι] εοντι F, existenti   9 παρὰ τὸν ὁρίζοντα αἵ δέ] αυτον οριζονται δε F, ipsi orizonti ducte autem

II p. 308, 9 et 10 ὅτι] quod   20 δή] δε F, autem   25 δή] δε F, autem

II p. 310, 6 δέ] om. F, om.

II p. 312, 28 τάν *BΔ*] της *BΔ* F, ipsius db

II p. 314, 15 μείζονα οὖν λόγον ἔχει] μειζονα λογον εχον F, maiorem proportionem habens

II p. 316, 28 κρεμασθῇ] κρεμασθησεται F, suspenditur**)

II p. 320, 4 δέ] δη F, itaque   5 ἐς ἴσα τμάματα] ες τα τμηματα F, in sectiones   6 *IΓ*] om. F, om.   τᾶν τομᾶν] τας τομας F, sectione   9 ἐπί] κατά F, secundum   19 *Δ*] *Δ* F, d (so immer)

II p. 324, 9 κα] καί F, et   14 δέ] δη F, itaque

---

*) Natürlich sind in der schwierigen Vorrede, für welche ich eine Collation von Ottobon. besitze, nur solche Stellen berücksichtigt, wo der Fehler unzweifelhaft ist, also z. B. nicht p. 294, 9, wo γεωμετρικῶν θεωρημάτων vielleicht richtig ist (geometricorum theorematum O), auch nicht p. 296, 15, 18, 22, wo die Lesart unsicher ist.

**) Dagegen λυθῇ solvatur.

II p. 326, 23 οὖν] om. F, om. 7 δή] δε F, autem
II p. 328, 16 ὃ ἔδει δεῖξαι] om. F, om.
II p. 330, 8 δή] δε F, autem 17 ΠΟ] ΠC F, ps
II p. 332, 11 ἄρα] om. F, om.
II p 336, 11 ΒΘΓ] ΒΔΓ F, bdg 26 κώνου] om. F, om.
II p. 338, 4 ὅτι τᾶν ἀπό] οτι απο F, quod a 5 καθέτων] καθετος, F, cathetus 20 τᾶς τομᾶς] om., αιμ F
II p. 346, 13 τεθέωντι] συντεθεωντι F, componantur
II p. 348, 12 Δ] Δ, Ε F, de
II p. 350, 15 γάρ] om. F, om. 18 αὐτὰ ταῦτα] τα αυτα F, ipsa
II p. 352, 7 ἕως κα γένηται] ωστε καταγενηται F, ut fiat 9 δή] δε F, autem.

Wenn man hinzu nimmt, dass noch die zahlreichen Interpolationen und Abweichungen von den Lemmen des Eutocius in den Büchern de planor. aequil. in der Uebersetzung sich wiederfinden, und dass sie an Stellen wie plan. aeq. I, 7 (II p. 161 not.), II p. 162, 3; 178, 18, wo ohne Zweifel grössere Verstümmelungen vorliegen, keine Hülfe gewährt, so kann es durch diese Reihe von Beispielen als festgestellt gelten, dass auch diejenige Hds. des Uebersetzers, welche inhaltlich so bedeutend vom codex Vallae abwich (O^2), in den Hauptzügen auf derselben Stufe der Textesgestaltung stand als dieser. Das war nun auch desshalb zu erwarten, weil sie beide ohne Zweifel ungefähr aus derselben Zeit stammten. Wie die gemeinsamen Interpolationen in den Büchern de plan. aequil. beweisen, gehen sie beide auf eine nacheutocische*) Bearbeitung der Ausgabe des Isidoros zurück.

2) Andererseits ist es aber eben so begreiflich, dass die beiden Hdss., deren Schicksale längere Zeit getrennt waren, nicht überall die gleichen Abschreiberfehler aufweisen. Namentlich waren an vielen Stellen die kleineren Irrthümer des cod. Vallae nicht in O^2 eingedrungen. Beispiele:

II p. 144, 19 ποτετέθη] ποτιτεθηι F, appositum est
II p. 148, 1 ἐσσεῖται] ουν F, erit
II p. 154, 12 τοῦ Ζ] το Ζ F, ipsius z 21 ἴσα] ισον F, aequales
II p. 160, 24 ἀμφοτέρων] αμφοτερον F, utrisque
II p. 164, 5 ἐφαρμοζομένων] εφαρμοζομενον F, adaptatorum
II p. 166, 10 ΔΒ] ΑΒ F, db 16 ΑΒΔ] ΑΒΓΔ F, abd 17 ΒΔΓ] ΑΔΓ F, dbg
II p. 168, 1 ΒΔΓ] ΑΔΓ F, dbg
II p. 170, 12 ΕΔΝ] ΕΔΗ F, edn

*) S. Neue Jahrb. Suppl. XIII S. 568. Dass auch die Bücher περὶ ὀχουμένων in der Ausgabe des Isidoros noch standen, habe ich aus anderen Gründen vermuthet a. a. O. S. 577.

II p. 172, 6 *ΔN*] *ΔH* F, dn 7 *NZ*] *HZ* F, nx

II p. 174, 3 ταῦτα] τα αυτα F, hoc 15 διὰ τούτου] δια του F, per ipsum (scr. δι' αὐτοῦ)

II p. 176, 1 *ΘI*] *ΘIE* F, it 7 *ZO*] *ZΘ* F, zo (r = z) 14 *MK*] *MZ* F, mk

II p. 178, 1 ἔχει] om. F, habent 8 *KΞ*, *ZO*] *KZ*, *ΞO* F; kx, zo (r = z)

II p. 180, 14 ἐντι κείμενα] αντικειμενα F, sin (sunt?) iacentia 26 *ΔΓ*] *B* F, dg

II p. 184, 10 ἐκβαλῇς] εκβαλη F, educas 11 ἐσσεῖται οὖν] εσται F, et erit *)

II p. 188, 10 ἀντι πεπονθότως] αντιπεπονθοτων F, contrapassim

II p. 192, 7 καὶ εἰς . . . ἴσον] bis F, semel 18 εἰ δέ κα] ει δε και F, si 23 *A*] *Δ* F, a

II p. 194, 1 *AEKΓ*] $\overline{EZ}$ $\overline{IK}$ F, aerg

II p. 196, 4 ἐν] om. F, in 8 ἐπεί] επι F, quoniam 9 δέ] δη F, autem 11 τάς — p. 198, 1 διαιρέοντα] om. F, habet (nur mit anderen Buchstaben)

II p. 198, 6 τό] το *O* F, centrum 8 τάν] επι ταν F, linea(m)

II p. 200, 4 ἀλλ' — 5 *K*] om. F, habet 8 *ZΔ*] *Δ* F, zd 10 *E*] *B* F, e

II p. 206, 7 ἐσσεῖται δή] εσται δε F, erit ergo 14 ἐστιν ἐπί] επι F, est in

II p. 208, 10 δυνατόν ἐστιν] δυνατον F, possibile est 18 *Z*] *AZ* F, z *Z*] *EZ* F, z

II p. 212, 4 *A*] *Δ* F, l 22 τό] om. F, quod

II p. 214, 4 οἷον] ομοιον ως F, qualis 7 *ABΓ*] *ABΔ* F, abg 9 *BA*, *BΓ*] *BA*, *AΓ* F; ab, bg 10 *HΔ*] *H* F, hl 12 *N*] *H* F, n 10 παρὰ τὰν *BΔ*] om. F, et ipsi bd aequidistanter ducantur

II p. 216, 3 *ΣΞ*] *EΞ* F, cx (c = s)

II p. 218, 5 καὶ τᾷ τριπλασίᾳ] om. F, et triple

II p. 228, 9 ἅ] om. F, quae**) 21 ἐν] om. F, in τομᾷ] τομαι F, portione 23 *AΔEΓ* τόμου διάμετρός ἐστιν ἁ *ZH*] om. F, sectoris adeg diameter est quae hz

II p. 230, 2 *HZ*] *EZ* F, hz 5 τὸ ἀπὸ τᾶς *AZ* τετράγωνον] το απο της *AZ* τετραγωνων, tetragonum quod a linea az 7 *ΔH*] *ZH* F, dh 10 *AΔEΓ*] *AΔΓ* F, agde 12 *ZB*] *ZE* F, zb 13 *NO*] *NΘ* F, on *MN*, *NO*] *MNΘ* F, mn no 14 *NΞ*] *MΞ* F, nx 16 ὅπου ἄν] οπου εαν F, ubicunque ἕτερον] στερεον F, alterum

---

*) Es ist also zu schreiben: ἔρχονται, καὶ ἐσσεῖται τὸ τοῦ *HBΓ* τριγώνου κέντρον.

**) II p. 228, 19 ἀμφοτέρᾳ] αμφοτερας F, ambobus (d. i. ambabus); zu lesen ἀμφοτέραις wie p. 230, 6 (ambabus Tartaglia).

II p. 232, 11 *ΔΒΕ*] *ΔΒ* F, dbe 19 *ΔΗ*] *ΔΝ* F, dh 24 διπλασίας] om. F, dupla

II p. 234, 5 καὶ ὁ ἀπὸ *ΑΖ*] om. F, cubus qui ab az 7 τᾶς *ΑΖ*] και της *ΑΖ* F, dupla ipsius az 11 *ΝΤ*] *ΝΓ* F, nc (die Fehler in F Z. 10—11 hat T nicht) 12 διπλασίας] β′*Η* F, dupla ipsius no 25 πενταπλασία] om. F, quintupla

II p. 236, 9 αἱ] εἰσιν αἱ Eutoc., sunt quae 14 *ΝΟ*] *ΝΘ* F, no

II p. 238, 5 *ΗΖ*] *ΝΖ* F, hz 7 *ΡΙ* — 8 κέντρον] om. F, ri et est totius quidem portionis centrum 10 *ΑΔΕΓ*] *ΑΒΕΓ* F, adeg

II p. 298, 10 *ΔΓ*] *ΑΓ* F, dg 11 τᾷ *ΔΓ*] om. F, ipsi dg 12 ἐπιψαύουσα] επιψαυουσαι F, contingens

II p. 300, 3 ἢ αὐτὰ διάμετρος] η αυτα τα διαμετρω F, aut ipsa diameter 5 παρὰ τὰν κατὰ τὸ *Β*] om. F, penes eam quae secundum b 10 δέ] δη F, autem

II p. 302, 1 ποτὶ τὰν *ΒΙ* μάκει οὕτως ἁ *ΒΓ* ποτὶ τὰν *ΒΘ* δυνάμει] om. F, ad bi longitudine, ita quae bg ad bt potentia 2 ἀνάλογον ἄρα ἐντὶ αἱ *ΒΓ*] om. F, proportionales ergo sunt quae bg 5 *ΔΖ*, οὕτως ἁ *ΘΖ* ποτὶ τάν] om. F, ad lineam dz ita quae tz (Ottob., Tartaglia, ti Gaur.) ad lineam th 16 ἀνάλογον] (Glosse zu εἰς τὸν αὐτὸν λόγον Z. 13) om. 18 παρά] ποτι F, penes

II p. 304, 16 ἁ *ΚΔ*] om. F, quae lk (zu schreiben also ἁ *ΛΚ*)

II p. 306, 11 κάθετοι] καθετοις F, katheti 23 κατασταθῇ] κατασταθεν F, statutum est 26 γάρ] ουν F, enim

II p. 310, 1 *Δ*] *Α* F, l *ΖΔ*] *ΖΑ* F, zl 24 ἔχει] εχον F, habet

II p. 312, 8 *ΔΓΚ*] *ΔΕΚ* F, dgk

II p. 314, 9 ἔχον] εχοντα F, habens 11 ἰσορροπεῖ] ισορροπειτω F, aequaliter repit

II p. 318, 5 *Δ*] *Α* F, l 13 *Ε*, *Η*] *Ε* F, eh

II p. 320, 14 *ΑΒΓ*] *ΑΓΒ* F, abg 22 *ΞΙΓ*] *ΖΙΓ* F, xig

II p. 322, 9 *ΔΖ*] *ΑΖ* F, lz 10 *ΒΙ*] *ΒΗ* F, bi

II p. 324, 20 *ΒΓΔ*] *ΑΓΔ* F, bdg (also zu lesen: *ΒΔΓ*)

II p. 326, 8 τὰ αὐτά] τα F, ea(n)dem 19 *ΜΗ*, *ΝΙ*] *ΘΗ ΠΙ* F, mh ni

II p. 328, 7 δή] δε F, itaque 8 *ΡΧΨΩΔ*] *ΟΧΨΩΔ* F, rqxωd 10 *Ρ*] *ΡΧ* F, r

II p. 330, 5 *ΒΓΘ*] *ΒΓΔ* F, btg (also zu lesen *ΒΘΓ*) 13 ἐπὶ τὸ *Γ* εὐθεῖαι] επι τα *ΓΕ* ευθεια, apud g rectae 19 *ΒΘΓ*] *ΒΘΙ* F, btg

II p. 336, 11 *ΒΘΓ* τμᾶμα] *ΒΘΓ* F, portio btg

II p. 336, 14 ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς ἀγομέναν] απο επι τας καμπυλας γραμμας απτομεναν F, a curua linea ductam

II p. 338, 5 ἀγομέναν] αγομενασ F, ductarum 10 ἐν τμάματι περιεχομένῳ] εικα τμημα περιεχομενον F, in portione contenta
II p. 344, 19 κώνου] om. F, coni 26 ἐπεί] επι F, quoniam
II p. 346, 9 I] ϙω̄ι F, i 11 ἐλάσσονα] ελασσον F, minora
II p. 348, 10 H, Θ, I] E, Θ, Γ F, hti
II p. 350, 5 $A\varDelta BE\Gamma$] $A\varDelta EB\Gamma$ F, adbeg 6 $A\varDelta B$] $A\varDelta$ F, adb
II p. 352, 23 ἄρα] om. F, ergo

Wenn auch einige dieser Fehler unserer Hdss. möglicherweise dem cod. F eigenthümlich sind und nicht in seiner Vorlage, dem cod. Vallae, standen — einige der Art habe ich übrigens weggelassen so wie auch diejenigen Stellen, welche auf die Lesart des Uebersetzers keinen sicheren Schluss gestatten —, so bleiben doch Stellen genug übrig, wo dem Uebersetzer offenbar eine reinere Ueberlieferung vorlag, wenn auch allerdings meist in ziemlich geringfügigen Dingen; es wird also durch die Uebersetzung an diesen Stellen für manche Conjectur urkundliche Bestätigung gewonnen. Daneben bietet die Uebersetzung auch 3) an manchen Stellen, wo die Lesart unserer Hdss. an und für sich unanstössig ist oder doch bis jetzt keinen Anstoss gegeben hat, Varianten. Wo diese unzweifelhafte Irrthümer enthalten, können sie ganz gut den Herausgebern (Tartaglia und Gauricus) oder ihrer Vorlage zur Last fallen, und erst eine vollständige Collation des Ottobon. kann hier entscheiden, welche Varianten zu berücksichtigen sind. So hat II p. 230, 15 οὕτως ἅ] ita que O, aber T itaque tres quintas, II p. 306, 20 εἴ κα οὖν] si igitur O, aber si GT (dagegen hat T die bei G sich findende Wiederholung von p. 304, 23 — 306, 19 gestrichen), II p. 308, 14 fehlen die Worte τὸ δὲ $\Gamma\varDelta H$ ἔστω τρίγωνον bei GT, aber nicht in O. Ich werde daher die folgenden Varianten nur solchen Stellen entnehmen, wo die Lesart des Ottob. mir bekannt ist oder besondere Umstände für die Treue der Ausgaben sprechen.

II p. 150, 16 εἴ κα τά τε ἴσον ἀπέχοντα] sed equaliter distantes, d. h. τὰ δὲ ἴσον ἀπέχοντα
II p. 152, 15 ἔστω τι τὸ $E\varDelta$] τι om.
II p. 154, 6 καί] om. 7 ἐστιν] om. 15 ἰσάκις] quotiens, d. h. ὁσάκις (weniger gut)
II p. 158, 12 τῷ Γ τεθέντι] g autem positum, d. h. τὸ δὲ Γ τεθέν (s. oben)
II p. 170, 16 ἔστιν ἄρα] est ergo. et cetera (d. h. ἔστιν ἄρα καὶ τὰ λοιπά?)
II p. 180, 3 ἐπεί] et quoniam (d. h. καὶ ἐπεί)
II p. 206, 11 τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου] trigoni quidem *abg* T (d. h. τοῦ μέν)
II p. 216, 25 ὅν] quam quidem T (d. h. ὃν μέν)
II p. 294, 9 ἐγνωκότες ἦμες] consueueramus (d. h. εἰωθότες ἦμες, wie Torelli) 6 καί] om. 12 καί] om.

II p. 312, 14 δειχθήσεται] demonstrabitur autem (d. h. δειχθήσεται δέ)
II p. 334, 12 τούτου] hoc autem (d. h. τούτου δέ)
II p. 340, 13 ἄχθω] ducatur autem (ἄχθω δέ) 22 τούτου δεδειγμένου] demonstrato autem hoc (δεδειγμένου δὲ τούτου)

Das sind alle Stellen, wo die Lesart von O[2] von F abwich in solcher Weise, dass beide an und für sich möglich sind. Fehler, die dem cod. O[2] eigenthümlich waren, sind sicher nachweisbar an folgenden Stellen:

II p. 154, 17 τοῦ Z καὶ τὸ Δ πολλαπλάσιον ἐόν] quod ipsius z a multiplex sint
II p. 160, 2 οὐδ' εἰ τὸ Γ μεῖζόν ἐστιν ἢ ὥστε] neque n g sit maius quam ut (s. oben)
II p. 234, 1 ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ON] ex on (s. oben)
II p. 310, 1 καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ τὸ ΖΔ] om. O 9 ἔχοντι] existenti (d. h. εοντι wie p. 306, 5, s. oben)
II p. 314, 10 τὰ αὐτά] hoc (d. h. τοῦτο oder ταῦτα)
II p. 326, 14 ὁποσαοῦν] quomodocunque (d. h. ὁπωσοῦν)

Hierzu kommen mehrere ganz unzweifelhafte Interpolationen. Am stärksten ist die oben erwähnte in plan. aeq. II, 9, wo ein aus dem Commentar des Eutocius zurechtgemachter Beweis den echten ganz verdrängt hatte. Ebenso klar ist die Interpolation plan. aeq. II, 5 p. 206, 3—7; Eutocius III p. 334, 11 hatte die Worte nicht, und sie sind ganz überflüssig. Durch diese beiden Beispiele werden auch die übrigen Abweichungen verdächtig, die in plan. aeq. II besonders bedeutend sind. Nicht nur sind die Buchstaben in II, 1, 3, 4, 5 auf der Figur und im Text sehr von den in F überlieferten verschieden, sondern mehrere Partieen sind ganz umgestaltet. So lautet die ganze Stelle II, 1 p. 190, 3—21 in O folgendermassen*): sit itaque ipsi quidem *hk* equalis utraque linearum *tl tm* ipsi autem *lh* equalis que *hn*; erit ergo et que *kh* ipsi *lm* equalis. quoniam igitur est ut *abg* ad *dez* ita que *tk* ad *kh* hoc est que *hl* ad *lt*. et est ipsius quidem *hl* dupla que *nl* ipsius autem *tl* que *lm*; erit ergo ut que *ln* ad *lm* ita quod *abg* ad *dez*. adiciatur autem secundum lineam *ln* medietati ipsius *abg* ex utraque parte ipsius *nl* equale utrumlibet ipsorum *xl no*. quare**) siquidem *xo* equale est ipsi *abg*. compleatur itaque *po*. proportionem autem habeat *xo* ad *op* [et per]***) quam *ln* ad *lm*. ut autem *agb* ad *zed* ita *xo* ad *op*. et permutatim. equale autem quod *abg* ipsi *xo*; equale ergo et quod *edz* ipsi *op*. et centrum grauitatis ipsorum *xo op* est signum *k* linee *mn*. et eius ergo que proponitur ex ambobus *abg dez* centrum grauitatis est signum *k*.

*) Die Figur s. bei Tartaglia, wo rechts gelesen werden muss p und m (statt n).

**) Bis hier nach O, das folgende aus Tartaglia.

***) Zu tilgen, vgl. die folgende Zeile.

Statt II, 5 p. 204, 3—14 hat O: et quoniam equalis est portio *atb* portioni *bkg* quia magnitudinis composite ex ambabus portionibus *atb bkg* centrum grauitatis est in media *lm* quoniam [in]*) equales sunt hoc est signum *x*. est autem et trigoni *abg* centrum grauitatis signum *e*.**) palam igitur quod tocius *abg* centrum grauitatis est in linea *xh* secta *xh* per signum *o* ut sit sicut *abg* trigonum ad portiones *atb bkg* ita ad *xo tn*. erit *o* centrum grauitatis tocius portionis. quare erit propinquius vertici portionis centrum totius portionis quam trigoni inscripti note.

Die Redaction dieser beiden Stellen, welche darauf ausgeht die schwerfällige Darstellung des Archimedes übersichtlicher zu gestalten, erweist sich auch dadurch als Interpolation, dass nicht die hier zu Grunde liegende Buchstabenbezeichnung, sondern diejenige des cod. F, dem Eutocius vorlag. Denn III p. 324, 5 hat er *ΑΒ ΓΔ* wie F II p. 188, 12 (*abg dez* O) und III p. 332, 24 *ΘΖΗΙ* wie F II p. 204, 2 (*ΘΖΗ*), während O giebt *hzlm*.***) Dasselbe wird dann wahrscheinlich auch von den übrigen grösseren Umgestaltungen und Zusätzen in diesem Buche gelten.

Sie sind folgende:

II, 6 p. 210, 13—19 lautet bei T: aliam aliquam ad *te*, erit maior quam linea *bt*. sit que *ht*. quoniam autem portionis quidem *abg* centrum grauitatis est signum *t*†) rectilinei autem *akblg* signum *e* et a(b)sumpta quadam recta habente proportionem ad lineam *et* quam habet rectilineum *akblg* ad reliquas portiones eius que *ht* ad *te*.

II p. 188, 13 nach *E*, *Z* (ht): et copuletur *ht* T

II p. 192, 24 vor δεικτέον: diameter autem portionis sit *bd* T

II p. 194, 15 nach τμάματα: quales dictae sunt T

II p. 198, 18 nach ἔχον: portionem T (d. h. portioni) 24 nach *ΒΔ*: ostensum est enim in superiora T

II p. 200, 9 τὸν τοῦ εὐθυγράμμου ποτὶ τὰ τμάματα] quam habet notum ad reliquas portiones T 10 τὸ μὲν *Ε* — 12 τὸ *Θ*] inscripti rectilinei *k* est centrum, totius autem portionis centrum est *e* T 15 nach εὐθείας: scilicet *me* T

II p. 204, 20 nach ἐστιν: in linea *kz* T 21 ἔστω — 206, 2 *Ν*] sit igitur

*) Zu tilgen.

**) Bis hierher nach Tartaglia, wo der Anfang corrupt ist, doch so, dass der Gedankengang klar bleibt; das folgende nach O.

***) Sehr bemerkenswerth ist es auch, dass das sachlich zutreffende Supplement der Lücke in F II p. 214, 17 οὕτως — 18 *ΚΖ*: ita que *td* ad *mz*, quae autem *db* quadrupla ipsius *kz*, d. i. ἁ δὲ *ΔΒ* τετραπλασία τᾶς *ΚΖ* — nicht mit Eutocius stimmt, der III p. 338, 18 citirt: τετραπλασία δὲ ἁ *ΒΔ* τᾶς *ΚΖ* und *ΔΘ* statt *td* bietet. Vielleicht ist also die Lücke durch Conjectur berichtigt in O[2].

†) Bis hierher nach O.

portionis quidem *blg* centrum grauitatis *n*, trigoni autem *m*, portionis autem *akb* centrum grauitatis *t*, trigoni autem *i* O

II p. 212, 4 τέμνοντι τὰς διαμέτρους τὰ *K*, *Δ*] secantur quae *bd zt* T

II p. 214, 9 nach *BΓ*: penes *z*, *h* T

In plan. aeq. I und quadr. parab. kommen grössere Umarbeitungen nicht vor, dagegen einige Zusätze, die wir wohl ebenfalls als Interpolationen bezeichnen dürfen:

II p. 300, 7 *BΔ*] *bd* longitudine O

II p. 302, 2 nach δυνάμει: equales enim que *dz kh* O

II p. 336, 7 τὸ *BΔΓ* τρίγωνον] equalis (equaliter T) est que *te* ipsi *tk*; trigonum ergo *bdg* T*)

An allen diesen Stellen sind die Varianten des O^2 entbehrlich und unserer Lesart nicht vorzuziehen. Zweifelhafter sind folgende Stellen, wo der Zusatz wünschenswerth ist:

II p. 166, 14 nach σαμεῖον: et secetur in duo quae *db* penes *t* T

II p. 176, 1 nach *ΘI*: et que relinquitur minor linea *ti* sit que *du* (d. h. *ΔΩ*) T

Auch II p. 232, 2 (nach *MN*: ad *no*; ut autem quae *mn* ad *no* longitudine(m) ita quae *mn*) hat O vielleicht die richtige Lesart, da diese Worte wegen des ὁμοιοτέλευτον (*MN*) leicht ausfallen konnten. Da jedoch auch an diesen drei Stellen der Zusatz in O entbehrt werden kann, so liegt es nahe auch hier eine Interpolation anzunehmen.

Derselbe Bearbeiter hat auch II p. 214, 19 die Worte οὗ σαμεῖον ϭ weggelassen, weil er sie nicht verstand; Eutocius III p. 338, 19 hat sie. Daher kann vielleicht auch die Weglassung der unechten Worte τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος II p. 178, 18 und φανερὸν γὰρ τοῦτο II p. 180, 17 ihm zugeschrieben werden.

Wir müssen also O^2 als eine sehr interpolirte Handschrift bezeichnen**); aber es bleiben doch 4) einige Stellen zurück, wo sie eine entschieden echte Lesart gegen unsere Hdss. erhalten hat, die auf Conjectur nicht beruhen kann.

II p. 166, 5 πίπτοντι] concidunt T (d. h. συμπίπτοντι, vgl. p. 167 not. 1)

II p. 208, 2 *KAB*, *ΔBΓ*] akb, blg T wie Eutocius III p. 334, 21***)

---

*) Der ganz falsche Zusatz II p. 342, 19 nach *Θ*: in duo equa fällt vielleicht dem Tartaglia zur Last.

**) Also können auch die angeführten Berichtigungen von offenbaren Irrthümern des cod. Vallae wenigstens zum Theil auf Conjectur beruhen. Denn dass der Interpolator nicht ohne Sachkenntniss war, zeigen auch die sichern Interpolationen.

***) Aber sonst stimmt O^2 nicht mit Eutocius; II p. 180, 15 (*tl*, in utroque

II p. 216, 4 τετραπλασίων] quadrupla est T, wie Eutocius III p. 340, 16
II p. 232, 22 μετά] et O (cum T), d. h. καί, wie Eutocius III p. 364, 12
II p. 296, 25 ἄρτι δέ] sufficit autem O, d. h. ἀρκεῖ δέ; im übrigen lautet die Stelle ganz wie in unseren Hdss.: similiter praedicto fundamento accipientes scripserunt accidit praedictorum theorematum unumquodque nullo minus eorum quae sine hoc demonstrata sunt credemus. sufficit autem ad similem fidem huius inductum expositorum a nobis.*)
II p. 304, 23—25 νοείσθω δὴ τό τε [ἔστιν τὸ] ἐν τᾷ θεωρίᾳ προκείμενον [ὁρώμενον] ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὸν ὁρίζοντα καὶ τᾶς *AB* γραμμᾶς [ἔπειτα] τὰ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ *Δ*] intelligatur autem propositum in recto ad orizontem et lineae *ab* haec quidem ad eadem ipsi *d* O. Durch diese Lesart wird die schwer verdorbene Stelle in Ordnung gebracht und die von mir vorgeschlagenen Streichungen bestätigt; nur muss das Messer noch stärker angewandt werden. Es ist offenbar nach O zu schreiben: νοείσθω δὴ (der Uebersetzer hat δέ gelesen wie in F) τὸ προκείμενον ὀρθὸν (oder ist εν — in — ein Fehler für ἐπίπεδον?) ποτὶ τὸν ὁρίζοντα καὶ τᾶς *AB* γραμμᾶς τὰ μὲν ἐπὶ etc. τεεστιν (d. i. τουτέστιν) τὸ ἐν τᾷ θεωρίᾳ ὁρώμενον ἐπίπεδον ist ohne Zweifel Glossem zu τὸ προκείμενον, ἔπειτα wohl eine verschobene Dittographie von ἐπὶ τά.

Auch in der falschen Lesart II p. 294, 11 ὑφ' ἡμῶν] ab aliis O hat sich eine Spur des richtigen erhalten. Archimedes schrieb *ΥΠΑΜΩΝ* d. i. ὑπ' ἁμῶν, was durch eine sehr häufige Verwechselung als *ΥΠΑΛΛΩΝ* gelesen wurde.

Nach der oben begründeten Vermuthung enthielt O[2] noch περὶ κωνειδέων. Von diesem Theil des Ottobon. besitze ich nur für einzelne Stellen Collationen; nach ihnen zu urtheilen findet auch hier dasselbe Verhältniss zwischen O[2] und F statt. Neben gemeinsamen Fehlern wie I p. 304, 13 *N*] *M* F, m O; p. 306, 12 ἀπὸ τᾶς διαμέτρου] απο τας μετα F, ab ea que cum O; p. 332, 22 *ΑΔ*] *ΑΔ* της ελλειψεως F, *ad* ellipseos O; p. 334, 5 περιλαμβάνων] περιλαμβανων ταν ελλειψιν F, qui comprehendit ellipsim O; p. 338, 14 παράλληλοι αἱ *ΚΟ*] ισαι αι *ΚΘ* F, equales que *kt* O; p. 364, 6 τῶν κωνοειδέων ἤ] om. F, om. O; p. 390, 25 *ΖΩ*] *ΖΕ* F, *ze* O; p. 440, 16 τε ἄχθαι] τεταχθαι F, ordi-

---

trigonorum); 212, 19 (rectilineo inscripto in *ezh*); 214, 16 (componenti et permutatim); 216, 6 (est), 16 (quoniam tota etc.), 21 (*de*, *bd*); 228, 23 (autem); 232, 22 (διπλασίας om. O) hat sie unsere Lesart, nicht die (meist bessere) des Eutocius.

*) S. 296, 24 ist μηδενός nicht zu ändern. S. 298, 1 zu schreiben ἐκδιδομένων. ἀναγράψ.

natum esse O; p. 464, 24 ἐξοῦντι. διάχϑω δέ] εξουντι δε ωδε F, habebunt autem sic O (mg. „protrahātur for.")*) — neben diesen untrüglichen Familienzügen kommen auch bessere Lesarten vor wie I p. 274, 6 δύσκολον ἔχειν τι] δυσποτ'ολον εχειν τι F, omnino difficultatem habere O (oder steckt in dem omnino eine Andeutung des ολον?); p. 306, 11 τᾷ διαμέτρῳ] τα μης F, diametro O; p. 372, 18 τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ E] το επι τας F, quae ad partem *e* O (d. h. τὸ ἐπὶ τὸ E?); p. 392, 24 ἤπερ ἀλίκῳ] η παλιν κω F, quam in quanto O, dazu die oben S. 54 angeführten Stellen, wo die richtige Lesart im Text steht, natürlich nach O[2], während die falsche des cod. F aus O[1] am Rande angeführt ist. Auch grössere Abweichungen kommen vor, wie die oben S. 54 Anm. angeführte Stelle aus conoid. 20 zeigt. Solche Varianten so wie kleinere Verbesserungen kann ich aber vorläufig im einzelnen nicht constatiren, da ich in dem Buche περὶ κωνοειδ. den Ottobon. nur an solchen Stellen untersucht, bezw. untersuchen lassen, habe, wo schwerere Schäden in den griechischen Hdss. vorhanden waren, und die finden sich ja, wie wir gesehen haben, meist in O[2] wieder. Nicht ganz ohne Bedeutung sind doch auch folgende kleine Varianten: I p. 372, 17 *NZ*] F, *zn* O; p. 422, 13 *M*] *N* F, *m* O, mg. *H*. Aber vollständig kann das Verhältniss zwischen O[2] und unseren Handschriften in dem Buch περὶ κωνοειδέων erst durch eine erneuerte Untersuchung festgestellt werden. Vorläufig müssen wir uns damit begnügen, dass nichts der vor der Hand wahrscheinlichen Annahme entgegensteht, das Verhältniss sei auch hier ungefähr dasselbe als in de plan. aequil. und quadr. parab.

Aus dem bisherigen ergiebt sich die Berechtigung der Annahme, dass O[2] nicht nur der Uebersetzung der Bücher περὶ ὀχουμένων, wo sie alleinige Quelle war, als Vorlage gedient hat, sondern auch in den übrigen darin enthaltenen Schriften (de plan. aequil. I—II, quadr. parab., de conoid.). Die daselbst am Rande befindlichen Lesarten aus dem „aliud exemplar" müssen sich also auf die Hds. beziehen, welche der Uebersetzung der übrigen Schriften zu Grunde liegt (O[1]), zu deren Prüfung wir jetzt übergehen. Schon aus den

---

*) Wenn I p. 302, 4; 332, 19 dieselben Scholien stehen als in F (III p. 374—75) — „in tertio conicorum Apollonii 20 theorem̄" und „per 20 theorema primi conicorum Apollonii" —, so sind sie wohl dem O[1] entnommen. Auch die beigeschriebenen griechischen Wörter können derselben Quelle entnommen sein, wenn sie auch beweisen, dass O[2] an den betreffenden Stellen nichts Besseres bot. Es sind folgende: I p. 358, 4 ἐς αὐτό] in ipsam O, mg. εσ αυτα, wie F; p. 368, 14 αὐτᾶς] ipsam, mg. αυται O, wie F; p. 414, 16 *BΔ*] bd, mg. κδ O, wie F; p. 420, 9 ἄρα καὶ ἀνομοίως] αμετριανομοιως F, similiter nach Lacune O, mg. αμετριᾱ; p. 430, 15 ἄρα] lacun. O, mg. αλλη, wie F; p. 436, 1 καϑ' ὃ αἵ] lac. O, mg. καϑασ wie F; vgl. noch I p. 322, 19 ἄρα] om. F, ergo O, mg. ergo non in greco; p. 336, 13 *ZH*] *ZMH* F, znh O, mg. in greco zmh; p. 402, 17 τὸ *B*] ταν *BE* F, b O, mg. be in greco; p. 408, 3 *Δ*] *Δ* F, l O, mg. ạ· in greco.

genannten Randbemerkungen ist es ersichtlich, dass O[1] dem cod. Vallae sehr enge verwandt ist. Denn ausser den S. 54 angeführten 9 Stellen aus *περὶ κωνοειδέων*, wo sie mit F stimmt, gilt dasselbe von den S. 53 ff. unter Nr. 1, 8, 9 angeführten Varianten; Nr. 2, 3 sind mit F wohl vereinbar, ebenso Nr. 7, wo duplo die Hauptsache ist (*od* vielleicht nur Schreibfehler); Nr. 5 ist irrelevant, weil nur die Uebereinstimmung der beiden Exemplare constatirt wird; Nr. 4 zu unklar um als Zeuge zu dienen. Nr. 6 endlich stimmt sehr genau mit F, wie die folgende Collation zeigt:

II p. 218, 26 *τὰν ΒΔ* — 27 *ποτί*] om. F, om. O

II p. 220, 6 *τᾳ̃ ΒΕ*] *ταν ΒΕ* F, ipsam be O 10 *τᾳ̃ ΕΒ*] *ταν ΕΒ* F, ipsam eb O 11 *ΔΟ*] *ΔΘ* F, dt O (dk T) 12 *ΟΔ*] *ΘΔ* F, ta O (ka T) 14 *καὶ τετραπλασίᾳ τᾶς ΓΒ*] om. F, om. O (hab. T) 25 *ἁ ΟΔ*] *α Δ* F, lac. O (ka T)

II p. 222, 8 *ἴσαν τᾳ̃ συγκειμένᾳ*] *ισαν ταν συγκειμεναν* F, aequalem compositam O 14 *τεταγμένων*] *τετμημενων* F, dispositis O (*ταγμ.* ist sonst ordinatis) 15 *ἐστίν*] om. F, om. O *ΟΔ*] *ΘΔ* F, td O (kd T wie durchgehend) 19 *ΟΕ*] *ΘΕ* F, td O 20 *ἐστιν οὕτως*] *εστιν ως* F, est ut O

II p. 224, 3 *ΕΟ*] *ΕΘ* F, et O (ek T) 4 *τριπλασίας τᾶς*] om. F, cum ipsa gd O (cum triplam ipsius gd T) 18 *ΓΒ, ΒΔ*] *ΓΒΔ* F, gbd O (gb db T) 19 *ΕΒ, ΒΑ*] *ΕΒΑ* F, eba O (eb ab T) 20 *ΔΒ, ΒΓ*] *ΔΒΓ* F, dbg O (db gb T) *ΒΔ, ΒΑ*] *ΒΔ, ΔΑ* F; bd da O (bd ba T)

II p. 226, 2 *ΑΒ, ΒΕ*] *ΑΒΕ* F, abe O (ab, eb T) 3 *ΓΒ, ΒΔ*] *ΓΒΔ* F, gbd O (gb db T) 5 *ΑΒ, ΒΔ*] *ΑΒΔ* F, abd O (ab db T und ähnlich immer) 22 *ἑξαπλασίας τᾶς ΓΒ*] *εκ του τας ΓΒ* F, ex ipsa gb T

II p. 228, 1 *ΑΟ*] *Α* F, a O 2 *ΒΑ*] *ΒΘ* F, bd O 4 *ΑΒ*] *ΔΒ* F, db O

Zurück bleiben von Dissensen zwischen F und O nur reine Kleinigkeiten — die Stellen, wo nur die Lesart des Tartaglia, nicht die des Ottobon. bekannt ist, kommen in dieser Frage nicht in Betracht, da wir oben gesehen haben, dass er hier stark emendirt hat —, nämlich ausser den angeführten Varianten zu p. 222, 19; 228, 2 nur II p. 220, 25 *πενταπλασία*] $\overline{ΔΕ}$ F, quincupla O.

Schon diese Zusammenstellung lehrt, dass O[1] und F eng verwandt sind; wir können aber einen Schritt weiter gehen und behaupten, dass O[1] mit der Vorlage von F identisch ist, O[1] ist der codex Georgii Vallae antiquus.

III S. 4, 18 fehlte nämlich im cod. Vallae ein Blatt; eine Abschrift davon, cod. Paris. B, hat an dieser Stelle den Vermerk *ἓν ὅλον σελίδιον ἢ καὶ*

δύο λείπει, und dass diese Worte sich wirklich auf die Vorlage von B beziehen und nicht etwa aus derselben herübergenommen sind, geht daraus mit Sicherheit hervor, dass keine der anderen Abschriften des cod. Vallae ähnliches hat; sie gehen ohne weiteres über die Lücke hin. An derselben Stelle nun hat auch Ottobon. dieselbe Lücke (eine halbe Columne freigelassen) und am Rande: hic de exemplari greco perditum erat unum folium. Da diese Bemerkung sich ebenfalls augenscheinlich auf die Vorlage von Ottobon. — hier O^1 — bezieht, bleibt uns nichts übrig als die Annahme O^1 = cod. Vallae.

Eine Vergleichung zwischen Ottobon. und F an den Stellen, wo cod. Vallae corrumpirt war, ergiebt dasselbe Resultat; wir finden durchgehend in beiden dieselben Fehler.

I p. 40, 16 δέ] δη F, itaque O

I p. 46, 24 τριγώνων] επιπεδα F, plana O, mg. m. 2 trigonis

I p. 164, 14 τὸ γὰρ ὑπὸ τοῦ πολυγώνου περιγεγραμμένον] εγγεγραμμενον F, inscripta O, mg. inscripte 16 τότε] τουτο F, hoc O

I p. 200, 1 *ΑΒ* — 2 τῇ] om. F, equalem superficei O, mg. m. 2 et quae *ab* est ergo equalis

I p. 216, 16 πρός — 17 *ΚΑ*] ter F, ad ld quae bd ad dq quare et ut quod a kl ad ld quae bd ad dq quare et ut quod a kl, seq. spatio 6 litt. O

I p. 228, 17 et 18 δοθείς] om. F, postea add. O

I p. 230, 23 τοῦ *ΚΛΜ* τμήματος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ *ΔΕΖ* τμήματος τῆς σφαίρας] του *ΚΛΜ* τμηματος της σφαιρας F, ipsius klm portionis spere O, portionis sphere superficiei ipsius dez mg. m. 2

I p. 244, 4 et 5 ἐπί] προς F, super e corr. O*) 7 διπλασίου] διπλασιων F, dupla O (folgt: est quae eius quod ab at ad tg) 9 ἐλάσσονα — 10 *ΘΗ*] om. F, om O, mg. m. 2: habet proportionem maiorem quam quidem quod ab at in th ad id quod a gt in th

I p. 248, 1 ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι διότι] επιλοιπον μειναι δειξαι διοτι F, quoniam**) reliquum erat demonstrare quia O, reliquum nobis demonstrare oportet quia m. 2

III p. 42, 3 τὸ ἄρα — 4 *ΔΑ, ΑΗ*] om. F, om. O

III p. 56, 12 εἰς τὸ μδ'] εις το $\overline{μβ}$ F, in 42am O

*) Wenn auch die Emendation dieser schwierigen Stelle keineswegs sicher ist, so ist es doch jedenfalls aus Ottob. klar, dass sie in seiner Vorlage ebenso verunstaltet war. Die man. 2 hat noch Z. 5 statt quod ergo (ὅτι ἄρα): oportet ergo demonstrare quia, Z. 6—7 proportionem minorem ∧ proportioni (s m. 2)] ∧ „quam duplam proportionis ipsius at ad tg sed" m. 2. Z. 8 nach ergo (ἄρα) eingeschoben quae.

**) Er hat επι als επει gelesen, (μ)ειναι ist erat.

III p. 202, 1 τουτέστι — ἡ ΞΟ] om. F, om. O, hoc est ad id quod ab eh equalis enim xo mg. m. 2

III p. 250, 5 ὡς — 6 ΘΗ, 7 ΓΘΒ — 8 ἀπό, 9 πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ] om. F, om. O (corr. m. 2)

III p. 260, 16 Μιλησίῳ] μηλησιω F, melesio O, corr. m. 2 Ἰσιδώρῳ] ισηδωρω F, isedoro O, corr. m. 2*)

III p. 358, 16 ΑΒΔ] ΓΔΒ F, gdb 18 ὅν — 19 ἔχει] om. F, om. 22 γάρ] δε F, autem

III p. 370, 8 ὅπερ τὸ Ρ] (corrumpirt) equidem r

Noch stärker tritt natürlich die Uebereinstimmung hervor in den Schriften, wo Ottobon. vollständig collationirt ist. Ich führe hier sämmtliche gemeinsamen Fehler auf, die sich durch eine durchgehende Vergleichung von F und dem oben abgedruckten Text des Ottobon. (κύκλου μέτρησις und περὶ ἑλίκων) ergeben. Nur muss daran erinnert werden, dass in der κύκλου μέτρησις der Ottobon. durch corrigirende Hände so entstellt ist, dass seine ursprüngliche Lesart entweder gar nicht oder nur durch die Ausgaben von Gauricus-Tartaglia ermittelt werden konnte; hier kann das blosse Dasein der Correctur einer thatsächlichen Uebereinstimmung mit F gleich gesetzt werden.

I p. 266, 2 ,δχογ′L″] ,δυογ F, 4673 O, 6 e corr. m. 2 7 πλευρά] om. F, om. O 14 ἤ] om. F, quam e corr. m. 2 O 16 ἐλάττονι] ελαττον F, minus O 21 ,ατνα′] $\overline{τνα}$ F, 351 O

I p. 268, 4 ἄρα] εσται F, erit O 5 ἴση] om. F, om. O (add. lin. 4 m. 2) 9 ΑΗ] ΔΗ F, ah O, sed a e corr. m. 2 12 L″] γ′ F, $\frac{1}{2}$ e corr. m. 2 O; 3. GT 14 ,εϡκδ′] $\overline{ετκδ}$ F, 5924, 9 e corr., O; 5324 GT L″] ε′ F, $^1/_2$ in ras. O 15 σμ′] $\overline{σν}$ F, 250 O (corr. m. 2) δ′ ιγ′] δ′ ιγ′ α′ F, om. O ($^4/_{13}$ m. rec.) 16 θ′ ια″] θ′ F, $^9/_{11}$ in ras. m. rec. O; 9. GT

I 270, 1 ξς′] $\overline{cξς}$ F, 266 O (66 m. 2) 2 ἑκατέρας] εκατερα F, utriusque e corr. O; utrique GT ια′ μ″ ἡ ΑΓ ἄρα] οιμαι F, $^{11}/_{40}$ in ras. m. rec. O, extimo GT ,αθ′ ς″] $\overline{αος}$ F, 1009 $^1/_6$ e corr. O, 1076 GT 4 ΑΓ] $\overline{ΑΓ}$ F, ag 7 ,ςτλς′] ,ςτας F, 6336 e corr. O, 6301. 6 GT 8 ,βιζ′] ,ζιζ F, 2017 e corr. O, 7012 GT 11 ἢ ι′ οα″] η ον ο′ ια′ F, quam illa quam 10. 71 (in ras. m. 2) O 14 ἐλάσσονι] ελασσων F, minor O μείζονι δὲ ἢ ι′ οα″ μείζων] μειζων δε F, maior O, r in ras. 8—9 litt. m. rec.

---

*) Dagegen lautet die Unterschrift unter dem Commentar zum I. Buch, wo F keine Schreibfehler hat: Eutokii ascalonite submemoratio (unter Buch II ist dies in rememoratio corrigirt) in primum Archimedis de spera et cylindro ex traditione lecta (in recognita corrigirt m. 2 unter Buch II) a milesio mechanico isidoro nostro doctore explicit.

Bessere Bedingungen für eine Vergleichung bietet περὶ ἑλίκων.

II p. 2, 11 πόσα] ποια F, qve 13 οὖν] om. F, om. 14 ἢ δῆλα] αδηλα F, et obscura 15 κα] και F, et 16 ἐπί] και επι F, et ad

II p. 4, 1 αὐτῶν] των F, om. μέν] μη F, non 7 κομίζομες, δοκιμάζομες] κομιζοντες δοκιμαζοντες F, ferentes probantes

II p. 6, 7 μείζονα] μη μειζονα F, non maiorem 16 τᾶς μὲν ἐπιφανείας] om. F, om. 18 δέ] γαρ F, enim

II p. 8, 1 τούτου] το F, om. 18 δὲ κα] δη και F, itaque et

II p. 10, 4 οὔπω] ουτω F; non nunc, mg. ουτω forte ουπω 5 τᾶς ἕλικος] τας ελικας F, elicas 6 ἐπικοινωνεόντων] επικοινωνεοντα F, communicantia (aber vielleicht ist ἐπικοινωνέοντα richtig) 23 ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος αὐτᾶς] απο του μενοντος περι το αυτο F, a manente circa idem

II p. 12, 26 μείζονος — p. 14, 1 τοῦ] om. F, mg. O[1]

II p. 14, 6 ὡς] των F; eorum que 7 λῆμμα τόδε] λημα ταδε F, sumptiones has 22 ΓΔ] ΔΔ F, c d e corr. m. 2*)

II p. 16, 11 ταὐτά] ταυτα F; haec, m. 2: eadem

II p. 18, 3 αὐτοῦ] αυτω F, ipsum (er hat αὐτό gelesen) 5 ἂν αἴ τε πρῶται] αι τε πρωται F, primeque 21 δέ] δη F, itaque

II p. 20, 15 αὐτὰ ἑαυτᾷ] αυτα F, ipsi 16 εἰς] και εις F, et in 18 κα ᾗ] και F, et 21 εἰ δέ — 23 ἐλάσσων] om. F, om.

II p. 22, 12 δή] δε F, autem 17 δέ] δη F, itaque

II p. 24, 10 πέρας] μερος F, partem 11 εἴ κα] ει και F, etsi

II p. 26, 2 ΚΒ] ΚΒΓ F, ΚΓ BC, kg 12 εἴ κα] ει και F, etsi

II p. 28, 22 δή] δε F; autem, m. 2: itaque

II p. 30, 2 ΞΙ, ΙΔ] ΞΙΔ F, xil (entsprechend überall. mit F) 6 τόν — 8 ΓΔ] om. F, om.

II p. 36, 3 δή] δε F, autem 17 τοῖς ὑπό] τοις απο F, que sub m. 2

II p. 38, 2 ἐντι] επει F, quoniam 8 δή] δε F, autem 17 περισσᾷ] (zu tilgen) impari 18 πολλαπλασίᾳ] πολλαπλασιους F, multiplices 22 πάσαις] (zu tilgen) omnibus 24 σύν] ἐν F, in 27 Β] ΑΒ F, ab

II p. 40, 1 Β] ΑΒ F; ab, a eras. 6 Δ] om. F, m. 2 O

II p. 42, 3 τὰ εἴδεα — 4 μεγίστᾳ] om. F, om.

II p. 46, 10 μέν] om. F, om. 17 ΥΞ] ΥΝ F, yn

II p. 48, 3 ΗΩ] ΝΩ F, nω 12 μείζονα — 13 ΥΝ] om. F, om. 20 καὶ τοῖς — 21 ΝΞ] om. F, om.

II p. 50, 11 ἰσᾶν (alt.) — 12 τᾶν] om. F, om. 23 καί] om. F, om.

---

*) Solche Correcturen können als Uebereinstimmungen gelten.

II p. 52, 23 ἐφ' ἅ κα] om. F, om.*)

II p. 54, 6 γεγραμμέναν] γεγραμμενα F, (elicem una . . .) descripta O 26 ΓΔ] ΓΔ F, gd (a g m. 2)**)

II p. 56, 22 τᾶς ΑΘ] (zu streichen) at

II p. 60, 6 προτέροις] πρωτοις F, primis 27 (in der adn. crit. so statt 23 zu lesen) καὶ τὸ Θ] κατα το Ε F, secundum e O

II p. 62, 8 ὅτι] om. F, om. 12 αἵ εἰρημέναι περιφέρειαι] α ειρημενα περιφερεια F, dicta periferia

II p. 64, 3 ΕΔΖ] ΔΕΖ F, dez 22 ΑΔ, ΔΖ] ΑΔΖ F, adz, u. s. w.

II p. 66, 9 ΗΚΘ] ΚΘ F m. 1, kt 17 δέ] om. F, om. 18 ὅτι] om. F, om. 24 ΕΖ] ΑΖ F, ez O, e e corr. m. 2

II p. 68, 17 ποτί] (zu tilgen) ad

II p. 74, 1 ΘΗΚ] ΘΗ F, th

II p. 78, 14 δή] δε F, autem 23 γραμμὰ δεδομένα] γεγραμμενα F, descripta

II p. 80, 7 ΤΜΝ] ΜΝ F; mn O, cmn m. 2

II p. 82, 9 ὅτι] om. F, om.

II p. 84, 3 περιφορᾷ] om. F, m. 2 O 10 ποτὶ τὰν ΖΔ] om. F, om. 13 δή] δε F, autem

II p. 86, 2 ΔΡ] ΑΡ F; dr O, d e corr. m. 2 20 ἁ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν συμπίπτουσα] τας ποτι ταν επιψαυουσαν συμπιπτουσα F, concidentis ad contingentem O 21 τᾶς τε συμπτώσιος] om. F, om.

II p. 88, 4 ἑνί] om. F, om. 6 λαμβανομένᾳ] λαμβανομενας F, accepta periferia

II p. 90, 3 γωνίας τᾷ περιεχομένᾳ] γωνιας τας περιεχομενας F, angulos qui continentur 4 ἔστε ποτί] εσ την κατα F, equales per in ras. m. 2 O 9 ἔστε κα συμπέσῃ] εσται καν συμπεση F, et concidet 14 ἔστε κα συμπέσῃ] εσται και συμπεση F, et concidet 15 τᾷ ΘΚ] om. F, om.

II p. 92, 7 οὐ] om. F, om.

II p. 96, 25 δή] δε F, autem

II p. 98, 18 σχῆμα] om. F, om. 21 καί — 23 χωρίου] om. F, om.

II p. 100, 3 τᾶν] om. F, om. 11 συγκείμενον] om. F, om. 29 μεγίστα] μειζων F, maior

II p. 102, 1 ἐλαχίστα] ελασσων F, minor 12 ΑΖΗΙ] ΑΖΗΙΚ F, akzhi

II p. 104, 2 ἐλάχιστος] ελασσων F, minor 7 αἵ] om. F, om.

II p. 106, 7 τῷ — 8 εὐθείας] zu tilgen, habet O 10 περιλαφθέν] om. F, om.

II p. 110, 6 ποτιπίπτουσαι] ποτιπιπτουσιν F, concidunt 18 ΑΖΗΙ] ΑΖΗ F; azh, i add. m. 2 26 ΘΕ] ΔΕ F, te O, t e corr. m. 2

---

*) Ueber das Z. 1 ausgefallene ὁσακισοῦν s. unten S. 79 Anm.

**) In der adn. crit. zu Z. 8 lies: „υπερεχωντι F".

II p. 116, 18 τῶν περάτων] του περατος F, termino
II p. 118, 27 ἐστίν] om. F, om. 28 δή] γαρ F, enim
II p. 120, 6 μέγιστος] μειζων F, maior 7 ἐλάχιστος] ελασσων F, minor 25 τό] τα F, que
II p. 122, 8 ΧϘ] Χ F, q 9 ΧϘ] Χ F, q 24 μέγιστος] μειζων F, maior 25 ΘΒΗ] ΘΒΓ F, tbg ἐλάχιστος] ελασσων F, minor
II p. 124, 7 τᾶς μεγίστας] ταν μεγισταν F; maxima, a e corr. m. 2, O 8 τᾶν . . . ὑπερεχουσᾶν] τᾶν om. F, excedentium, -tium e corr. m. 2, O 13 ΘΕ] ΔΕ F; te, t e corr. m. 2, O 15 ΧϘ] Χ F, q 16 ΧϘ] Χ F, q 18 ΧϘ] Χ F, q 20 ἴσος] ισα F, equalia
II p. 126, 16 ἔχον] εχειν F, habere (vielleicht richtig).
II p. 128, 7 καὶ τό — 10 τετραγώνου] om. F, om. 26 ἐκ] απο F, a ΚΛΜΝ] ΗΚΛΜΝΞ F, klmn seq. ras.
II p. 130, 5 ΔΘ] ΛΘ F; dt, d e corr. m. 2 8 καὶ τοῦ — 10 ΔΓ] om. F, om. 22 τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΒΔ καί] om. F, om. 23 καὶ ἀνάπαλιν] zu tilgen; et e contrario
II p. 132, 6 τὸ δὲ ΚΛΜΝ] τα δε ΚΛΜΝ F, spatia autem klmn 8 τὸ ὑπό] τα υπο F, ea que a 17 ΕΘ] zu tilgen, et 26 ἐπὶ τὰν ἀρχάν] επι τα αρχα F, super principium
II p. 134, 1 τᾶν μεταξύ] τας μεταξυ F, intermedia 6 ἐλάσσονος] om. F, maioris m. 2 9 ποτὶ τάν — 10 κύκλου] om. F, mg. m. 2 O (ἐλάσσονος] maioris) 12 ἐν] om. F, in m. 2 18 ΛΘ] ΗΘ F, ht 19 ΗΛ] Η F; h, ha m. 2 20 ΛΘ] ΗΘ F, ht
II p. 136, 6 ΝΠΞ] ΝΗΞ F, nhx 9 ΝΠΞ] ΝΗΞ F, nhx 16 ΘΛ] ΘΕ F; ta, a e corr. m. 2
II p. 138, 1 ΘΛ] ΘΗ F, th 3 ΘΛ] ΘΗ F, th 4 ΘΛ] ΘΗ F, th 6 ΘΛ, ΗΛ] ΘΗΛ F, tha 8 ΘΛ] ΘΗ F, th 9 ΘΛ] ΘΗ F, th 11 Π] Ν F, n 12 ΘΛ] ΘΗ F, th 13 ΘΛ] ΘΗ F, th

Dieser Reihe von Stellen und der gemeinsamen Lacune gegenüber kommt es nicht in Betracht, dass sowohl besondere Eigenthümlichkeiten des Ottobon. als Berichtigungen kleinerer Irrthümer vorkommen. Die ersteren können unbedenklich dem Uebersetzer angerechnet werden, dem bei aller Treue doch zuweilen etwas Menschliches passiren musste; es sind folgende:

I p. 244, 6 ΓΘ] tg
I p. 260, 12 λελείφθωσαν] accipiantur (als von λαμβάνω) οἱ τῷ ΠΖΛ τομεῖ ὅμοιοι] sectores*) similes ipsi pza 18 ὁ κύκλος] circulus abgd
I p. 262, 4 ἔστω] sit enim

*) Als ob — sprachwidrig — τομεῖς da stände.

I p. 264, 14 ἔχει] om. 17 μείζονα] maiorem proportionem habet

I p. 266, 21 πρὸς ψπ′ ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΒ ὃν ͵αφξ πρὸς ψπ′] ad ago

I p. 268, 3 ΗΑΓ] ahg 12 δίχα] item in duo

II p. 4, 3 οὐδεμίαν] om. 10, 2 ἀγμέναι] om. (ducte m. 2)

II p. 16, 3 ΘΗ] ht 20 συντεθεισᾶν] om.

II p. 18, 14 ὁμοίως] similiter autem

II p. 22, 4 εὐθεῖαν] om. (rectam m. 2)

II p. 26, 27 ἐστί] om.

II p. 28, 11 εἴ κα] etsi

II p. 32, 2 εἴ κα] etsi 7 ΞΓ] xl 8 μείζων] sit maior 20 ΞΓ] xl
25 ΚΙ, ΙΝ] kix ΛΙ, ΚΕ] nke

II p. 34, 1 ἔστιν — ΓΜ] mg. m. 2

II p. 36, 11 Β] om. 13 Κ, Γ] keg

II p. 38, 4 Κ, Γ] ng

II p. 42, 25 τᾶς ΓΔ] ipsi gd

II p. 46, 3 ΡΩ] ru (Ω ist sonst ω) 8 ΡΘ] xt 27 ἴσα] equalia sunt

II p. 48, 11 ΗΩ] ha 24 τᾶς ἴσας — p. 50, 2 καί] om.

II p. 60, 8 ὅτι τὸ αὐτὸ συμβήσεται] om. 10 εἰ δέ κα] si

II p. 66, 14 ἴσα γάρ ἁ ΡΑ τᾷ ΑΔ] om. 17 δέ] om.

II p. 70, 6 ὥστε] quia

II p. 72, 5 συμπιπτέτω] concidant autem 9 ἔλαβον] accipiam

II p. 74, 18 ἔλαβον] accipiam 19 ΑΔ] ai 20 ἄγω] ducam

II p. 76, 8 τεμεῖ] secat

II p. 82, 22 συμπτώσιος]*) concidentis

II p. 84, 6 ΑΔ] da 7 ΑΔ] da 9 ΑΔ] da 17 μείζων] maior est

II p. 86, 9 ΚΜΡ περιφέρεια ποτὶ τάν] om. (periferia dr cum m. 2) ΚΜΔ] kmd, d m. 2

II p. 90, 6 κέντρῳ] centro quidem 13 κέντρῳ] centro quidem 20 χωρίον] spatium quoddam

II p. 94, 5 ΑΖΗ] azhi

II p. 96, 2 φανερόν] manifestum est

II p. 98, 6 τι περί] om.

II p. 104, 3 μεῖζον] minor

II p. 106, 3 ϙ] om.

II p. 108, 24 περιγεγράφθω] circumscripta sit igitur 28 ἐκβεβλήσθωσαν] educantur ergo

II p. 112, 25 ἐκβεβλήσθωσαν] educantur ergo

II p. 116, 26 ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος] ab ultimo (-o e corr. m. 2) revolutionis ad principium

---

*) συμπτωσιας F.

II p. 120, 20 ἀναγέγραπται] descripti sunt
II p. 126, 5 ἔστω δέ] et sit
II p. 128, 11 ὥστε — 13 ζ'] om. 17 γάρ] enim mg. m. 2
III p. 258, 29 ἄρα] autem.
III p. 360, 1 ἑκάτερον γὰρ ἑκατέρου] eadem enim utraque*)

Die allermeisten dieser Stellen sind offenbar und unzweifelhaft durch Irrthum und Flüchtigkeit entstellt; an anderen kommen verdeutlichende Zusätze vor, die durch die Sprache, namentlich wegen des Fehlens des bestimmten Artikels, fast nothwendig wurden; von dieser Art füge ich noch folgende besonders deutliche Beispiele zu:

I p. 260, 2 τῆς λοιπῆς] reliquo latere 14 τὸ E] trigonum e
II p. 120, 25 ὑπὸ τᾶν $A\Theta$, ΘE] a lineis at te
II p. 128, 2 ὅν] proportionem quam 4 ἔχει] habet proportionem
II p. 136, 8 τᾶς ΘH] linea th 11 τὸν N] sectorem n 14 τὸ Π] spatium p; ähnlich p. 94, 9 preposito spatio 27 τὸ Ξ ποτὶ τὸ Π] spatium x ad spatium p.

Von gröberen Missverständnissen der Sprache habe ich folgende bemerkt

II p. 148, 15 κατεχομένου] dempto
II p. 180, 15 ἐπειδήπερ] quoniam itaque; ebenso Z. 21, p. 186, 3; später hat er das richtige quoniam quidem.
II p. 188, 9 διαιρέον (διαιρεων F) οὕτως τὰν εἰρημέναν εὐθεῖαν] divisis sic dictis rectis.
II p. 194, 17 ἐχόντων] (Imperativ) habentia
II p. 234, 8 σύνδυο λαμβανομένοις] cum duabus acceptis
II p. 294, 12 ἐπιδειχθέν. τῶν μέν] demonstratis quidem 14 ὡς δυνατὸν ἐόν] ut possibile erat**)
I p. 266, 4 τετράκις δίχα] quadruplum in duo
II p. 2, 7 πλείονα χρόνον ποιήσαντες] pluri tempore postquam fecimus 20 αἰσθανόμεθα] propius
II p. 52, 9 ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. εὐθεῖα, ἂν μέν] principium circulationis rectum. siquidem ἂν δ'] si autem (er hat ἄν gelesen)

---

*) F hat εκατον γαρ εκατερος (P. 360, 2 fehlt καί wie in F). Aehnliche verunglückte Behandlung corrupter Stellen ist II p. 4, 1 inter ipsa non separata finem autem attingemus, p. 4, 3 tamquam confitentes (das letztere jedoch ein annähernd richtiger Griff).

**) Gewiss liegt auch irgend ein Missverständniss zu Grunde, wenn übersetzt wird II p. 294, 3 ὃς ἦν ἔτι βλέπων (λειπων F) ἡμῖν ἐν φιλίᾳ] qui erat nobis amicus, 5 τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν] mortui quidem graviter; p. 306, 8 εἴη κα] εηκα F, assimilatur. Auch die Myriaden- und Bruchzeichen I p. 264 ff. sind weggelassen, weil nicht verstanden.

II p. 74, 15 ἁ ΖΔ] quam za; ebenso p. 76, 24
II p. 88, 13 τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι] sit maior quam inscripta in minori*)
III p. 260, 15 ἐκδόσεως] ex traditione (d. h. ἐκ δόσεως!).

Man vergleiche noch das oben angeführte Missverständniss II p. 92, 17, das der Uebersetzer noch rechtzeitig bemerkte; ein ganz ähnliches II p. 116, 15 (τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ... ἀγμέναν rectam ... ductam) scheint erst von zweiter Hand berichtigt zu sein (rectis ... ductis). Beispiele unlateinischer Wendungen, welche durch den engen Anschluss an die griechischen Worte veranlasst sind, sind u. a. folgende:

II p. 2, 20 οὐδ' ὑφ' ἑνὸς οὐδέν] a nullo nullum
II p. 92, 17 ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου] minori omnis prepositi spatii. Aehnlich öfters.
II p. 158, 1 τοῦ μὲν ἄρα Α κειμένου] ipsius (corr. in ipso) ... posito

Im grossen und ganzen muss man aber zugeben, dass Wilhelm seine Vorlage sachlich wie sprachlich recht gut verstanden hat; wo er sich durch Freilassung von Lücken fallit erklärt, handelt es sich meist um seltenere Wörter oder corrumpirte Stellen. Dass er viele Fehler seiner griechischen Vorlage übersah, darf man ihm nicht zu sehr zur Last legen; das ist bei der Unübersichtlichkeit der griechischen mathematischen Darstellungsweise und bei der Schwierigkeit der behandelten Gegenstände gar manchem viel besser gerüsteten Archimedesforscher nach ihm passirt. Namentlich ist es klar, dass eine spätere Durchsicht der schnell hingeworfenen Uebersetzung ihm über viele Stellen Aufschlüsse gegeben hat; daher die vielen nachträglichen Berichtigungen am Rande, welche kaum jemals durch Nachtragung übersehener Lesarten der griechischen Vorlage entstanden sind, da sie sich fast nur an solchen Stellen finden, wo auch in unseren griechischen Hdss. Fehler, und zwar dieselben wie in der Uebersetzung, da sind. Auch das öfters beigeschriebene „forte" deutet in dieselbe Richtung. Von solchen nachträglichen Berichtigungen, die mit Sicherheit der ersten Hand beigelegt werden können und augenscheinlich auf verständiger Conjectur eines Verstehenden beruhen, führe ich an:

I p. 40, 17 ἔστω τὸ Θ χωρίον] εστω F; sit spatium t O, mg. m. 1 deficit greco.**)
Er hat also die Lacune bemerkt, aber vor der Hand nur den Anfang suppliren können.

---

*) Scheint mit inscripta verbunden wie p. 92, 17, 26 ἐλάσσονι] in minori, mit ἐγγραφέντος verbunden? Vgl. jedoch p. 92, 15, wo ebenfalls in minori steht, aber kein ἐγγράφειν.

**) Im folgenden fehlt in O nicht nur τὸ δὴ Θ χωρίον Z. 18 und τῶν Z. 18—20 οὖν wie in F, sondern auch ἤτοι ἔλαττόν ἐστιν Z. 18. Am Rande steht mit

I p. 228, 17 u. 18 δοθείς] om. F, data O nachgetragen m. 1.
I p. 402, 2 ἔστε ποτί] εσσειται ποτι F, erunt educta ad O; der Sinn ist also richtig errathen.
I p. 464, 24 ἐξοῦντι. διάχθω δέ] ἐξουντι δε ωδε F, habebunt autem sic O, mg. m. 1 protrahantur for.
II p. 10, 4 οὔπω] ουτω F; non nunc O, mg. m. 1: ουτω forte ουπω.
II p. 56, 23 μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιαι] μειζων εντι η διπλασιαι F; maiores sunt quam duple O, mg. m. 1: μιζ ερτι $\overset{H}{}$ (ras. 1 litt.) διπλασιαι.
III p. 250, 15 nach πρὸς τὸ ἐπὶ $\Gamma\Theta$ wird in F fälschlich wiederholt ἐπὶ τὴν ΘH πρὸς τὸ ἀπὸ $\Gamma\Theta$; ad id quod a g t super (th eras.) t z habet proportionem maiorem O. Der Uebersetzer hat offenbar denselben Fehler vor sich gehabt als in F und hat anfangs die Wiederholung mit übersetzen wollen, dann aber noch rechtzeitig den Irrthum bemerkt und richtig gestellt.*)

Nach diesen Proben kann es also nicht bezweifelt werden, dass Wilhelm leichtere Fehler seiner Vorlage beseitigen konnte**); Berichtigungen wie die folgenden widersprechen also durchaus nicht der angenommenen Identität von O[1] und dem cod. Vallae:

I p. 244, 6 ΘZ] AZ F, tz
I p. 248, 1 $B\Delta$] BA F, bl
I p. 260, 6 ἐλάττων] μειζων F, minor
I p. 262, 15 τῷ ζ'] του ζ' F, septima
II p. 6, 19 ἔλασσον] om. F, minorem
II p. 12, 10 τοῦ] τα F, eius spatii 25 ᾇ] ας F, quo
II p. 18, 9 ἑαυτῷ] εαυτο F, sibi ipsi 26 $N\Xi$] $M\Xi$ F, nx
II p. 24, 11 ᾖ] ην F, sit 13 ἀγμέναν] αγμενων F, ductam 28 ποτί] om. F, ad
II p. 28, 12 ᾖ] εστι F, sit
II p. 30, 19 ποτὶ τὰν H] ποτι ταν H λογον F, ad h
II p. 32, 2 ᾖ] ην F, sit

---

anderer Hand: quod itaque t aut est minus circum acceptis superficiebus a h b k, b z g l aut non minus (del. al. man.). sit primo non minus. quoniam ergo hinc inde due; aber darauf kann das „deficit" sich nicht beziehen, da es man. 1 ist.

*) Zweifelhaft ist die Erklärung der Variante II S. 300, 19 KH] h k O, supra scr. m. 1: aliter k i; die Lesart k i könnte dem O[2] entnommen sein, aber wahrscheinlicher ist es eine Conjectur (verfehlt) veranlasst durch den Schreibfehler Z. 21 KI F statt KH (k i O).

**) Ueberhaupt wird Roger Bacons scharfe Verurtheilung der Uebersetzerthätigkeit Wilhelms — comp. studii ed. Brewer p. 472: maxime hic Willielmus Flemingus, qui nihil novit dignum neque in scientiis neque in linguis — durch die Archimedesübersetzung nicht gerechtfertigt.

II p. 34, 21 ἔστων] εστω F, sint
II p. 42, 19—20 τοῦ .. τετραγώνου] τω ... τετραγωνω F, tetragoni
II p. 44, 3 δέ] δη F, autem 13 ΝΞ] ΗΞ F, nx 28 ΡΘ] ΡΟ F, rt
II p. 48, 9 εἰρημένας γραμμάς] ειρημενας γραμμαις F, dicte linee 22 ΗΩ] Ω F, hω
II p. 58, 2 ΕΖ] ΕΗ F, ez 9 ὅν] ων F, quam
II p. 62, 2 γραμμά] γραμμαν F, linea 14 τοσαυτάκις] τοσαυτασ F, tociens ἐνί] εν F, uno
II p. 64, 26 ἀπό] α F, ab
II p. 70, 11 περιφορᾷ] om. F, circulatione
II p. 78, 2 εἰ δέ κα] ει δε κατα F, si 7 ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος] αρχας και τας ελικος F, principii reuolutionis
II p. 82, 24 καθ' ἄν] καθο F, secundum quam
II p. 84, 5 ΕΔΖ] ΔΕΖ F, edz 8 οὗτος] ουτως F, iste
II p. 90, 7 δή] δι F, itaque 8 περιφέρεια] περιφερειαι F, periferia 19 ἑκάστα] εκαστας F, unaqueque
II p. 94, 16 τᾷ ὑπεροχᾷ] α υπεροχα F, excessu
II p. 102, 22 ΑΒΓΔΕΘ] ΑΒΓΔΘ F, abgdet
II p. 104, 3 ΟΘΕ] ΘΕ F, ote ὅτι] om. F, quod 29 ἀπό] υπο F, a
II p. 106, 6 ΑΒΓΔΕΘ] ΑΒΗΕΘ F, abgdet
II p. 110, 6 ἐλάσσονες] ελασσων F, pauciores
II p. 114, 2 ταυτᾶν] ταυτη F, hiis 28 κατά] ποτι F, secundum 13 ἀπό] υπο F, a
II p. 116, 4 κατὰ τὸν ἑνὶ ἐλάσσονα] κατα τα μεν ενι ελασσονα F, secundum una pautiorem
II p. 120, 14 ἐλάσσονες] ελασσων F, pauciores
II p. 124, 4 μιᾷ] μιας F, una
II p. 126, 10 Ν τριπλάσιον] $\overline{\eta\gamma\pi}$ F, n vero triplum 24 Δ] Α F, l
II p. 128, 15 οὖν ὅτι] οτι ουν F, igitur quod
II p. 130, 14 ὃν τό] ον τε F, quam quod
II p. 134, 20 ΗΔ] ΜΑ F, ha
II p. 136, 16 ΗΔ] ΜΑ F, ha
III p. 42, 3 προσκείσθω] προκεισθω F, apponatur
III p. 200, 24 οὔσης] ισης F, existente 28 ΞΟ] ΞΘ F, xo
III p. 250, 10 τοῦ ἀπὸ ΒΘ] om. F, quod a tb
III p. 360, 2 δεκαοκτώ] δε και οκτω F, decem et octo

Auffallende Conjecturen, die mit den meinigen zusammenfallen, sind folgende zwei*):

*) II p. 52, 1 fehlt ὁσακισοῦν nach περιενεχθεῖσα nur durch Versehen in meinem Text; es steht in allen Quellen.

II p. 60, 22 ὅσῳ] equali; vgl. p. 61 not. (ἴσῳ).
II p. 116, 19 τὰν δὲ περιφέρειαν, ἅ ἐστι μεταξύ] periferiam autem equalem intermedie (vgl. not. crit.).

Nur halbwegs richtig ist die Aenderung:

I p. 104, 18 ὑπὸ τετράδος μετρουμένας καὶ παραλλήλοις οὔσαις] τετραγωνους ουσας F*), entia equedistantia.
II p. 60, 6 ist das falsche εξω (st. ἐπάνω) wohl als nicht verstanden weggelassen.

Schon von diesen Stellen werden sich vielleicht durch vollständige Collationen der Handschriften VBC einige als solche herausstellen, wo besondere Fehler des cod. F vorliegen, welche im cod. Vallae nicht da waren. Mit Sicherheit oder doch mit der grössten Wahrscheinlichkeit kann dies von folgenden Stellen behauptet werden, die für die Frage O^1 = cod. Vallae also gar nicht in Betracht kommen:

I p. 144, 20 κατεσκευάσθω] κατεσκευ F, disponantur
II p. 28, 18 ἐλάσσων] F, sit minor, ἔστω ἐλάσσων BC? (richtig?)
II p. 32, 23 ΑΙ, ΚΕ] ΑΚΕ, supra scr. Ι m. 1, F; il ke
II p. 36, 21 Ο ποτιλαβόντα] AB?, ΟΠ οτι λαβοντα F, o assumentia
II p. 46, 3 sq. immer ⳨, das in F oft verunstaltet ist
II p. 50, 23 ἰσοταχέως] B, ισοταχει ως F, equevelociter
II p. 52, 3 ἑαυτῷ] BC, εαυτο F, sibi ipsi
II p. 64, 2 πρῶτος] πρωτοσ ος F, primus 10 τὰν μέν] BC, τα μεν F, eam quidem
II p. 74, 12 ἄρα] AB, om. F, ergo
II p. 76, 18 ΘΗΚ] ΘΝΚ F, sed corr.; thk
II p. 82, 21 ἐσσεῖται] εϖειται F, erit
II p. 80, 19 ΑΡ — τάν] bis F, non O
II p. 96, 7 ὥστε] AB, εστω F, ut
III p. 104, 1 σηκόν] σικον FV, σhκ mg. m. 1 O
III p. 364, 12 οὕτως — 13 τᾶς ΔΗ] B, mg. F, hab. O.

Das bisher Entwickelte können wir also dahin resumiren, dass Wilhelm von Moerbek seine Uebersetzung nach zwei griechischen Handschriften verfertigte, von denen die eine, jetzt vollständig verschollene, nur die mechanischen Schriften nebst περὶ κωνοειδ. enthielt und stark überarbeitet war, die andere aber die Handschrift Georg Vallas war.

Ueber diese Urquelle unserer griechischen Handschriften habe ich Phi-

---

*) Auch καὶ παραλλήλοις fehlt in F; hiernach ist die nota critica zur Stelle zu berichtigen.

lologus XLII S. 427 ff. die Vermuthung aufgestellt, dass sie 1422—23 durch G. Aurispa von Constantinopel nach Italien kam. Diese Vermuthung ist also in dieser Form nicht richtig. Diejenige Hds., die später G. Valla besass, ist, wie wir jetzt wissen, seit dem XIII. Jahrh. in Italien gewesen. Dass aber die in dem a. O. citirten Briefe (Ambrosii Travers. epp. XXIV, 53) von Aurispa erwähnte mathematische Hds. (habeo et alium mathematicum non perfectum vetustum etiam, cuius auctorem ignoro; caret quidem principio) eben die unsrige sei, halte ich noch immer für sehr wahrscheinlich. Die Beschreibung passt sehr genau auf den codex Vallae, der vorn und am Schluss defect war und namentlich vorn den Verfassernamen nicht hatte (vgl. Archimedis opp. III p. X), aber auf keine andere mir bekannte Hds. eines griechischen Mathematikers*); und es wäre doch sehr sonderbar, wenn es in der Renaissance in Italien zwei Hdss. griechischer Mathematiker von genau derselben schlechten Erhaltung gegeben hätte, die beide spurlos verschwunden wären. Man muss also annehmen, dass Aurispa irgendwo (wohl in Süditalien oder in seiner Heimath, Sicilien) die alte Hds. überkommen und ans Licht gezogen hatte, und in der That sagt er nirgends, dass gerade sie aus Constantinopel stammte. Dass er auch auf italischem Boden griechische Hdss. gesammelt hatte, steht fest. Im Jahre 1417 verkaufte er zu Pisa dem Niccolo Niccoli eine alte Thukydidhds., also noch vor seiner griechischen Reise; es ist der bekannte prächtig geschriebene Laurentianus, dessen occidentalischer Ursprung durch die lateinische subscriptio bezeugt ist (s. hierüber Ambrosii epp. VI, 8).**)

Fragen wir jetzt, wie Wilhelm dazu kam, den Archimedes zu übersetzen, so hängt dieses beim ersten Anblick befremdende Phänomen mit einer sehr bedeutenden Culturbewegung zusammen, worüber O. Hartwig Centralblatt f. Bibliothekswesen III S. 161 ff. vorzügliches Material zusammengestellt hat.

*) Die Pappushds. Vat. gr. 218 s. XII kann es kaum sein; der Pappustext ist allerdings vorn defect, aber voran geht das Fragment des Anthemius, zwar mit jüngerer (oder doch anderer) Hand, aber nicht in der Renaissancezeit geschrieben; und die mit junger Hand nachgezogene Ueberschrift mit Anthemius' Namen war von erster Hand da.

**) Ich kann nicht unterlassen auf einen verdächtigen Umstand hinzuweisen, wenn ich auch vorläufig ausser Stande bin die Spur zu verfolgen. Aurispa giebt an (Ambrosii epp. XXIV, 53), dass er von Constantinopel aus seine kirchlichen Hdss. nach Sicilien geschickt habe; später (ib. 61) sendet er dem Ambrogio von diesen Büchern einige Kirchenväter und erwähnt noch einen Aristophanes. Nun besass das Basilianerkloster St. Nicolas di Casole unter seinen kirchlichen Hdss. ebenfalls diesen Verfasser (Diehl Mélanges d'archéologie et d'histoire VI S. 187). Sollte Aurispa vielleicht die Basilianerklöster Unteritaliens ausgebeutet haben um die in Constantinopel gemachte Ernte noch zu vergrössern?

Indem ich mir vorbehalte bei anderer Gelegenheit der mathematischen Seite dieser Bewegung im einzelnen nachzugehen, wofür das Material noch lange nicht veröffentlicht, geschweige denn ausgenutzt ist, will ich hier nur die Umrisse skizziren.

Die auf griechischen Quellen, namentlich der griechischen Fachwissenschaft, beruhende arabische Cultur in Spanien, welche durch Vermittelung einer Reihe von Uebersetzern nach dem Arabischen dem Occidente so bedeutende Bildungselemente zuführte, wurde mit den Arabern nach Sicilien und Unteritalien gebracht, wo sie von den Normannen aufgenommen eine besondere Richtung nahm. Man ging hier, auf den starken Resten griechischer Bildung und Sprache fussend, die in Süditalien seit der byzantinischen Herrschaft sassen, auf die griechischen Quellen zurück und über die arabische Anregung hinaus. Sprachkenntniss und Handschriften gewährten die griechischen Elemente und die Verbindung mit Byzanz. Von den Normannen Süditaliens erreichte diese Anregung ihre Stammesgenossen in England, mit denen sie in lebhaftem, auch litterarischem, Verkehr standen. Aber auch in Süditalien dauerte diese Richtung noch unter den Hohenstaufen fort, und ihr verdankt ohne Zweifel Thomas Aquinas, der ja in Süditalien geboren und erzogen wurde, den Antrieb zu seinem Streben nach reineren Quellen der aristotelischen Texte. Er liess unseren Wilhelm von Moerbek wenigstens einen Theil der Schriften des Aristoteles aus dem Griechischen neu übersetzen. Die Kenntniss der griechischen Sprache war damals durch die Errichtung des lateinischen Kaiserreichs und die dadurch herbeigeführten Beziehungen zum Orient verbreiteter geworden; namentlich wurden viele Geistliche nach Griechenland geschickt. So treffen wir auch Wilhelm 1260 als Priester in Theben, und die hier erworbene Sprachkenntniss hat er also als Uebersetzer verwerthet.

Bekanntlich vermochte die hier kurz angedeutete Bewegung, die mit Roger Bacon ihre höchste Stufe erreicht und an die Renaissance anklingt, nicht durchzudringen; die Bemühungen der einzelnen Gelehrten konnten den Umschlag noch nicht herbeiführen. So sehen wir auch, dass die Archimedesübersetzung Wilhelms gar keinen Einfluss auf die Mathematik des Mittelalters ausgeübt hat. Wo Archimedes citirt wird, wie bei Bradwardin Geometria specul. V, 5, ist es die arabisch-lateinische Uebersetzung (wohl von Gerardo von Cremona) der dimensio circuli, die z. B. in cod. Dresd. Db 86 erhalten ist.*)

Dagegen hat unsere Uebersetzung eine Rolle gespielt, als sich das An-

*) Wenn die Angabe bei Charles Rog. Bacon S. 331, dass Bacon eine lateinische Uebersetzung des Archimedes kannte, richtig ist, wird es sich wohl damit ebenso verhalten. Ich habe eine solche Stelle bei Bacon nicht finden können.

denken des Archimedes in der Renaissance mit nachhaltenderer Wirkung neu belebte. Nicht nur Gauricus und Tartaglia beuteten sie aus, sondern schon früher hatte sie dem Jacobus Cremonensis bei seiner Neuübersetzung gedient. Das geht aus folgenden Stellen, wo Fehler oder Interpolationen des Ottobon. bei Cremonensis wiederkehren, unwiderleglich hervor:

I p. 260, 12 *λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΔ τομεῖ ὅμοιοι*] accipiantur sectores similes ipsi pza O, *sumptae sint* itaque *sectores* similes ipsi pfa Cremon.

II p. 300, 7 *ΒΔ*] bd longitudine O, bd ad bf *longitudine* Cremon.

II p. 302, 2 post *δυνάμει* add. equales enim que dz kh O, aequales sunt enim df kg Cremon.

Aber auch der Schreiber derjenigen Hds., welche der Editio princeps zu Grunde liegt (jetzt in Nürnberg, N[a]), hat sich des Ottobon. bedient, um vermeintliche oder wirkliche Lücken seiner griechischen Vorlage (F) auszufüllen. Beweisend sind natürlich nur diejenigen Stellen, wo er Interpolationen aus Ottobon. aufgenommen; die wirklichen Berichtigungen, die er wohl zum grössten Theil derselben Quelle verdankt, könnten ja durch Conjectur selbständig gefunden sein. Ueberzeugend sind dagegen folgende Beispiele:

II p. 94, 10 *τοῦ προτεθέντος*] preposito spatio O, *τοῦ προτεθέντος χωρίου* N[a]

II p. 136, 11 *τὸν Ν*] sectorem n O, *τὸν Ν τομέα* N[a] 27 *τὸ Ξ*] spatium x O, *τὸ Ξ χωρίον* N[a]

II p. 166, 14 nach *σαμεῖον*: et secetur in duo que db penes t O, *καὶ τετμήσθω δίχα ἁ ΔΒ κατὰ τὸ Θ* N[a]

II p. 192, 24 vor *δεικτέον*: diameter autem portionis sit bd O, *διάμετρος δὲ τοῦ τμάματος ἔστω ἁ ΒΔ* N[a]*)

II p. 214, 9 nach *ΒΓ*: penes z, h O; *κατὰ τὰ Ζ, Η* N[a] 17 *τετραπλασία δὲ ἁ ΒΔ*] (nach Eutocius) que autem db quadrupla O, *ἁ δὲ ΒΔ τετραπλασίων* N[a]

II p. 228, 23 *τοῦ ΑΔΕΓ τόμου διάμετρός ἐστιν ἁ ΖΗ*] nach Eutocius, *τοῦ* F; sectoris adeg dyameter est quae hz O; *τοῦ ΑΔΕΓ διάμετρός ἐστιν ἁ ΗΖ* N[a]

II p. 230, 1 *ἐπεὶ αἱ*] om. F, et quae quidem O, *καὶ αἱ μέν* N[a] (sprachwidrig)

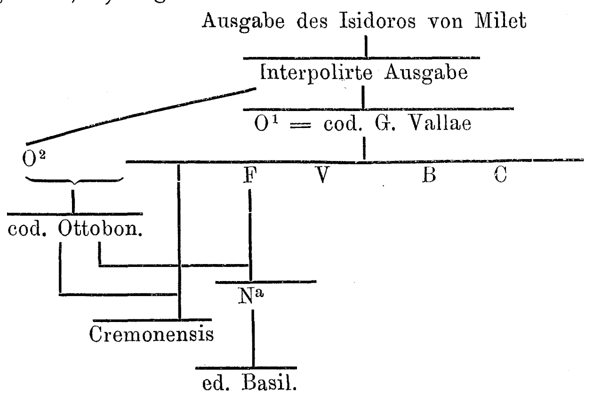
Besonders charakteristisch und beweisend sind die Stellen, wo die im allgemeinen recht gewandte Rückübersetzung unrichtig ist. So II p. 206, 3; wo die ganze interpolirte Stelle dem Ottobon. entnommen ist (Z. 3—7); hier hat O: et copulentur quae tn im, d. h. *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΝ, ΙΜ*; in N[a]

---

*) Sonderbar ist II p. 170, 16 *ἔστιν ἄρα*] est ergo et cetera O, est ergo nt centra Tartaglia, *ἔστιν ἄρα τὸ Ν σαμεῖον· ὅπερ* N[a]. *ὅπερ* scheint dem „et cetera" zu entsprechen, *τὸ Ν σαμεῖον* eigene Interpolation zu sein.

steht aber falsch*) καὶ ἐπεξεύχθω τὰ Θ, M, I, N, als ob quae Plural. Neutr. sei und t, n, i, m da stände. Ebend. Z. 4 ist τριγώνῳ τῷ AKB, Z. 5 τμᾶμα δὲ τὸ AKB τμάματι τῷ BΔΓ falsche Wortstellung, durch die Uebersetzung „trigono quidem akb“ und „portio autem akb portioni blg“ veranlasst, was so wiedergegeben werden sollte: τῷ μὲν AKB τριγώνῳ . . . τὸ δὲ AKB τμᾶμα τῷ BΔΓ τμάματι. II p. 238, 7 τοῦ μὲν ὅλου τμάματος] om. F, totius quidem portionis O, μὲν τοῦ ὅλου τμάματος N[a] sprachwidrig. Die Interpolation II p. 210, 13 (nach ΘE) ἔσται μείζων τᾶς BΘ. καὶ ἔστω ἁ ΘH entspricht der Uebersetzung: erit maior quam linea bt sit que ht; aber diese Worte, die in die umgearbeitete Fassung des Ottobon. (wo ἐπειδή Z. 14 bis τμάματα Z. 18 fehlt) genau passen, sind in N[a] ganz sinnlos und störend der abweichenden Lesart von F angeklebt. Auch die Interpolation des N[a] II p. 210, 15 (nach Θ) εὐθυγράμμου δὲ τοῦ AKBΔΓ τὸ E ist der Umarbeitung des Ottobon. (quoniam autem portionis *quidem* abg centrum grauitatis est signum t, *rectilinei autem akblg signum e*) entnommen und in die verschiedene Fassung des F, so gut es gehen wollte, eingeschwärzt. Der Schreiber von N[a] hat also neben seiner Vorlage F (Archimedis opp. III p. XLVII) offenbar den Ottobon. direct oder indirect da benutzt, wo der Text des F ihm verderbt oder unklar schien.

Diese Beobachtung bringt mit einem Male in das früher sehr verwickelte Verhältniss zwischen Gauricus-Tartaglia, Cremonensis und N[a] das hellste Licht, und der Stammbaum der Textesquellen lässt sich jetzt nach Ausscheidung der interpolirten Handschrift Nicolaus des V[ten], die ich früher annehmen zu müssen glaubte,**) folgendermassen vereinfachen und erweitern:



*) Ἐπεζεύχθω steht so nur von Geraden, nicht von Punkten.

**) Das Archimedis opp. III p. XXII ff. besprochene Supplement der Lücke III S. 4, 18 ist also doch Interpolation des Jacobus Cremon. selbst.

DER
ARITHMETISCHE TRACTAT
DES
RADULPH VON LAON.

VON

DR. ALFRED NAGL.

Ueber den Verfasser dieses hier zum erstenmale durch den Druck veröffentlichten Tractates weiss ich nichts weiter anzugeben, als was in Michaud's Biographie universelle II, 44 im Artikel: Anselme de Laon berichtet wird. Er wird als ein Bruder dieses im Mittelalter sehr berühmten Theologen genannt, welcher gegen 1030 zu Laon geboren, daselbst und zu Paris lehrte und am 15. Juli 1117 starb, nachdem er die ihm wiederholt angetragene bischöfliche Würde beharrlich ausgeschlagen hatte. Radulph, oder Raoul wie der Name im Französischen lautet, selbst unterstützte seinen Bruder Anselm im Lehramte, und ersetzte ihn darin nach dessen Ableben. Während der sechzehn Jahre als er ihn überlebte (Raoul müsste darnach also im Jahre 1133 gestorben sein), hat die Schule von Laon nichts von ihrem Glanze verloren. Es waren, heisst es bei Michaud, von Raoul zwei nicht veröffentlichte Werke hinterblieben, das eine über den Halbton, das andere über die Arithmetik; sie scheinen verloren zu sein.*)

Das letztere ist nun nicht der Fall, beide Tractate sind im Pariser lat. Codex, fonds St. Victor no. 534, derzeit no. 15120 enthalten, nach welchem wir hiemit die Ausgabe des arithmetischen besorgen. Allerdings scheint diese Handschrift die einzige noch vorhandene von den Schriften des Radulphus zu sein. Fügen wir noch ausdrücklich bei, dass auch Radulph niemals einen Bischofstuhl innegehabt und dass, wie übrigens schon aus der Liste der Bischöfe von Laon ersichtlich,**) derselbe von M. Chasles***) ganz irrigerweise unter diese letzteren versetzt wird.

Der erwähnte Pariser Pergament-Codex ist heute mit einem modernen Einbande versehen und beginnt nach den Papier-Schutzblättern mit einem pergamentenen unnumerierten Schutzblatte, welches folgende Aufschriften trägt; vorne: Volume de 77 feuillets. Les feuillets 38—40, 47, 48, 76 sont

*) Der Verfasser der Histoire de la France littéraire VII, 143 bezieht sich aber auf die Handschrift zu St. Victor in Paris damals no. 758, über den Halbton.

**) P. Pius Bonif. Gams, Series episcoporum eccl. rom. Ratisb. 1873 v. Lugdunum.

***) Comptes rendus hébd. de l'acad. des sciences VIII (1839) p. 80.

blancs. 26 Septembre 1888 (roth); rückwärts: Ex Bibl. S. Vict. Paris. S. Vict. 534 (schwarz). Von der Hand der ersten Aufschrift, also allerneuestens, und ebenfalls roth sind dann alle weiteren Blätter fortlaufend von 1—77 arabisch bezeichnet. Diese Blätter zeigen aber noch eine zweite Numerierung in arabischen Ziffern etwa aus der Zeit der Wende des 14. Jahrhunderts und zwar beginnend das Blatt 1 mit der Bezeichnung **2**, sodass diese ältere Bezeichnung, soweit der damalige Bestand noch vorhanden, je um eine Nummer voran ist. Die Sache erklärt sich durch das derzeit letzte Pergamentblatt des Codex, welches die Nummer 77 neu, aber **1** jener älteren Bezeichnung trägt und zweifellos einmal das erste Blatt des Codex gebildet hat. Es ist rückwärts leer und trägt vorne folgende Aufschriften:

1. gleichzeitig oder wenig jünger als unser Text: Iste liber est Sancti Victoris parisiensis. Quicumque eum | furatus fuerit. uel celauerit. uel titulum istum deleuerit | anathema sit.

2. dem Anscheine nach von der Hand der älteren Paginierung herrührend: Que secuntur hic habent. sclilicet. | Radulphi laudunensis de abaco. 2. | de semytonio. 42. Glossę super ta|bulam compoti. 50. Quedam alia. 58. | Puluis mathematici. 62. quedam | de algorismo. 93. de .... composito contenti C. 99 et usque 101.

Der Codex, von mehreren, der Zeit nach nicht erheblich auseinanderliegenden Händen hergestellt, befand sich also ungefähr zu Anfang des 15. Jahrhunderts schon in der heutigen Vereinigung. Unser Tractat mit der Ueberschrift in rother Farbe: Incipit Liber Radulfi laudunensis de Abaco mit darauffolgendem Initiale A in blauer Farbe stand augenscheinlich von Anbeginn an der Spitze der Handschrift (fol. 1^r—37^v neu, **2—38** alt; es folgen leer 38—40 neu). Dieser, sowie der nun folgende Tractat: de semitonio (fol. 41^r—46^r neu, **42—47** alt) sind von Einer Hand geschrieben, dem 13. Jahrhunderte angehörig. Ebenso der nächste Tractat (49^r—52^r neu, **58—61** alt; hier sind also vorher die Blätter **50—57** inzwischen ausgefallen) und was weiter kommt, von anderer Hand, gehörte jedenfalls nicht zum ursprünglichen Bestande der Handschrift; der Inhalt ist von hier an durchweg algoristischer Natur. Dies letztere war noch hervorzuheben, weil unser Tractat selbst und die von derselben Hand folgenden Tractate durchaus noch dem Lehrsysteme der Abacisten angehören.

Trotz der von Radulph selbst wiederholt betonten Kürze wird uns seine Darstellung der Abacus-Wissenschaft von oft ermüdender Weitschweifigkeit erscheinen. Sein Tractat ist aber wichtig, weil er, der allerletzten Zeit, bevor die Gerbert'sche Arithmetik von der arabischen mit einer gewissen Plötzlichkeit verdrängt wird, angehörend, seine Wissenschaft in ihrer vollen scholastischen Entwicklung zeigt. Sie hat keine Fortschritte gemacht. Noch

immer die „Regula Gerberti“, die uralten ermüdenden Multiplicationsregeln ohne die Fähigkeit, mit einer generellen Stellenregel zu operieren, noch immer die Darstellung der ebenfalls uralten divisio cum differentia, obgleich freilich dieser jetzt eine weit ausführlichere Behandlung der divisio aurea d. h. derjenigen ohne die dekadische Differenz beigegeben ist, oder vielmehr bezeichnenderweise vorangeht, sodass neben ihr die divisio cum differentia sich ersichtlich als ein nunmehr veralteter Gegenstand darstellt. Aber auch das Brüchesystem ist noch immer das alte römische mit den spätrömischen Zeichen und nur durch die bemerkenswerthe Neuerung, dass Radulph mit diesen Zeichen nicht mehr, wie die früheren Abacisten, auf einer eigenen Columne für die Brüche, sondern zugleich auf den dekadischen Columnen der ganzen Zahlen operiert, verräth er vornehmlich das geschichtliche Stadium seines Tractates. Im einzelnen ist diese Schrift aber gerade wegen ihrer genauen, umständlichen Darstellung der Operationen von Werth, da sie hiemit manche zweifelhafte Einzelnheit ins Klare stellt.

Radulph steht der Zeit, in welcher sich die Kenntniss der indischen Rechenkunst durch Vermittlung der Araber in Europa unter der Bezeichnung des Algorismus verbreitet, so nahe, dass wir mit einigem Grunde annehmen können, es sei ihm diese neue Form des Rechenwesens nicht ganz unbekannt geblieben. Wird doch sein berühmter Zeitgenosse Atelhart von Bath geradezu als derjenige vermuthet, welchem die Uebersetzung des arithmetischen Tractates des Alkharismi ins Lateinische zuzuschreiben sei. Um so bemerkenswerther ist es, dass Radulph in jeder Beziehung den Traditionen der Schule Gerbert's treu bleibt und in nichts einen so nahe liegenden Zusammenhang seiner Wissenschaft mit den Arabern andeutet. Es gilt dies auch von seinem Zeitgenossen Gerland, dem Prior von St. Paul zu Besançon, dessen Abacus-Tractat (Bullett. Boncompagni X, 595—607) in allen wesentlichen Merkmalen der Methode demjenigen Radulph's gleichkommt. Es ist dies meines Erachtens einer der wichtigsten Umstände für die Annahme, dass die arithmetischen Kenntnisse Gerbert's und seiner Nachfolger durchaus jedes Zusammenhanges mit den Arabern entbehren. Radulph wiederholt die fast in allen Schriften dieser Schule vorkommende Angabe, dass die Wissenschaft dieser Rechenmethode ein alter Besitz des Abendlandes gewesen und allmälig fast in Vergessenheit gerathen sei, bis Gerbert (er schreibt den Namen des berühmten Pabstes stets Girbertus, fol. 4^v, 7^r und 7^v) durch seine Studien sie wieder hervorgezogen. Schon vor längerer Zeit ist darauf verwiesen worden, dass Radulph an diesem Verdienste auch den „eximius doctor Herimannus“ theilnehmen lässt und seit der Abacus-Tractat des Hermannus Contractus selbst wiedergefunden und veröffentlicht ist*), kann wohl

*) Im Bulletino mat. Boncompagni X 643—647, nach einer Handschrift zu Karlsruhe. Mit Vorrede von Treutlein.

weiter kein Zweifel sein, dass es sich hiebei um den berühmten Mönch des Klosters Reichenau handelt.

Neben der Abwesenheit jeder Erwähnung der Araber ist aber in Radulph's Schrift zu beachten die Bezeichnung des Abacus als „mensa philosophorum" (fol. 1^r^), ohne Frage eine Hindeutung auf die damals allgemeine Benennung „mensa Pythagorica"; ferner die Bemerkung, dass die Assyrer die Erfinder dieser Einrichtung seien und dass die bekannten abenteuerlichen Benennungen der Zahlzeichen: igin, andras u. s. w. chaldäische Ausdrücke seien (fol. 1^v^, 2^r^). Endlich aber wird der bekannten so vielfach angefochtenen Rückleitung dieser Rechenmethode auf die Neu-Pythagoreer noch näher getreten, wenn Radulph sagt, dass die Erfindung und der Gebrauch des arithmetischen Abacus aus der Pflege des Quadriviums stamme und namentlich der Geometrie, zu deren Lehre ein Abacus ohnehin benöthiget worden sei (fol. 4^v^). Bei dieser Gelegenheit erhalten wir zugleich einen Fingerzeig, dass diese Methode bis an das Ende ihrer Geschichte reine Schulwissenschaft geblieben; denn noch ein zweitesmal, wo Radulph auf ihre praktische Verwendung zu sprechen kommt, weiss er abermals von keinem anderen Gebrauche derselben, als für die in den Quadrivium-Disciplinen vorkommenden Berechnungen.

Die neun Zahlzeichen, deren sich Radulph, oder genauer unsere Handschrift des 13. Jahrhunderts, aber jedenfalls nach alter Vorlage bedient, sehen in genauer Nachbildung folgendermassen aus:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	ʊ	ꝕ	ꝶ	ꟼ	ꟼ	ʌ	8	9
		ꝁ				ʌ		9

Es enthält die zweite Reihe die Zeichen nach fol. 2^r^, die nächst untere jene mehr cursiven nach den im Texte zerstreuten Stellen bei Darstellung der Operationen. Ihr Charakter ist noch immer der alte wie zur Zeit Gerbert's und bei seinen unmittelbaren Nachfolgern. Diess ist auch der erste wesentliche Fingerzeig in der interessanten Frage, ob Radulph noch mit beweglichen vorgerichteten „caracteres", „apices" operiert, oder ob er seine Rechnungen etwa schon geschrieben habe. Er erklärt sich über diesen Punkt nicht ausdrücklich. Aber seine steifen, umständlichen Zeichen weisen den Gedanken an eine cursive Behandlung derselben durchaus von vornherein ab.

Zu beachten ist in dieser Frage weiterhin die Einrichtung seines Abacus. Dieser hat noch immer die alten traditionellen siebenundzwanzig Columnen, als lineae bezeichnet, (fol. 1^r^) und Radulph weiss hiebei wieder eine jener ebenso hochgeschätzten als überflüssigen und verwirrenden Schulerfindungen zu tradieren, welche hier darin besteht, dass ausser den nothwendigen dekadischen Ueberschriften der einzelnen Columnen mit . . C X I auch die neun Zahlzeichen als Ueberschriften für je drei zusammengefasste Columnen verwendet werden.

Durch wagrechte Linien wird der Abacus weiterhin in vier wagrechte Columnen, ebenfalls als lineae bezeichnet, getheilt, deren erste oberste zur Anstellung der Multiplicanden und Divisoren; die zweite für die Summen aus der Multiplication und für die Dividenden, die dritte dagegen für die Multiplicatoren und Quotienten dient. Die aus diesen Linien entstandenen quadratischen Felder erhalten aber auch noch bei Radulph jene in ihrem Zweck bisher ganz unerklärten ständigen Inschriften der Zahlzeichen, wie wir ähnliche schon in den Abaci der ältesten Abacisten wahrnehmen. Er setzt in die erste wagrechte Columne ein (immer von rechts nach links) die Bezeichnungen s (singularis), d (decenus), c (centenus) u. s. w., in die zweite die zwei Hälften dieser Zeichen ʃʃ (semis, semis), v v, ʟ ʟ u. s. w., in die dritte je eine dieser beiden Hälften ʃ, v, ʟ und endlich in die vierte die römischen Bruchzeichen. Diese ständige Beschreibung des Abacus ist aber der deutlichste Beweis, dass auch bei Radulph von einem Schreiben der Rechnungsoperation keine Rede sein kann.

Bemerkenswerth ist ferner, dass Radulph die gesammte Numeration der Fingerrechnung darstellt. Ueber ihre praktische Anwendung spricht er sich nicht aus.

Hinsichtlich seiner Darstellung der Rechnungen auf dem Abacus wäre zunächst zu erwähnen, dass er auch, und zwar nach der Multiplication als erster Species, die Addition und Subtraction ausdrücklich anführt und darstellt. Seine Multiplication ist dadurch bemerkenswerth, dass er hiebei eine genaue Anweisung über den Gebrauch des zehnten Zeichens gibt, welches auch bei ihm als sipos, aber auch als rotula bezeichnet und, wie die moderne Null, durch einen kleinen Kreis, jedoch mit einem Punkte in der Mitte dargestellt wird. Wenn er diesem Zeichen als numerorum nullum, nullius numeri significatio (fol. 2^{v}, 11^{v}) beilegt, so ist dies keineswegs in unserem heutigen Sinne zu verstehen. Der Autor will hiemit nicht wie wir die Negation der Zahl, sondern die Abwesenheit jeder Beziehung auf die Zahl bezeichnen. Ihm, wie der damaligen Schule überhaupt, diente die sipos gar nicht als Zahlzeichen, sondern lediglich als ein Markierungsinstrument für die Multiplication, um nämlich den eben in Function befindlichen Multiplicator durch Darübersetzen einer solchen rotula zu merken. Mit einer zweiten rotula wird sodann der eben zu rechnende Multiplicator gemerkt, sodass diese rotula fortwährend weiterrückt und in der Function sich zur ersten rotula gleichsam wie der Minutenzeiger zum Stundenzeiger verhält. Diese Verwendung tritt nur bei der Multiplication auf und auch hier kann sie auf dem Abacus nur als gänzlich überflüssig, ja störend betrachtet werden. Aber wichtig ist diese Erscheinung der sipos und ihre Anwendung darum, weil sie ein deutlicher Beweis ist, dass die neun Zahlzeichen der Abacisten mittel- oder unmittelbar aus einer Quelle stammen, in welcher der Gebrauch des Nullzeichens im Sinne

der indischen Arithmetik vorhanden war. Ein ähnliches Anzeichen unverstandener Anwendung eines Operationsmittels der indischen Arithmetik scheint mir in der ersten Form der divisio aurea, wie sie Radulph und viele seiner Vorgänger, namentlich schon Bernelinus, lehren, zu liegen. Er verschiebt nämlich den Divisor genau so, wie es im Algorismus geschieht. Aber von dem wichtigen Vortheile des letzteren, nach der jeweiligen Stellung des Divisors den Quotienten in den Rang der Einerstelle des Divisors einzustellen und hiernach ohne jede Stellenregel die Location der Quotienten zu bestimmen, profitiert Radulph und die Abacistenschule noch nicht, und kann es nicht, weil die Einerstelle des Divisors, wenn sie keine Einer hat, noch durch kein Nullzeichen markiert ist, sondern einfach leer bleibt. Radulph muss daher wieder die alten Stellenregeln von dem ponere sub se, rücksichtlich secundare, tertiare ... denominationes — hervorholen und macht sich daher mit jenem Verschieben der divisores ganz unnütze Mühe. In der That wird dann auch die Division ohne diese Verschiebungen, sodass also der Divisor auf seinem ursprünglichen Platze bleibt, dargestellt. Das Verfahren ist dann, bis auf den wichtigen Punkt der Stellenbestimmung für die Quotienten, unserem heutigen ziemlich nahestehend.

Aber auch die Division mit den dekadischen Differenzen, die divisio ferrea, wird dargestellt, obgleich wie gesagt in letzter Linie und gleichsam nur mehr anhangsweise. Die Bemerkung Radulph's (fol. 20[r]), dass die Erfinder der Bezeichnungen aurea, ferrea divisio über den Sinn derselben sich nicht ausgesprochen haben, beruht auf Unkenntniss des Herganges. Allerdings waren diese Bezeichnungen seit langem in der Schule zu rein technischen geworden. Schon der Anonymus bei Chasles, Comptes rendus de l'acad. XVI, 243 sagt: quotiens dividendi usque sub divisoribus referuntur, mutatur divisio et de ferrea redit ad auream, scilicet de ista cum differentiis ad illam quae est sine differentiis. Den auf der Hand liegenden Umstand, dass diese Ausdrücke ursprünglich bloss tropischer Natur, mit Bezug auf den Werth der Methoden, gewesen, bestätiget aber ausdrücklich der ebenfalls anonyme Tractat Doctori et patri theosopho (Boncompagni Bullett. X, 609): Dicuntur aureae divisiones eo, quod ad intelligendum faciles et super auri gratiam sint delectabiles. sicut econtra ferreae, quae sunt nimis graves, quasi ferri duritiam praeponderantes. Mag diese Erklärung hinsichtlich des didaktischen Verhältnisses beider Methoden bedenklich erscheinen, so wird die Bemerkung Bernelinus' im Liber Abaci II. (Olleris, Gerbert p. 369) in diesem Punkte besser befriedigen und, wenn sie auch nicht geradezu jene Bezeichnungen, die etwas jünger zu sein scheinen, enthält, doch die Sache vollends aufklären: Ex qua re claret, hanc quasi dominam dividere, cui dividendi quidlibet aequa patet potestas, illam cum dif-

ferentia quasi famulam, cui nunc in uno dividendi licentia datur, in alio denegatur.

Wichtig für die Geschichte des Gegenstandes ist aber besonders die Rolle der Brüche in der Division Radulph's. Mir ist erst durch diesen Tractat verständlich geworden, warum die spätern Abacisten auf den Ausweg verfallen sind, die ältere Bruchcolumne fallen zu lassen und die Bruchzeichen unmittelbar in den dekadischen Abacus mit Stellenwerth einzulegen. Für die Handhabung der römischen Brüche war die Division mit der dekadischen Differenz trefflich geeignet. Als aber später die divisio aurea in den Vordergrund trat und die Aufgabe sich ergab, hiebei auch mit Brüchen zu operieren, zeigte sich (die Beispiele Radulph's lehren das sehr anschaulich), dass dies nur durch stete Auflösungen der Brüche des Dividendes in noch kleinere Bruchwerthe geschehen konnte. Diese Auflösungen wären in der alten Bruchcolumne ohne Verlust jeder Uebersicht und gänzliche Verwirrung schlechterdings nicht ausführbar gewesen, während ihre „numerositas" durch jene dekadische Behandlung sich ohne weiteres vereinfacht. Freilich wird derjenige, welcher die arithmetischen Werthe der römischen Brüche nicht sehr genau inne hat, bei der Verfolgung der Beispiele Radulph's die Wahrnehmung machen, dass hiebei der stete Gebrauch einer Brüchetabelle mehr als je nothwendig geworden ist. Auch Radulph hätte also füglich eine solche Tabelle aufstellen sollen.

Die Brüchezeichen unserer Handschrift, obwohl zu einer Zeit niedergeschrieben, wo ihre Anwendung schon völlig antiquiert war, sind leidlich correct (fol. 32[v], 33[r], besonders die Zusammenstellung ib. linea 16 und 17). Besonders gilt dies von den Uncialzeichen, dem as als der quer durchstrichenen I, wie schon bei Priscianus, der uncia in der Form Ͱ, wie sie zumeist bei den späteren Abacisten erscheint*) und den Vielfachen der uncia, wofür lediglich die Elemente S (semis) und Ƨ (sextans) durch Zusammensetzung und durch Erhöhung derselben um je eine uncia vermittelst eines Seitenstriches (S, Ƨ) in Verwendung kommen und wobei der innere Verbindungsstrich in den Gruppen, wie dies regelmässig in den Abacisten-Handschriften der Fall ist, die cursive Anwendung des apex des sextans-Zeichens darstellt (SSS somit gleich SƧƧ). Schwankender sind einige Zeichen für die Minutien der uncia; für dragma Ͻ|C findet sich auf fol. 32[v] lin. ult., für dimidia sextula oder temisescla Ψ auf fol. 33[r] l. 1 das correcte Zeichen; für das Oboluszeichen fand ich bisher überhaupt keine fest bestimmte Form, auch in dieser Handschrift schwankt das Zeichen und ich habe |÷ nach fol. 33[r] l. 17

*) Für das zweite Zeichen unserer Handschrift fol. 32[v] l. 5 für die uncia weiss ich keinen Zusammenhang anzugeben.

als das wahrscheinlichste gewählt. Das Doppelzeichen daselbst für den calcus ist ebenfalls unsicher, in anderen guten Handschriften findet sich nur das Zeichen ω. Auch ist nicht völlig klar, wie Radulph ib. lin. 18 die Zählung „simul figurae XXVII“ meint.

Als Multiplicationsbeispiele wird man Radulph's Divisionsproben zu nehmen haben (fol. 34r f., 34v), wobei freilich die wesentliche Lücke für die Multiplication von Brüchen mit Brüchen bleibt. Auch die Divisionen beschränkt er auf den Fall ganzer Zahlen und gelangt zu Brüchen nur durch die Wahl eines den Dividend an Grösse übertreffenden Divisors.

	C	X	I
a	5	6	4
b	1	5	8
c	S		
d	Ƴ		
f		t	
g			7
h		SS	ƷS
i	Ʒ		
k	υυ		
l		Ґυυ	Ʒ£υ
m	ɔ|c	ɔ	
	|÷	ʃʃυ	Ψ
n	|÷		
	H,,	|÷ H,,	H
o			υυ
e			H,, |÷ υυ Ƴ

Ich glaube den Freunden des Gegenstandes dienlich zu sein, indem ich eins der Beispiele Radulph's (fol. 35v l. 31 s. Beispiel 158 : 564) auf dem Abacus selber ausführe. Der Dividend und die weiteren Zeichen im Abacus verschwinden im Laufe der Rechnung sämmtlich, bis auf die duella bei o und die vier denominationes bei e. Leider ist diese Bewegung graphisch nicht gut darstellbar. Wer die Rechnung studieren will, wird sie selbst schreiben und die verschwindenden Zeichen ausstreichen oder weglöschen müssen.

a Divisor 564. b Dividend 158. c Auflösung des Dividend 5 im arcus decenus (X) in 10 semisses, diese dargestellt durch Ein semis-Zeichen im nächsten arcus C. d Auflösung der Dividende 1 und S im C in 6 quadrantes, diese durch 5 dividiert geben 1 quadrans als denominatio bei e und Dividendenrest 1 quadrans bei d. Sodann denominatio Ƴ multipliciert mit 6 im X, gibt 6 quadrantes, diese abgezogen von dem quadrans in C, dort relativ gleich 10 quadrantes, gibt Rest 4 quadrantes, oder einen as im X. Sohin denominatio Ƴ multipliciert mit 4 im I gibt 4 quadrantes = 1 as, abgezogen vom Dividend 8 daselbst, bleiben 7 bei g. Sonach Fortsetzung der Division; zuvor Auflösung der 7 im I in 84 unciae = 10 bisses und 1 triens, letzterer im I, erstere durch 1 bisse im X eingelegt bei h; sodann weitere Auflösung von t und SS im X, zusammen = 20 unciae = 10 sextantes, wofür 1 sextans im C eingelegt bei i, dieser sextans weiter aufgelöst in 48 scripuli = 6 duellae und diese endlich dividiert durch 5 gibt denominatio

1 duella bei e und Dividendenrest 1 duella bei k. Sodann diese denominatio duella multipliciert zuerst mit 6 im X = 6 duellae, abgezogen von der duella im C (hier 10 duellae), bleiben im X 4 duellae = 32 scripuli = 1 uncia und 1 duella; beide bei l eingelegt. Weiter im I 4 multipliciert mit υυ = 4 υυ, ab von ЪS (bei h) bleiben Ъ£υ. Dann Fortsetzung der Division, vorher Auflösung von Ъ£ (im arcus I) in 60 scripuli = 10 sicilici, wofür 1 sicilicus im X bei m; ferner aufgelöst im X die Ɲ und der Ɔ in 10 dragmae = 1 dragma im C bei m. Diese dragma aufgelöst in 6 oboli und diese endlich dividiert durch 5, denominatio ⊦̇ bei e und Dividendrest ⊦̇ bei m. Sohin Multiplication im X, nämlich ⊦̇ mit 6 = 6 ⊦̇, diese ab von υυ (bei l) bleiben 5 scripuli = ∮υ bei m und Multiplication im I von ⊦̇ mit 4 = 4 ⊦̇, ab von υ (bei l) bleiben 2 scripuli = Ψ bei m. Sohin Fortsetzung der Division, Auflösung von ∮υ = 10 ⊦̇, hierfür ⊦̇ im C eingelegt bei n. Daselbst liegen nun 2 ⊦̇ = 6 siliquae; diese dividiert durch 5 gibt denominatio Ḫ bei e und Dividendrest Ḫ bei n. Sodann Multiplication im X, Ḫ mit 6, ab von 10 Ḫ (Ḫ im C) bleiben 4 Ḫ im X, welche = ⊦̇Ḫ, eingelegt bei n. Endlich Multiplication im I, ⊦̇ mit 4, ab von Ψ bleibt H. Ergebniss: denominationes ЪυυⱵ⊦̇Ḫ und Divisionsrest 10 ⊦̇, 10 Ḫ und H zusammen gleich υυ bei o.

Das Studium des Ganges solcher Operationen ist sehr wichtig, um über den Grad der Anwendbarkeit der römischen Brüche auch im Alterthum ins Klare zu kommen, und hiezu scheint mir kaum einer der erhaltenen Tractate so geeignet, als eben der vorliegende Radulph's.

E codice Parisiensi latino no. 15120.

f. 1r l. 1 Incipit LIBER Radulfi laudunensis de abaco; |

ADIUUANTE domino aliquid in abacum scripturi, neces|sarium duximus, in ipso operis primordio, quid abacus sit, | quid utilitatis habeat, qua ratione descriptus, cui potissi|mum disciplinarum famuletur, disserere. Abacus igitur ex gręco | uocabulum trahit. Gręci enim Mensam abacum dicunt. Siquidem | abacus mensa est philosophorum, sagaci industria reperta | et ad calculandi peritiam numeris multiplicandis et diuidendis | commode l. 10 attributa, ut incrementandi et diminuendi scien|tia a natura profecta instrumenti huius adminiculo facilius | sub noticiam caderet, ne uel pluralitatis in immensum proten|sa numerositas, uel quantitatis in infinitum secta particularitas | calculantis animum perplexo et inextricabili labore consu|meret. Huius autem mensę longitudo ·XXVII· lineis per transuer|sum ductis in spacia ter nouena distinguitur. latitudo | uero ·IIII^{or}· lineis in longum extensis in tria interualla distribu|itur. Philosophi etenim disciplinę huius inuentores, ut perfe|ctum opus fecisse uideantur, tabulę istius spacia cubica | quantitate l. 20 metienda putauerunt. Sed quum cubus a primo pari | surgens, scilicet octonario, minori quam opus erat pluralitate pro|tenditur, qui uero ab his numeris, qui ternarium sequuntur, cubi fiunt, | prolixiori quam opus esset numerositate concrescunt, illum qui ex terna|rio est cubum elegerunt, secundum quem tabulę suę interualla me|tirentur. Sic enim eam nec quicquam necessarium detrahere nec mo|dum excedere arbitrati sunt. Sane cubi dicuntur f. 1v l. 1 corpora in mo|dum tesserę formata, in quibus latitudini longitudo || et utriusque ęqualis est altitudo. Ad quorum formam cubicos | numeros uel intellectuales cubos damus, qui de longo in latum atque | deinde uelut in altum ęqua progressione producti quasi in qua|dratam tesserę crassitudinem terna dimensione creuerunt. | Ut cum duas unitates in longum extendimus atque tertię duas | alias unitates e regione apponimus, planam superficiei fi|guram in longum et latum duplici dimensione ordiri uidemus, | bis duo dicentes est ·IIII^{or}·, in tetragonam formam disponen|tes. Quibus si tertiam dimensionem l. 10 adiecerimus, ut ipsos ·IIII^{or}· | bis ducamus, ueluti altitudo cubi nobis in

octonariam | multitudinem crescit. Bis enim duo bis ·VIII· fiunt. Et ad | eundem modum si ternarium in longum produxeris, eumque ter | duxeris, nouenarius quadrata figura longo latoque | distenditur. Quibus si tertiam adiunxeris progressionem, ut ter | nouenos ęqua longitudini et latitudini altitudine pronunci|es, nichilominus forma cubi in ·XXVII· porrigitur. Ter enim | tres ter ·XXVII· creant. Atque in hunc modum a qualibet lon|gitudine ęqua latitudine et altitudine cubicos numeros facere | licebit. In huius ergo tabulę descriptione, ut dicere inchoauimus, | in ter nouenos spaciorum multitudo (l. 20) distinguitur, uide licet in cubi | formam a ternaria longitudine in latum et altum ęquis dimensioribus | auctam, et quum instrumenti huius assirii inuentores fuisse per|hibentur, qui caldeo sermone et litteris utentes et a dextera scri|bendi initium sumentes in sinistram uersus extendunt, ad aucto|ritatem inuentoribus perrogandam huius tabulę descriptio | a dextera initium faciens, longitudinem suam in sinistrum || porrigit. Ipsa autem spacia hoc modo (f. 2r l. 1) distincta sunt, ut cum sin|gula quęque suas habeant superductiones, terna tria a princi|pio tabulę usque ad finem singulis superductionibus claudan|tur. ita ut ternis semper interuallis uno semicirclo clau|sis, in tota tabulę longitudine ·IX· superductiones inueni|antur. Et prima quidem trium spaciorum superductio unitatis | caractere inscribitur, qui chaldeo nomine dictus igin, | ·I· latinę litterę figuram exprimit. Quod iccirco factum dino|scitur, ut tria illa interualla, quę praescriptum sibi unitatis | caracterem gerunt, primum (l. 10) se per hoc locum optinere testificentur. | Secunda uero trium interuallorum superductio hanc ·ʊ· binarii | figuram, quę apud praenominatos inuentores andras dicitur, | inscriptam habet, ut per hanc tria illa spacia quibus inscribitur, | secundum se uendicare locum insinuetur. Tercia autem trium spa|ciorum superductio per hoc tercium locum docet obtinere, quia hac | ·ɪȝ· tertiarii forma, quę apud chaldeos ormis appellatur, in|signita est. Similiter et quarti ordinis superductio per hoc se | quartum locum tenere testatur, quia hoc ·ꝑ· quaternarii | caractere, qui apud inuentores arbas nuncupatur, inscri|bitur. Necnon et quintus ordo quintum se locum obtinere denunci|at, (l. 20) quia hanc ·Ч· quinarii figuram, quę quimas dicitur, inscrip|tam portat. Itidem sextus ordo sextum se perhibet, quia hunc | ·ᒉ· senarii caracterem, qui calcis dicitur, inscriptum habet. Septi|mus quoque septenarii, qui zenis dicitur, ·Λ· tali figura prae|titulatur. Octauus octonarii, quem temeniam dicunt, ·8· | hanc habet formulam. et nonus nouenarii hac ·9· figura || in- (f. 2v l. 1) signitur, quę apud inuentores celentis appellatur. inscri|bitur in ultimo ordine et figura ·O· sipos nomine, quę, | licet numerum nullum signitet, tantum ad alia quędam uti|lis, ut insequentibus declarabitur. Ipsa autem abaci spa|cia decupla se multiplicitate transcendunt, | nec in tota abaci tabula plus quam nouenaria | numeralium carecterum diuersitas necessaria est, illo-

rum | uidelicet, quos singulos per singulas ternorum arcuum super|ductiones
l. 10 inscriptos supra docuimus, quorum quid in caracteribus | minus est, hoc ipsorum arcuum decupla semper se multip|licitate transgredientium numerositas suplet. Et primus quidem | arcus unitate prętitulatus singularis dicitur, quia omnes | in eo numeri singulariter secundum proprias quantitates enun|tiantur, ita ut illic unitas unum binarius duos, terna|rius tres et reliqui per ordinem usque ad nouem propriarum quan|titatum appellationibus numeros exprimant. Secundus uero arcus | ·X· littera inscriptus decenus nuncupatur, quia omnes in eo | numeri per decuplum suę quantitatis enuntiantur, ut uni|-
l. 20 tas decem, binarius uiginti, ternarius ·XXX· et ceteri per | ordinem usque ad ·IX· decuplo suas pronuntient quanti|tates. Tercius autem ·C· litteram praefixam habens, centenarius appe|llatur eo, quod omnis ibi numerus per centuplum suam quantita|tem metiatur, ut unitas ·c·, binarius ·cc· et reliqui per or|dinem secentuplo metiantur. Hi ergo tres una super|ductione clauduntur, quia per igin inscriptam supradi|ximus. et in singulari quidem arcu
f. 3r l. 1 denarius non inuenitur, || quia cum in eo usque ad nouem naturalis numeri dispo|sitio processerit, translata ad decenum unitas de|nariam in eo summam explebit. Sicque in eo per ordinem | usque ad nonaginta supputatione perducta, cente|narius illic nullatenus reperietur, quia translata ad cen|tenum unitas ·c· ibi explebit et sic per ordinem | naturalis numeri caracterum usque ad ·dcccc· in cente|no arcu numeros ordinabit. Terni quoque, qui sequuntur, arcus, | quorum supraductionem per eum qui andras dicitur caracterem in-
l. 10 scri|ptam diximus, eadem se qua in praemissis ostendimus decu|pli ratione praecedunt. Quorum primus millenus ·ɱ· | littera inscriptus, qui ad praecedentem sedecenus decuplus | est, in quo omnes caracteres suam per mille enuntiant quan|titatem. Secundus decenus millenus ·X· et ·ɱ· litteris insig|nitus, in quo omnes numeri summulas suas decies milies | mensurant. Tercius centenus millenus ·C· et ·ɱ· litteris | intitulatus, quod in eo omnes numeri suas quantitates | centies milies augent. eandemque in ceteris decupla|cionem in-
l. 20 offensa ratione pernotatis. Super has autem | quas diximus singulorum arcuum superscriptiones et alię | litterę inscriptę reperiuntur, quarum nobis ratio reddenda est. | et super singularem quidem .s., super decenum ·d·, super cen|tenum ·c· inueniuntur, quę de principiis nominum sumptę | primum singularem, secundum decenum, tercium centenum | insinuent. Super millenum uero ·ɱ· et ·s· litterę ascribuntur, | super decenum millenum ·d·, super centenum
f. 3v l. 1 millenum ·c·, || quę primum huius ternarię superductionis millenum singularem | ·I· de solo milleno constare insinuent, secundum de decenis mille|nis, tercium de centenis millenis constare perhibeant. Sane hoc | et in ceteris ternis ordinibus usque ad finem tabulę pernotare licebit, ut semper | primi ternarię superductionis ·ɱ· et ·s· superscriptas habeant, quia | de solis millenis eorum

compingitur numerositas, secundi ·d·, quia | de decenis millenis, tercii ·c· quia de centenis millenis compa|cti sunt, inscriptas gerant. His ita de longitudinis spaciis | breuiter prelibatis ad latitudinis spacia explicanda ue|niendum est, quia l. 10 utique per quattuor lineas in longum protensas in | tria spacia distributam pre-diximus. Et superior quidem linea illas | quas supra memorauimus singulorum arcuum superscriptiones obti|net, que principales numeri ideo dicuntur, quia primo loco positi sunt et quia | ad eos ceterorum, qui secunda quique tercia linea notati sunt, nu|merorum ratio respicit. In sequenti uero linea resolutorii numeri descrip|ti sunt, in singulari arcu, ubi unitas supra titulata est, semisses duo, | non quod indiuiduam unitatem secare quis possit, sed unum aliquod in duo | dimidia resoluatur. in deceno uero, cui ·X· litteram superscriptam | diximus, duo ·V· id est duo quinarii. in centeno autem, cui ·C· pre|scribitur duo ·l· l. 20 uidelicet duo quinquagenarii. in milleno, qui | ·ꝏ· asscriptam habet, duo ·d· id est bis quingenti subscripti sunt. | Et sic in sequentibus quemcumque numerum suprascriptum uideris, | eiusdem duos resolutorios infra positos pernotabis. Tercia uero | linea utrorumque id est et principalium et resolutoriorum medios | obtinet, scilicet ut, ubi superius ·I·, inferius duos semisses habueris, in tertio loco semissem uideas, ubi supra decem, infra || bis quinos, inferius quinque f. 4r l. 1 inscriptos reperias. similiter in | centeno ·l·, in milleno ·d·, in deceno milleno ·V̄· et in reli|quis medietatem superiorum indubitanter inuenies. Hoc autem et | in resolutoriis et in mediis sicut in principalibus contingit | inueniri, ut omnes sedecupla comparatione transcendant. | Nam sicut denarius unitatem, centenarius denarium decuplo uin|cit, ipse autem a milleno eadem multiplicitate preceditur, itidem duo | semisses a duobus quinariis decuplo superantur. quos duo quin|quagenarii eadem collatione preueniunt. qui etiam bis quin- l. 10 gen|tis pari habitudine succumbunt. necnon quinarius semissem, | quinquagenarius quinarium, quingenti quinquagenos in tertia | linea simili uidentur decuplatione transcendere. Quarta | demum linea notas ponderum continet ad indiuisibiles | per integrum numeros diligenti mutuatione translatas, | ut quia unitates, que uicem athomorum in numeris obtinent, | per partes distrahere nequimus, intellectu eis corporum | partes adhibendo, quod natura indiuisibile est, ad exer|citandam industriam diuidere moliamur. Equidem resolutorii | et medii numeri ad hoc adhibiti congrua ratione uidentur, ut | cum ad anteriorum arcuum numerosiores summas peruentum | fuerit, que l. 20 per se calculantium captui minus peruia erant, | resolutione facilius in notitiam cadant. ad quam etiam me|diorum subter annexa dispositis non mediocriter potuit adiu|uare. Que autem his quattuor lineis latitudinis inter|ualla distinguuntur, huic usui prouisa sunt, ut inferius mul|tiplicantes numeros, superius multiplicandos, medium, || que ex utrorumque ductu conficiuntur, f. 4v l. 1 summas debeant continere. | uel si diuidendum fuerit, in superiori spatio

diuisores | locabuntur, in medio summam diuidendam disponemus, in | inferiori sumptas ex diuisione particulas ordinabi|mus. Iam uero cui potissimum disciplinę instrumentum hoc | adinuentum sit expediundum est. et quidem cum et ad arithme|ticę speculationis inuestigandas rationes et ad eos, qui musi|cis modulationibus deseruiunt numeros, necnon et ad ea, | quę astrologo-
l. 10 rum sollerti industria de uariis errantium | siderum cursibus ac pari contra mundum nisu, licet annos | suos pro disparium circlorum ratione admodum diuiso fine con|cludant, reperta sunt, insuper et ad platonicas de anima mundi| sententias et ad omnes fere ueterum lectiones, qui circa | numeros subtilem adhibere diligentiam, abacus ualde | necessarius inueniatur, maxime tamen geometricę discipli|nę, formulis inueniendis sibique inuicem coaptandis, | quibus terrarum marisque spacia mirabili indagatione com|prehendisse putantur, huius tabulę usus accommodatus et ab | illius artis professoribus repertus
l. 20 perhibetur. Sed quum ea, de qua ser|mo est, disciplina apud omnes ferme occidentalium partium | incolas obliuioni tradita est, contigit et hanc calculandi dis|ciplinam utpote cuius fructus cessante arte, ad cuius admi|niculum reperta fuerat, non adeo magnus adutebatur, in con|temptum uenisse, ubi quantum a summę prudentię uiro Gir|berto, cui sapientis cognomen fuit, atque ab eximio | doctore Herimanno eorumque discipulis usque ad nostra ||
f. 5r l. 1 tempora deriuata a fontibus illorum modica licet prędictę | scientię uena manauit. ₣ Expeditis igitur prout affectatę | breuitatis mensura poscebat iis, quę in primo tractatus numeri | disserenda prędixeramus ingressu, ad sequentia transeundum. | et qua uia multiplicandum, quoque artificio diuidendum sit, | intimandum est. Sciendum itaque, quod numerorum alii simpli|ces, alii compositi sunt. Item numerorum alii digiti sunt, alii | articuli. Simplices uero sunt ut soli digiti sine articulis, | uel soli articuli sine digitis. et digiti qui-
l. 10 dem sunt omnes in na|turali dispositione ab uno usque ad nouem, articuli uero dena|rius et omnes usque ad centum denarii multiplices, ut ·xx·xxx·xl· et ceteri. Quare autem uel isti articuli uel illi digiti nun|cupentur, breuiter dicendum est. Ex sanctorum patrum scriptis et maxime sacrorum uoluminum interprete et explanato|re Ieronimo testante didicimus, apud antiquos per digitos et articulos lęuę manus ab uno usque ad ·xc· numeros | solitos figurari, item per digitos et articulos dextrę manus | a centum usque ·$\overline{\text{IX}}$· numeros colligi. Qui ergo per digitos | exprimuntur, digiti nominantur, qui per
l. 20 articulos in ar|ticulorum appellatione manserunt. et unum quidem cum dicis, minimum lęuę digitum, qui et auricularis dicitur, inflexum in medium palmę depones. duos cum pronuncias, medicum iuxta appones. tres cum profers, medium, qui et impudi|cus nominatur, e regione locabis. quattuor dum enun|cias, minimo erecto duos reliquos in media palma | fixos tenebis. quin-
f. 5v l. 1 que autem exprimes si medio et auriculari || eleuatis inpudicum solum in

media palma tenebis. | sex uero figurabis, si inpudico et auriculari erectis | medicum solum in media palma depones. porro cum | dicis septem auricularem ad radicem palmę inclinabis. | cum ·VIII·, medicum iuxta applicabis. cum ·IX·, inpudi|cum in ordine admouebis. Et hi nouem, sicut prelibauimus, | digiti nuncupantur, pro eo quod per digitos sinistrę manus ex|primuntur. Decem*) uero cum pronunciaueris, unguem indicis inflexi | in medio arcu pollicis figens formam coronę effici|es. cum ·xx· enuntias, summitatem pol- l. 10 licis inter medios | arcus indicis et inpudici inmittes. ·xxx· cum dicis, ungu|es indicis et pollicis quasi blando osculo coniunges. cum | uero exprimis ·xl·, interiora pollicis lateri indicis superduces, am|bobus tantum erectis. ·l· cum pronuncias, exteriorem arcum pollicis | in modum grecę litterę gammę ·Γ· curuatum ad palmam | inclinabis. ·lx· dicens pollicem curuatum indice circumflexo | a fronte precinges. cum dicis ·lxx· indicem, ut supra inflexum | pollice inmisso inplebis, ungue illius trans medium indicis | arcum erecto. cum dicis ·lxxx·, summitatem pollicis in | medio finges arcu indicis. cum l. 20 dicis ·xc·, indicis inf|lexi unguem ad radicem pollicis erecti figes. Et hi | articuli dicuntur, quod per lęuę manus articulos supputantur. | Hactenus in sinistra manu numerabis. Cum uero centum dicere | uoles, in isdem digitis, quibus in sinistra ·x· faciebas, indice | uidelicet et pollice formam coronę in dextra exprimes. | ducentos quoque in dextra sicut ·xx· in lęua, ·cccc· in dextra sicut || ·xl· in lęua, ·d· in dextra sicut ·l· in lęua, ·dc· in dextra f. 6r l. 1 sicut | ·lx· in lęua, ·dcc· in dextra sicut ·lxx· in lęua, ·dccc· in dextra | sicut ·lxxx· in lęua, ·dcccc· in dextra sicut ·xc· in lęua. Porro | mille in dextra sicut unum in lęua, duo milia in dextra | sicut II° in lęua, tria ·$\overline{\text{III}}$·**) in dextra sicut ·III· in lęua, qua|tuor milia in dextra sicut ·IIII^or^. in sinistra, quinque milia in | dextra sicut ·v· in sinistra, sex milia in dextra sicut ·VI· in | sinistra, septem milia in dextra sicut ·VII· in sinistra, octo | milia in dextra sicut octo in sinistra, nouem milia in dex|tra sicut ·IX· in sinistra in- l. 10 offensa ratione perficies. Cum | autem ·x· milia exprimere uoles, lęuam manum in medio | pectoris supinam pones, digitis tantum ad collum erectis. | cum dicis ·$\overline{\text{xx}}$·, eandem pectori expensam late superpones | ·$\overline{\text{xxx}}$· cum dicis, eadem prona sed erecta pollicem cartilagini | medii pectoris inmittes. cum dicis ·$\overline{\text{xl}}$·, eandem erectam | in umbilico supinabis. cum dicis ·l~~·, eiusdem pronę, sed erectę | pollicem in umbilico inpones ·$\overline{\text{lx}}$· cum dicis, eadem prona femen | lęuum desuper comprehendes ·lxx·***) cum dicis, eandem supinam |

---

*) *Beda Ven. abhinc ad verbum ferme exscriptus meliorem praebet lectionem* artus, artu *ubi in insequenti* arcus, arcu *invenies. cf. Bedae V. De temp. rat. cap. I De computo vel loquela digitorum (ed. in Mignei Patrol. cursu tom. XC p. 294).*

**) *recta lect. aut v.* tria *emittendum, aut nota* ·$\overline{\text{III}}$· *in* ·~~· *sine* ·m· *corrigenda est.*

***) *legatur* ·$\overline{\text{lxx}}$·.

l. 20 femori superpones ·lxxx· cum dicis, eandem pronam ·xc· cum | dicis eadem lumbas apprehendes, pollice ad inguina niso. At | uero ·c· et ·cc· et cetera usque ad ·dcccc· eodem quo diximus ordi|ne in dextra corporis parte complebis. Decies autem centena | milia cum dicis, ambas sibi inuicem manus insertas digitis | inplicabis. Et de digitali quidem uel articulari manuum | supputatione his ita se habentibus sicut supra prelibaui|mus, simplices numeri
f. 6v l. 1 sunt uel soli digiti sine articulis, uel || soli articuli sine digitis, compositi ex utrisque coniu|ncti. Et notandum, quia simplex numerus, sicut re et nomine simplex | est, ita etiam unam abaci sedem occupat, ut ·II·III·|·IIII· et ceteri huius modi singularem sibi uendicant | arcum. decem uero et ·xx· uel ·xxx· ac reliqui similes dece|num possident. centum autem et ·cc·ccc· cum ceteris sequenti|bus in centeno stabiliuntur. Verum qui componuntur ex his, nunquam unam abaci sedem optinebunt, ut ·XII·XIII· uel ·XXII·|XXIII·XXXIII·XXXV·
l. 10 sed de his digitum in singulari, | articulum locabimus in deceno. Si uero ·III· uel ·IIII· aut | eo amplius in conpositione habuerimus numeros, ut ·cc·xxx·|v·m·cccc·lx·VI·, secundum sue quantitatis appellationes | ABACI sedes obtinebunt, ut millia in millenis, centeni | in centenis, deceni in decenis, singulares in sing|ularibus disponantur. Notandum quoque quod, sicut singulares | ad decenos digiti sunt, ita deceni ad centenos digiti | sunt, ita deceni ad centenos, centeni ad millenos | et quilibet inferiores ad proximos sibi superiores digitorum | uicem optinent. Et sicut digitos cum articulis
l. 20 in | eisdem abaci sedibus stare non posse monstrauimus, sic etiam si | ex aliqua multiplicatione aliquot carecteres in una | abaci sede adunati fuerint. si usque in articulum | eorum conuenit aggregatione, articulus ad superiorem trans|feretur arcum, digito, si quis etiam superfuerit digitus, in | eodem loco remanente. Sed iam de multiplicatione | dicendum est. ubi primo animad-
f. 7r l. 1 uertendum, quia singularis || singularem multiplicans, nulla eget regula, quum | de illa multiplicatione nunquam numerosior quam enun|ciatur summa proueniet. Si uero uel per singularem alios, uel | per eos qui sequuntur, ceteros, uel ad inuicem metiri uolu|eris, quum ibi amplior quam enuncietur summa concrescit, | regule dande sunt. ad quarum insinuationem disposi|tis digitis et articulis in summe collectione minime | fallamur. Multiplicatio autem aliter fieri non potest, nisi | cum duobus numeris ad multiplicandum
l. 10 positis per alterum | aduerbialiter prolatum alterum metimur. ut si ·IIII· et ·VI· | ad multiplicandum dispositi sint, quater sex, uel sexi|es quattuor pronunciemus. Ut ergo girberti doctoris | regulis primo utamur, si multiplicaueris decenum | per singularem, dabis unicuique digito decem et omni | articulo centum. si centenum per singularem mu|ltiplices, dabis unicuique digito centum et omni | articulo mille. si multiplicaueris millenum | per singularem, dabis unicuique digito mille et | omni articulo decem milia.

Quod ne per singulas | abaci sedes prosequendo prolixitate fastidium gene|re- l. 20
tur, compendiose et ęquipollenter hac una regula | concludi potest. quemcunque per singularem multiplicas, | in eodem quemcunque multiplicas digitos et | in ulteriore pone articulos. Item si decenum | per decenum multiplicas, dabis unicuique digito centum et omni articulo mille. si centenum per de||cenum, dabis unicuique digito mille et omni articulo | ·x· milia. si f. 7v l. 1
millenum per decenum, dabis unicuique digi|to ·x· milia et omni articulo centum milia. Quę similiter | omnia breuiter et facilius una regula conprehenduntur. quem|cunque per decenum multiplicas in secundo ab eo, quem mu|ltiplicas, pone digitos et in ulteriore articulos. | Porro de centeno Girbertus talem dat regulam. Si mu|ltiplicaueris centenum per centenum, dabis unicuique di|gito decem milia et omni articulo centum milia. Item | si multi- l. 10
plicaueris millenum per centenum, dabis unicuique | digito centum milia et omni articulo mille milia. | Item si multiplicaueris decenum millenum per centenum, | dabis unicuique digito mille milia et omni articulo | decies mille milia. Has autem et omnes alias quę sequuntur ce|nteni regulas hac una regula possumus adbreuia|re. quemcunque per centenum multiplicaueris, in ·iii^o· ab | illo digitos et in ulteriore pones articulos. Ex | quibus omnibus unam communem ad totius abaci spacia pos|sumus colligere regulam, ne sicut prętaxauimus, de iis quę cap|tu facilia leuiter per compendium aduerti l. 20
possunt, difuse et sigi|llatim inuentum uerba iactando et tędio affectas aures | infructuosis sermonibus in ipso operis ingressu onera|re uideamur et membranę forsitan ad alia profecte | futurę dispendium faciamus. Quia enim singularis in eo|dem, quem multiplicat, centenus in tercio ab eo, quem | f. 8r
multiplicat, digitos ponit et in ulteriore || articulos, liquido hanc communem l. 1
regulam colligere possu|mus. ut quoto loco multiplicator in abaco positus fuerit, | toto loco ab eo, quem multiplicat, ordinet digitos | et in ulteriore articulos. uidelicet ut, si in primo fuerit, | in eodem ponat, si in secundo, in secundo ab eo quem | multiplicat, si in tercio, in tercio ab eo quem multi|plicat, si in quarto, in quarto, si in quinto, in quinto | ponat digitos et deinceps usque ad finem tabulę per | eandem consequentiam. ut quoto loco multiplicator | steterit, toto loco a multiplicando ponat digitos | et l. 10
ulteriore articulos. Quod ergo supra simplicium et compo|sitorum numerorum diuisione fecimus, expedit ut primo | de simplicium, deinde de compositorum multiplicati|one exempla subdamus. et quia si singularis singula|rem multiplicet, nullam nobis necessariam regulam | esse diximus, quem ad modum singularis supra se positos mu|ltiplicet, exempla subdamus. Sit ergo propositum inues|tigare, quanta ex ·lxxx· per quaternarium multiplicati|one summa concrescat. Itaque quaternarii caracterem in sing|ularis arcus l. 20
inferiori spatio locabimus. et quia sing|uli quique caracteres, ut supra dictum

est, in denario limite | quantitates suas decuplo enunciant, octonarii spa|cio caracterem, ut ·lxxx· nobis exhibeat, in deceni super|iore constituemus. quia uero per singularem decenum multiplica|re proposuimus, per aduerbialem quaternarii denominationem | octonarium, qui in deceno est, metiemur, ita
f. 8v l. 1 dicendo, quater || ·VIII· ·XXXII· sunt. Scientes autem, duos quidem digitum, ·xxx· | uero articulum, et regulam memoriter tenentes, uidelicet | quemcunque multiplicas per singularem in eodem pone digitos | et in ulteriore articulos, in deceno secundum regulam binarium pones et in centeno ter|narium locabis. quo facto ·ccc·xx· summam colliges, quę ex | ·lxxx· per quaternarium ductis excreuit. Et cum digitaliter | quater ·VIII· pronuntiaueris, tunc digitis et articulis secundum | regulam dispositis eadem summa effecta est, quę ex qua-
l. 10 terna|rii ·lxxx· naturali ductu concrescit. Quod si plures multiplic|andos posueris et unum tantum multiplicantem applicue|ris, simplex horum quoque multiplicatio reputabitur. semper enim | multiplicatio multiplicatorum ratione uel simplex uel | composita nuncupatur. Sit ergo propositum, unius milites legi|onis, qui sunt ·$\overline{\text{VI}}$·dclxvi·, quantam diurni stipendii pecuni|ę summam habere debeant, si unicuique per diem ad | uictualia ·xxx· nummi reddantur. ternarium itaque in dena|rii limitis inferiori spatio locabimus, quia ibi suam de|cuplans quantitatem ·xxx· explebit, in superiori autem spa|cio in milleno
l. 20 senarium, qui ·VI· milia faciat, in cente|no itidem senarium ad sescentos exprimendos, in de|ceno similiter senarium, qui ·lx· compleat, in singulari sena|rium suam inibi quantitatem singulariter exprimentem. quo | facto per ternarium, quem in deceni inferiori spatio posui|mus, senarium, qui in singularis superiori spacio positus est, | metiemur, dicendo, ter sex ·XVIII· sunt. hic ·VIII· digi|tus ·x· articulus est. considerantes itaque deceni regulam,
f. 9r l. 1 || quę in secundo ab eo, qui multiplicatur, digitos et in ulte|riore ponere docet articulos, octonarium in secundo a sin|gulari, id est in deceni medio interuallo ponemus, unita|tem in ulteriore, id est in centeno, qui ad eum, qui infra se est, | decenum articuli uicem optinet, ut supra ostendimus. de|inde per ipsum eundem ternarium multiplicatorem senari|um, qui in deceno est, ducemus dicendo, ter sex ·x· et ·VIII· sunt. | scientes ergo prędictam deceni regulam, in secundo ab eo, quem | multiplicamus, id est in centeno octona-
l. 10 rium digitum | locabimus cum ea unitate, quam ibidem per aliam multip|licationem positam dixeramus, unitatem uero articuli uice|m ulteriore, id est in milleno constituemus. sicque ad mul|tiplicandum centeni limitis senarium procedemus. cumque | a ternario multiplicatore aduerbiali denominatione | accepta, ut supra, ter sex ·x· et ·VIII· sunt, pronuntiaueri|mus, secundum sępe dictam deceni regulam in secundo a cen|teno, qui multiplicatur, uidelicet in mille|no cum unitate prius ibi posita octonarium digi|tum ponemus,
l. 20 in ulteriore id est in deceno milleno | unitatem uice articuli constituemus.

sicque demum | ultimum senarium milleni limitis per ternarium me|tiemur, dicendo ut supra, ter sex ·x· et ·viii· sunt. cumque in de|ceno milleno, qui secundus a milleno est octonarium | digitum cum ea, quę prius ibi fuerat unitate posueri|mus et in ulteriore, id est in centeno milleno arti|culi loco unitatem locauerimus, totam ad supremam || manum perduxerimus multipli- f. 9v l. 1 cationem. Erit itaque | in centeno milleno unitas, in deceno milleno | unitas cum octonario, item in milleno unitas cum | octonario, in centeno quoque uni|tas cum octonario, in deceno octonarius solus. cumque | pro octonariis et unitatibus, qui interioribus arcubus positi | fuerant, uidelicet in centeno milleno et de|ceno milleno singulos posuerimus nouenarios, | multiplicationis summam, uidelicet ·$\overline{\text{cxcix}}$·dccc|c·lxxx· liquido colligere potuerimus. et tunc l. 10 euidenter | cognoscemus, si singulis, qui sunt in legione, trigeni per diem | ad stipendia dentur denarii, diurnam totius legi|onis stipendiorum summam in ·$\overline{\text{cxcix}}$·dcccc·lxxx· con|stare denariis. Et de simplici quidem multiplicatione, | quantum castigatę breuitatis ratio exigebat, sa|tis dictum est. DE COMPOSITA MVLTIPLICATIONE. | Composita autem multiplicatio est, ubi composi|tus numerus uel ex duobus uel ex tribus aut pluribus ca|racteribus in inferiori abaci parte multiplicator | fuerit collocatus, quanticumque in l. 20 superiori parte fuerint | multiplicandi. sic enim simplex multiplica|tio supra dicebatur, ubi quotquot siue unus siue plures | caracteres multiplicandi superius dispositi fuissent, | unus tantum multiplicator inferius ponebatur. sic et hinc illa | multiplicandorum habita ratione compositi multipli|catores compositę multiplicationi uocabulum dabunt. || Erit ergo in hac multiplicatione f. 10r l. 1 obseruandum, ut, quot|quot inferius fuerint multiplicatores dispositi, per eorum | singulos uniuersos suprapositos multiplicandos metiamur | et secundum pręmonstratas regulas digitos et articulos dispona|mus. Et de composita multiplicatione primum per duos caracteres | exemplum ponamus. sit propositum inuestigare, ad serrandos | ·cccc·lx·viii· equos quot claui necessarii sunt. cumque notum | sit, quod ·xxiiii· clauos unius equi expetit usus, per hunc nume|rum unius equi clauorum omnium equorum numerum augeamus, sicque | eam quam quęrimus summam inueniemus. ponamus itaque in l. 10 superiore | abaci spatio in centeno quidem ·Ꞧ·, in deceno uero ·Ч·, in | singulari autem ·8·, qui caracteres nobis ·cccc·lxviii· equorum | numerum significabunt. in inferiori quoque parte in deceno. | ·ծ·, in singulari ·Ꞧ· locemus, qui ·xxiiii· clauorum nu|merum exprimunt. et primum per quaternarium in singulari po|situm omnes superiores ducamus. deinde per binarium in de|ceno locatum itidem omnes superiores multiplicemus. duca|mus l. 20 itaque per quaternarium, qui singularis inferius spatium ob|tinet, octonarium, quem in eodem singulari superius posui|mus, ita dicendo, quater ·viii·xxxii·. et binarium quidem digi|tum secundum singularis regulam in eodem singu-

lari in | medio spatio ponemus. ternarium uero loco ar|ticuli ad decenum transferemus. deinde per ipsum quaternarium senarium, qui deceni superiorem uendicat locum, me|tiemur sic. quater ·vi·xxiiii· sunt. et quaternarium digitum secundum | singularis regulam in eodem deceno cum ternario, quem

f. 10v l. 1 || ibi prius posuimus, constituemus, binarium uice articuli ulte|rius uidelicet in centeno locabimus. postremo per ipsum | eundem quaternarium illum alium, qui in centeni limitis superiori | spatio sedet, quaternarium ita mensurabimus. quater quatuor | ·xvi· sunt. et seruata singularis regula in ipso cente|no cum binario, quem ibi ante habuimus, senarium digitum | applicabimus, unitatemque loco articuli ad ulteriorem | millenum promouebimus. quo peracto erit in milleno uni|tas, in centeno senarius et binarius, qui ·viii· complebunt, | in deceno ternarius et quaternarius, qui ·vii· restituent, in

l. 10 sin|gulari binarius. et sic expleta per quaternarium ad binarii multi|plicationem transibimus. et eo quo prius ordine primum octona|rium per eum ducemus hoc modo. bis ·viii⁰·xvi· sunt. sex ergo | digitum secundum deceni regulam in secundo a singulari, quem | multiplicas, uidelicet in ipso deceno cum septe|nario, quem ibi superius habueras, pones. unitatem arti|culi uice ulterius propelles et in centeno cum octona|rio, quem ex superiori multiplicatione collegeras, iu|nges. et tunc per ipsum binarium senarium, qui ipsius deceni | sumum optinet spatium, metieris ita dicendo. bis | sex ·xii· sunt.

l. 20 binarius itaque digitus, prout deceni re|gula dictat, secundabitur, id est in centeno cum octonari|o et unitate, qui prius positi fuerant, constituetur. uni|tas pro articulo ulterius ad millenum promouebitur et | cum altera, quam ibi ante habuimus, unitate iungemus. tum | et sic demum per ipsum eundem

f. 11r l. 1 binarium quaternarius, qui in || centeno limite est, multiplicabitur sic. bis quatuor | octo sunt. cumque secundum deceni regulam ipsum octona|rium, qui digitus est, ad millenum secundaueris, habe|bis disposicionem hanc. in milleno octonarium cum duabus unitatibus, in centeno binarium*) et octonarium, in deceno septenarium et sena|rium, in singulari binarium. et quod septenarius et | senarius, qui in centeno**) sunt, ·xiii· explent, ubi digitus cum | articulo est, ternario digito in eodem loco remanente | unitatem pro

l. 10 articulo ad centenum transferemus. eruntque | in ipso centeno ·8·, ·ᘔ· et duę unitates, qui similiter | ·xii· faciunt. remanebitque ibi binarius, et | unitas uice articuli ad millenum transportabi|tur. eruntque ibi octonarius et tres unitates. ag|gregatis, in undenam quantitatem summa crescente, | cum unitatem ibidem reliqueris et ad decenum millenum | alteram unitatem articulariter transtuleris, summam clauorum | qui ·cccc·lx·viii· equis necessarii sunt, id est ·xi·cc·xxxii· | habebis. Sane in omni composita multipli-

---

*) *inseras:* unitatem.

**) *legas:* deceno.

cati|one similis multiplicandi ratio non fallet, uide|licet ut quantoscunque in- l. 20
ferius multiplicatores habu|eris, per singulos eorum omnem suprapositam
multiplicandorum | summam metieris. cumque per ordinem a primo usque
ad no|uissimum multiplicatione facta per singulos arcus | summulas aggre-
gaueris et articulos, si qui fuerint, ad | superiora transtuleris, ipsam quam
quęrere proposueris sum|mam indubitanter inuenies. Sed quum plerumque
contin||get, ut plurima tam multiplicationum*) quam multiplicandorum | f. 11v l. 1
caracterum numerositas minus attentum calculatorem ineluctabili|bili errore con-
fundat, insinuandum uidetur, qua industrię ca|utela huius modi erroris eui-
tari possit offensa. Memi|nisse ergo debes, quia cum superius de descriptione
tabulę loqueremur, | in ultima ternorum arcuum superductione quandam
figuram, | cui sipos nomen est ·⊙·, in modum rotulę formatam nu|llius numeri
significatione inscribi solere prędiximus, cuius | operam insequentibus pro-
futura promittebamus. Si quidem figuram huiusmodi prouidens abacista in l. 10
calculis effigiabit et ad | eum quo de agitur usum inter alios caracteres re-
seruabit, | cumque aliquam talem multiplicationem facere necesse fuerit, | ubi
metuendum sit, ne dispositorum caracterum multitudo | in errorem inducat,
unam ex his rotulis multiplica|toribus alteram multiplicandis ad eliminandum
errorem pro si|gno superponet, ita ut, dum primus multiplicator mu|ltipli-
candos caracteres sua quantitate percurret, ipse supra uerticem, donec omnes
multiplicandos mensus fuerit, inmobilem rotulam gerat. | Quo multiplicando-
rum rotula superponetur, per singulos eorum | a primo usque ad postremum,
prout cum eis primus multipli|cator rationem habebit, transportabitur. sicque l. 20
per primum multipli|catorem opera expleta, super secundum multiplicatorem
rotula ponetur, ab ultimo autem multiplican|dorum ad primum rotula repor-
tabitur, dum eum secundus mul|tiplicator sua quantitate metietur. et dum
singulos | eorum multiplicando procedet, per singulos rotula | usque ad ulti-
mum eo quo prędiximus ordere (*sic*) transfertur. Quę || uero ut dictum est f. 12r l. 1
super multiplicatorem rotula posita | fuerat, inmobilis permanebit, donec
omnes superiores | iniciendo operam suam expleuerit. et sic ad alium mul|ti-
plicatorem transibit. quod tam diu faciendum erit, do|nec per omnes multi-
plicatores rotula permota, per sing|ulos eorum tota multiplicandorum detersa
fuerit summa. | Huius rei tale demus exemplum. Sit positum inuestiga|re,
quanta summa pecunię quatuor legionibus necessa|ria sit, quarum singuli
milites inter donatiua et stipendi|a numerorum ·$\overline{\text{xiii}}$·ccc·xxx·ii· annuatim l. 10
accipiant. | quod ergo ·iiii^{or}· legiones militum ·$\overline{\text{xxvi}}$·dc·lxiiii· habe|re di-
noscuntur, hunc numerum superius in abaco constitue|mus. ita in deceno
milleno ·ϭ·, in milleno ·ꟼ·, in | centeno nichilominus·ꟼ·, in deceno itidem

*) *leg.* multiplicatorum.

| ·Ч·, in singulari ·R· in superiori abaci spacio | ponemus. inferius uero illum quem prędiximus numerum, ui|delicet ·$\overline{\text{XIII}}$·CCCXXXII· locabimus ita, ut in dece|no milleno ·I·, in milleno ·ℏ·, in centeno simi|liter ·ℏ·, in deceno l. 20 quoque ·ℏ· in singulari ·ᘔ· di|sposити sint. his ita digestis super primum multi|plicatorem, scilicet ·ᘔ·, qui singularem obtinet | limitem, illam quam sępe diximus constituemus aliamque nichilominus rotulam super primum | multiplicatorem*), scilicet ·R·, qui itidem in singulari, lo|cabimus. quo facto f. 12v l. 1 eos alterutro metiemur, ita dicendo, || bis ·IIII^{or}· octo sunt. qui quia digitus est et per singula|rem fit multiplicatio, in eodem qui multiplica|tur secundum regulam ponetur. eaque quę super multiplicato|rem posita fuerat rotula inmobili perseuerante, ro|tulam primi multiplicandi ad secundum, id est ·Ч·, qui in de|ceno sedet, transferemus eumque sic per primum multipli|catorem ducemus, bis sex ·XII· sunt. digitum itaque | binarium in eodem deceno secundum regulam ponemus, unitatem pro articulo ad centenum propellimus. l. 10 | et sic a secundo multiplicando ad tercium, scilicet ·Ч·, qui cen|tenum possidet arcum, rotulam transducemus, eumque itidem | per binarium mensurabimus ita, bis sex ·XII· sunt. bi|narius digitus in ipso centeno regulariter ponitur et | cum unitate, quę ibi erat, iniuncta ternarium facit. | unitas ad millenum transfertur et tunc a tercio ad quartum | multiplicandum, id est ·Ч·, qui in milleno est, rotula | propellitur. et, bis sex ·XII· faciunt, secundum primi | multiplicatoris quantitatem pronunciat (*sic*). quo facto | binarius digitus in eodem milleno secundum regulam | positus et unitati, quam l. 20 ibidem inuenit, in|iunctus in ternarium surgit, unitas pro articulo | in decenum millenum promouetur. tercium (*sic*) demum super | ultimum multiplicandum, id est ·ᘔ·, qui decenum mi|llenum limitem uendicat, rotula ponitur, et per | primi multiplicatoris auctam denominationem in qua|ternarium crescit. qui quaternarius digitus in ipso de|ceno milleno unitati ibi prius positę copu- f. 13r l. 1 latus || quinarium reddit. suntque in deceno milleno ·ч· in | milleno ·ℏ·, in centeno similiter, in deceno | ·ᘔ·, in singulari ·8· caracteres ordinati. sicque | expleto primi multiplicatoris negotio, ad secundum, | scilicet in deceno arcu, rotula transfertur, | quęque super ultimum multiplicandum rotula fuerat | super primum reponitur et per secundum multiplicatorem primi | multiplicandi diuersio fit, ita dicendo, ter quatuor | ·XII·. considerata deceni l. 10 multiplicatoris ratione, | binarius digitus in secundo ab eo, qui multiplicatur, id est | in deceno ponitur et cum eo, qui ibi inuenitur, binar|io quaternarium facit, unitas pro articulo ad centenum transmittitur et cum ternario prius ibi posito in quater|narium conpingitur. hinc ad secundum multiplican|dum rotula promota, ea uero, quę super multiplicato|rem est, inmobili permanente,

*) *leg.* multiplicandum.

ter sex ·xviii· sunt, | pronuntiatur. octo ergo digitus secundum regulam a mu|ltiplicato secundatur et in centeno cum || quaternario, qui ibi inuenitur, f. 13v l. 1 iunctus ·xii· explet, binarioque | ibi relicto, ·I· ad millenum pro articulo transit et cum | alia unitate e duodenario articulariter ad super|iora traicitur. ternario, qui ibi fuerat, iuncta quinarium | perficit. inde super tercium multiplicandum, uidelicet | ·Ч· in centeno rotula ponitur et per ternarium multi|plicatorem eius quantitas aucta ·xviii· complet. octo | quippe digitus ad millenum regulariter secundatur, unitas | articularis ad decenum millenum traducitur. ipse | autem octonarius cum quinario, qui ibidem inuenit (*sic*), l. 10 ·xiii· | perficit, ternarioque ibi remanente articulum ·I· uni|tatem ad decenum millenum propellit et cum quinario et | unitate, quam ibi habemus, septenarium summam compingit. | sicque super quartum multiplicandum, scilicet senarium | in milleno rotula promota, multiplicatio suo | ordine procedit hoc modo, ter sex ·xviii· sunt. octonarius | itaque digitus, seruata deceni regula, ad decenum | millenum secundatur, unitas articularis ad centenum mi|llenum transmittitur. sed in deceno milleno septenarium | prius esse l. 20 dixeramus. cum eo itaque octonarius, qui denam | conficit summam, remanenteque ibi quinario, unitas | ad centenum millenum transferatur. cum ea, quę ibi erat, uni|tate binarium efficit. iam uero super ultimum mu|ltiplicandum, qui est ·ᘔ·, in decenum millenum rotulam trans|feremus eumque per secundi multiplicatoris denomina|tionem metiemur, ita. ter duo sex sunt. et senarium, || qui digitus est, ad centenum millenum secundabimus ac binario f. 14r l. 1 iunc|tum in octonarium redigemus. eritque dispositio taliter. | in centeno milleno ·8·, in deceno milleno ·Ч·, in milleno | ·ƕ·, in centeno ·ᘔ·, in deceno ·ꝶ·, in singulari ·8·. | tunc more solito de ultimo ad primum multipli|candum rotula reducetur, ea uero, quę super secundum mul|tiplicatorem est, ad tercium transferetur, atque ita pronun|ciabitur. ter ·iiii·xii· sunt. binarius digitus in cente|num, secundum regulam multiplicatoris, terciabitur et cum | binario, qui ibi est, quaternarium faciet. unitas pro arti|culo in l. 10 milleno posita et cum ternario iuncta quater|narium reddet. sicque rotula a primo multiplican|do ad secundum translata, dicemus. ter sex ·xviii· sunt. octo|narius ergo ad millenum terciabitur, unitas pro articulo ad | decenum millenum promouebitur. ipse autem octonarius quaterna|rio, quem in milleno esse diximus, aggregatus ·xii· faciet. re|manenteque ibidem binario, unitas ad decenum millenum | transibit et cum quinario atque alia, quam ibi modo posu|eramus, unitate in septenarium surget. inde ad | tercium multiplican- l. 20 dum rotulam transferimus et ita pronun|ciamus. ter ·vi·xviii· sunt. digitum quippe octonarium in | deceno milleno regulariter terciemus, unitatem ad centenum | millenum transponimus. et quia octonarius cum septenario | ·xv· complet, quinario ibi manente, unitas ad cente|num millenum transit et cum

·8· et ·I· articulum | faciens ad mille millenum mittit. tunc ad quartum
f. 14v l. 1 || multiplicandum rotula peruenit. quem cum per tercii | multiplicatoris quantitatem mensi fuerimus et, ter sex | ·XVIII· sunt, dixerimus, octonarium ad centenum millenum terci|abimus, unitatem pro articulo in mille milleno pone|mus et cum alia unitate in binarium conpingemus. et tunc | demum rotulam super ultimum multiplicandum ponemus. | cumque, ter duo ·VI·, pronunciauerimus, ipsum senarium ad | mille millenum redigemus. eruntque itaque ita dispo|siti caracteres. in mille milleno ·8·, in centeno milleno ·8·,
l. 10 | in deceno milleno ·Ч·, in milleno ·Ꮣ·, in centeno ·ꝶ·, | in deceno itidem ·ꝶ·, in singulari ·8·. expleto ergo | tercii multiplicatoris opere, ad quartum rotula transit, atque | ab ultimo multiplicando ad primum alia rotula | relabitur. atque ita dicitur, ter ·IIIIor·XII· sunt. binarius | itaque digitus secundum regulam ad millenum quartatur, cum | altero, qui ibi inuenit, binario quaternarium facit. uni|tas ad decenum millenum propellitur et cum quinario, qui ibi | erat, senarium facit. cumque rotulam ad secundum multiplicandum | promouerimus et, ter ·VI·XVIII· sunt, pronuntiauerimus, octo-
l. 20 narium | digitum ad decenum millenum quartabimus, unitatem articuli | uice in centenum millenum locabimus. octonarius quidem cum sena|rio ·XIIII· reddit et quaternario ibi manente unitas ad centenum millenum transit et cum ·8· et alia unitate ar|ticulum ad mille millenum mittit. de hinc rotula | ad tercium multiplicandum promota. ter ·VI·XVIII· dice|mus et ·VIII· digitum
f. 15r l. 1 ad centenum millenum quartabimus, || unitatem articulum in mille milleno ponemus, | qui cum octonario atque altera, quę ibi inuenit, uni|tate denarium facit. illoque arcu uacuo rema|nente ad decies mille millenum unitatem pro articulo | mittit. iamque ad quartum multiplicandum rotula transfe|rtur atque itidem. ter ·VI·XVIII· sunt. pronunciatur. octonarius digitus ad mille millenum quartatur, articulus unitas in | decies mille milleno ponitur et cum
l. 10 alia unitate in | binarium componitur. sicque tandem super ultimum multi|plicandum rotula posita, ter duo sex sunt, enuntiatur | et senarius, qui digitus est, ad ·xes· mille millenum secundum reg|ulam quartatur et cum binario iunctus in octonarium produ|citur. quo facto in abaco hęc dispositio caracterum in|uenitur. in ·xes· mille milleno ·8·, in mille milleno itidem ·8·, | in centeno milleno quoque ·8·, in deceno milleno ·ꝶ·, in milleno quoque ·ꝶ·, in centeno similiter ·ꝶ·, nec non et | in deceno ·ꝶ·, in singulari ·8·. tunc demum ad ultimum | multiplicatorem, qui est ·I·, in deceno milleno re perdu|cta, secundum eius quantitatem singulos multiplicandorum ca|racteres, incipiendo a deceno milleno, per singulas in | antea abaci sedes per ordinem
l. 20 dirigemus, in deceno milleno | ·ꝶ·, in centeno milleno ·Ч·, in | mille milleno ·Ч· in ·xes· mille milleno ·Ч·, in centeno | mille milleno ·Ꮣ· ponentes. et in deceno milleno ·ꝶ· cum | ·ꝶ· faciet ·8·, in centeno milleno ·Ч· cum

·8·xiiii· complebit | et articulum unitatem ad mille millenum transmittet. || in ipso centeno milleno quaternario remanente in mille | milleno ·Ⴗ· cum ·8· et ·I·xv· reddet, ·ч· ibi rema|nente et unitate ad ·x^es^· mille millenum transeunte. | item in ·x^es^· mille milleno senarius cum octonario et uni|tate itidem ·xv· faciet, remanebitque ibidem ·ч·. unitas | ad ·centies mille millenum transibit et cum binario, quem ibi po|sueramus, ternarium explebit. eritque, completa multipli|catione, in abaco dispositio talis. in ter cencies*) quinquies | mille milia ·cccc·lxxx·iiii^(es)^ | numerorum**) ·cccc·xlviii· | pecunię summa collecta. |

f. 15^v^ l. 1 — l. 10

·Cꝏꝏ·	·Xꝏꝏ·	·ꝏꝏ·	·Cꝏ·	·Xꝏ·	·ꝏ·	·C·	·X·	·I·
				ꞇ	Ⴗ	Ⴗ	Ⴗ	ɼ
ɦ	ч	ч	ɼ	8	ɼ	ɼ	ɼ	8
				I	ɦ	ɦ	ɦ	ꞇ

Expeditis igitur iis, quę de multiplicatione dicenda ui|debantur, qualiter in numeris plurima caracterum numerosita|te compactis inter maiorem uidelicet et minorem differentia | per abacum requiri possit, adicere idoneum possimus. et quidem | si duobus disparibus numeris maiore superius, minore infe|rius in abaco dispositis, minorem tam inferioribus quam in | superioribus abaci sedibus minus continentes habere contigerit, | caracteres illic facili labore singulis inferioris ordinis | caracteribus singulas medietates ad explecionem superioris | ordinis caracterum sufficientes medio abaci spa|cio applicabimus, qui inferioribus aggregati superiorum sum|mam possint explere, quas medietates ea, qua maior numerus minorem superat, differentia liquido pronun|ciabimus. uerbi gratia si nobis propositum sit, qua differentia | ·$\overline{\text{iii}}$·d·lxvi·***) ·$\overline{\text{ii}}$·ccc·xxiiii·. superetur inuestigare, | maiorem numerum superius, minorem inferius in abaco | constituemus, in milleno ·ɦ·, in centeno ·ч·, in dece|no ·ɼ·, in singulari ·Ⴗ· superius locabimus. inferius ·ꞇ· in $\overline{\text{ꝏ}}$·, ·ɦ· in centeno, ·ꞇ· in deceno, ·ɼ· in singulari ponemus. considerantesque | in singulari superius ·Ⴗ·, inferius ·ɼ·, in medio ·ꞇ·, | qui cum quaternario senarium facit, differentiam dabimus. | item in deceno inter quater-

f. 20 — f. 16^r^ l. 1 — l. 10

*) *post* cencies *insere* quinquagies.

**) *loco* numerorum *lege* milia.

***) *lege* ·xlvi·.

narium et binarium ęque bina|rium medium ponemus. in centeno inter quinarium | et ternarium itidem binarium differentia applicabimus. | in milleno inter ternarium et binarium unitas medie|tatis locum obtinebit. eritque inter ·III·dxlvI· et | ·II·ccc·xxIIII· differentia ·ꝏ·cc·xxII·, ut sit in aba|co disposicio talis. | Si uero maior numerus superius | tantum maiorem habu|erit summam, inferioribus | autem sedibus a minoris numeri | caracterum quantitate uincetur, | ibi tali cautela medietates erunt intersere|ndę, quę inferioribus aggregatę, cum articulos ad | superiora transmiserint, parem superioris numeri caracteribus | summam ibi remanere necesse sit. Quod dicimus tali | nobis liquebit exemplo. Sint superius in abaco dispositi ‖ ·lxII·ccc·xxII· inferius ·xxv·dcc·lxvI· eruntque | in deceno milleno

l. 20

ꝏ	C	X	I
ƕ	ч	ꝶ	ꟼ
I	ꚍ	ꚍ	ꚍ
ꚍ	ƕ	ꚍ	ꝶ

f. 16v l. 1

·ꟼ·, in milleno ·ꚍ·, in centeno ·ƕ·, | in deceno ·ꚍ·, in singulari itidem ·ꚍ· superius ordinati. inferius uero in deceno milleno ·ꚍ· in milleno ·ч·, in centeno ·Λ·, in deceno ·ꟼ·, in singulari itidem ·ꟼ· disposi|ti. in singulari ergo super senarium item senarium | medium ponemus, qui similis aggregati ad superiora | articulum transmittat et binarium superiori ęquum in | eodem loco relinquat. in deceno autem super senarium | quinarium locabimus, qui cum ipso senario et superueniente | ab inferioribus articulari unitate ·xII· explere et, | binario ibi relicto, articulum possit ad anteriora | transmittere. in centeno quoque super septenarium quinarius statuetur, | qui accepta ab inferioribus articulari unitate cum | eo ·xIII· faciat, articuloque in antea promoto terna|rium superiori ęqualem inibi relinquat. porro in milleno | super quinarium senarius positus cum ipso et super adicienda | unitate duodenarium explens superiori parte | binarium ibidem relinquens ad decenum millenum arti|culum diriget. postremo in deceno milleno super | binarium ternarium constituemus, qui cum ipso et adie|cta sibi ab inferioribus unitate senarium superioris ca|racteris explebit summam. Quo expleto indubitan|ter enuntiare poterimus, inter ·lxII·ccc·xxII· et ·xxv·|dcc·lxvI· ·xxxvIdlvI· medietatis seu diffe|rencię locum obtinere. Quod ut planius liqueatur in sub|iecta formula sub oculo demonstrabimus. ‖

l. 10 (margin)

·Xꝏ·	·ꝏ·	·C·	·X·	·I·
ꟼ	ꚍ	ƕ	ꚍ	ꚍ
ƕ	ꟼ	ч	ч	ꟼ
ꚍ	ч	Λ	ꟼ	ꟼ

l. 20

f. 17r l. 1

Sane et de colligendis | numerorum continuatius dispo|sitorum summis,

siue in natura|li ordine, siue ab unita|te omnium imparium seu et cuiuslibet quantitatis | multiplicium, nec non et de numeris ab aliquo mente | conceptis, qua ratione et a calculatore quasi diuinan|do inuestigari possint, aliquid super hoc adiciendum | est, ut iis, quę ad multiplicationem aliquatenus pertinere | uidebantur, plene explicitis, ad ea, quę de diuisione | diffusius l. 10 tractanda sunt, liberius accedamus. Igitur si numeri | ab uno usque ad quamlibet partem naturali ordine | dispositi summam colligere uolueris, per medietatem | ultimi et eum, qui ipsum ultimum in naturali ordine | sequitur, imparem multiplicatione facta, quam quęris | summam inuenies. Uerbi gratia. si dispositionis huius | summam ·I·II·III·IIII·V·VI·VII·VIII· habere | uolueris, per medietatem octonarii id est quaternarium | et eum, qui octonarium sequitur imparem, id est nouenarium | multiplicatione facta, id est ·XXXVI·, ipsius l. 20 aggregati|onis summam subcrescere uidebis. Si uero usque ad quem|libet imparem naturalis numeri ordinem extendes, ip|sum ultimum imparem per maiorem sui medieta|tem duces. ut si ipsius naturalis numeri appositione | usque ad ·XI· produxeris, ipsum undenarium per maiorem | sui medietatem, id est per senarium metieris, summamque || totius dispositionis id est ·lXVI· f. 17v l. 1 excreuisse pronuntiabis. Sin | autem ab unitate omnes impares aggregare uolueris, | ultimi aggregati maiorem medietatem in se ipsum more tetragoni duces et summam inuenies. ut in | hac dispositione ·I·III·V·VII·IX·XI·XIII· ultimi | in ordine, id est ·XIII·, maiorem medietatem, id est ·VII·, | in se duces et in ·xl·IX· summam processisse cognosces. | Quod si a binario omnes pares disposueris, medi|etatem ultimi et numeri, qui illam medietatem in | naturali l. 10 dispositione sequitur, per alterutrum metieris, | summam habebis. Uerbi gratia si ·II.IIII·VI·VIII· | X·XII· digesseris, per ultimi medietatem, scilicet sena|rium, et illum numerum qui senarium in naturali dispositi|one sequitur, uidelicet septenarium, multiplicationem | facies et ·xlII· summam surgere non dubitabis. Multi|plicium autem, uidelicet duplorum triplorum quadruplorum | et deinceps (et) terminos ad quantamcunque uolueris numero|sitatem hac ratione, quam dicturi sumus, ordinabis et | ordinatorum summas incunctanter colliges. Si mul|tiplicium terminorum pares | uolueris facere progressiones, l. 20 quod impari numero non | unum tantum sed duo media sunt, duobus mediis per | alterutrum ductis, ultimum terminum liquido perno|tabis. Quod autem diximus, primo in duplis, deinde in triplis, || uel et in quadruplis ostendamus. f. 18r l. 1 Si duplorum terminos ab | uno absque ad quantamlibet progressionem porrigere uolu|eris, si numerum progressionum imparem facere propones, me|dium terminum, uti diximus, in se duces et ultimum habe|bis ita. Si ·III· uolueris terminos ordinare, scilicet ter|minus, qui inter primum et tertium medius est, uidelicet bina|rius unitatis duplus in se ductus quaternarium faciet, | qui in duplorum ordine tercius est. Si uero quinque uolueris | terminos disponere,

l. 10 tercius terminus, id est quattuor, qui inter primum | et quintum medius est, tetragonaliter sese metiens ·xvi· | reddet, qui duplorum quintum obtinet locum. Quod si pa|res terminos uolueris collocare, secundus et tercius, qui inter | primum et quartum medium tenent locum, se mutuo au|gentes quartum efficiant. bis enim ·IIII^{or}· octo sunt. et octo|narius in dupla dispositione quartus est. tercius et quintus, qui inter | primum et sextum medii sunt, se commensurantes sextum confi|ciunt. Quaternarius octonarium metiens ·xxxii· complet, | qui numerus in dupla proportione ·vi^{tus}· est. Similiter quartus et | quintus octauum, quintus et sextus decimum, ·vi^{tus}· et ·vii^{mus}·xii^{mum}·, | ·vii^{us}· et ·viii^{us}·xiiii^{mum}· et deinceps ad hanc consequentiam medii | terminos ultimos sine impedimento procreabunt. In imparibus | uero progres-
l. 20 sionibus sicut secundus tercium et tercius quintum, ita ·iiii^{tus}· | vii^{mum}·, ·v^{tus}· nonum, ·vi^{tus}·xi^{mum}·, ·vii^{mus}·xiii^{mum}·, octonus ·xv^{mum}· et de|inceps eadem ratione medii termini tetragonaliter se | multiplicantes ultimos generabunt. Idem quoque in | triplos corrigere liquet. Ternarius enim, qui in triplorum
f. 18^{v} l. 1 dispositione || secundus est, in se ductus (est) tercium, id est nouenarium re|ddit, secundus et tercius, id est ternarius et nouenarius ·xx|vii· generant, qui in triplorum ordine quartus est. Quintum | autem, scilicet ·lxxxi· tercius, id est nouenarius in se | ductus efficit. et deinceps hoc ordine omnes tri|plorum ultimos terminos inuenies. Nec non | et in termini quadruplis idem est. Secundus enim terminus id est | quaternarius in se ductus ter-
l. 10 cium, scilicet ·xvi·, | quartum terminum, uidelicet ·lxiiii· procreant. | Porro tercius terminus, id est ·xvi· in se ductus ·cclvi· | id est quintum terminum reddit. et ne in exemplis diu|tius inmoremur, idem in omnibus multiplicibus necesse erit euenire. Quamquam autem pari in omnibus multiplicibus ra|tione termini ordinentur, dissimiliter tamen aggrega|torum terminorum summę colliguntur. In duplici | enim dispositione ultimus terminus omnes pręceden|tes uno superat et duplicatus extremus termi|nus, si unum depręhenserit, omnium insimul ter|minorum summam complebit. Ut in illa dispo|sitione ubi ·lxiiii·
l. 20 extremus est, id est ·cxxvii· om|nium terminorum summa concurrit, uno uidelicet | minus quam duplo extremi termini. In triplici autem | dispositione ultimus terminus ad omnes ceteros uno | amplius quam duplus est. Quorum omnium si summam | quęris, ipsi ultimo termino medietatem sui | uno minus adicies. Ut in illo triplicium ordine | uerbi id est ·lxxxi· extremus terminus
f. 19^{r} l. 1 occurrit ipsius || numeri medietas uno sequestrato eius numero addita | omnium terminorum summam id est ·cxxi· complebit. Porro | quadruplorum extremus terminus ad omnes pręcedentes uno | plus quam triplus est. Quorum omnium si summam quęris ultimo | terciam sui partem adicies, quam superhabundante unita|te colligeris. Ut in ea quadruplorum progressione, ubi | ·cclvii· ultimus terminus est, ipsi numero terciam sui pa|rtem, id est ·lxxxv·, quam

remanente unitate colle|gimus, aggregamus. et in ·ccc·xlı· summam crescere indu|bitanter aduertimus. Ad eandem equidem consequentiam | quincuplorum ultimus terminus quadruplis, sexuplorum | quintuplis, septuplorum sexuplis, octuplorum septu|plis, nonuplorum octuplis, decuplorum nonuplis, | undecuplorum decuplis est et deinceps uno semper mi|nor ultimi termini ad reliquos multiplicitus | est, quam ipsorum ad inuicem terminorum comparatione. | et secundum prȩmonstratam in paucis rationem et in ceteris | omnium terminorum summam diligens calculator inue|niet. | l. 10

Si quem autem in multiplicando et diuidendo ex|ercitatum abacistam quasi diuinando eludere | uoles, ut quem ipse mente conceperit numerum promte | edicas, numerum ab eo mente conceptum iube | primo duplicare, deinde triplicare, postmodum | in duo diuidere et medietate abiecta alteram | triplicare, dehinc quot ex illa multiplicatione collegit || nouenarios requirere et quot tibi responderit nouena|rios, totidem eum cogitasse dices unitates. Item numerum | mente conceptum iube duplicare, duplicatum quincu|plicare, abiecta medietate alteram triplicare et | quot interrogatus se collegisse responderit quindenarios, | totidem concepisse comprobatur unitates. Item numerum me|nte conceptum iube primo triplicet, deinde quincupli|cet, ad ultimum terciam, remotis duabus, sexies du|cat. tunc interrogatus, quot trigenarios se collegisse res|ponderit, tot cogitasse pronunciabitur unitates. | Item numerum mente conceptum iube primo triplicare, tri|plicatum quadruplicare, deinde medietatem ab|icere, alteram quincuplicare, idem terciam bisse remo|to sescuplare. his actis interroga, quot sexageni | ex illa multiplicatione collecti sunt. et quot tibi respon|derit sexagenos, totidem concepisse perhibetur uni|tates. Item numerum quemlibet cogitauerit iube du|plicare, duplicato quinque addere, inde totum insimul | quincuplicare, quincuplicatum decies ducere. quo | peracto, quot centenos multiplicatio collegerit interroga|bis. sciens autem quod de illa, quam prȩdiximus, quinarii adie|ctione ·ccl· producti sunt, hunc numerum de ea, quam tibi dix|erit, summa redices et quot centenarii remanserint, | tot eum cogitasse pronunciabis unitates. | l. 20 f. 19v l. 1 l. 10 l. 20

Quum in superioribus de numerorum multiplicatione, quȩ | memoriȩ occurrere potuerunt, quanta po||tuimus breuitate perstrinximus, superest, ut de diuisone | aliquid dicere aggrediamur. Diuisio igitur alia simplex, | alia composita. Composita alia continua, alia inter|missa. Simplex diuisio est, ubi quotquot fue|rint diuidendi, unus tantum caracter diuisor ad|hibetur. Composita, ubi plures applicantur diuiso|res, siue unus siue plures fuerint diuidendi. quȩ, | si diuisores continuatim dispositi fuerint, continu|a dicitur, intermissa uero, si diuisores aliquot inter|uacantibus arcubus fuerint interrupti. Diuisiones ergo | pro diuisorum ratione et uocabula sortiuntur et regulas. | et sicut in multiplicationibus per multiplicatorum deno|minationes f. 20r l. 1 l. 10

multiplicandos augeri supra docuimus, | ita et hic per diuisorum denominationes diuidendos | diminuemus. Et diuisiones aliȩ sine differentiis fuerint, | quas aureas appellant, aliȩ cum differentiis, quȩ ferreȩ co|gnominantur. Qui autem haec nomina posuerunt, nichil | dignum memoria super ipsorum nominum ratione in scriptis suis | reliquisse inueniuntur. Eo igitur ordine quo

l. 20 eas disposuimus | primum aureas deinde ferreas diuisiones exequamur. Aureȩ itaque diuisionis tam simplicis quam compositȩ | proprium hoc est, statutis diuisoribus et diuidendis, diui|soribus quidem in abaci spacio superiori, diuidendis uero | in medio, si diuisores in inferioribus arcubus fuerint | super diuidendos trahantur. et pro ratione sedium, quas prius obti|nuerant, denominationes suas disponant. Uerbi gratia ut, si diuisor primo singularem ob-

f. 20v l. 1 tinuerit, quocumque ad diuidendum protrahatur, denomina||tionem suam sub se ponet. si in deceno fuerit promo|tus in antea ad diuidendum, a loco, in quo sederit, | denominationem retro secundabit, si in centeno, | terciabit, si in milleno, quartabit et deinceps pro rati|one primarum sedium singuli quique diuisores ad diui|dendum in antea producti, a locis in quibus sederint, | denominationes retrograde disponant. Hoc autem tam|diu faciendum erit, quo adusque ad proprias sedes re|ducti in subiectis diuidendis nequeant di-

l. 10 nu|merari. et tunc quod remanserit, indiuisibile | reputabitur, aut in minuta | resecabitur. Erit ergo diligentis abacistȩ, in | diuisionibus multiplicationum similitudinem con|trarie considerare, ut sicut in multiplicationibus | secundum multiplicatorum sedes digitos in antea | promouebamus, sic in diuisoribus secundum primas diui|sorum sedes denominationes retrogradim transfera|mus. et sicut in multiplicationibus, ubi singularis sin|gularem multiplicabat, nullam

l. 20 nobis necessa|riam regulam docuimus, quod in ea multiplicati|one nulla maior summa quam simpliciter enunciatur | excrescit, sic in diuisionibus, ubi si singularis singula|rem diuidit, nulla nobis regula opus erit, dici|mus, quum in nulla maior diuisoris portio inue|nitur, quam simplici denominatione pro-

f. 21r l. 1 nunciatur. | Ac primum de simplici diuisione tale nobis sit exemp|lum. Ponatur in singularis spatio superiore ·[symbol]· di|uisor, in deceni spacio medio ·[symbol]· diuidendus. | secundum prȩmonstratam regulam quaternarium diuisorem | in deceno super diuidendum senarium ponemus et quoties | ipse in senario contineatur, quȩremus. cumque respon|sum fuerit, semel et remanent duo, considerantes, quod | diuisor ipse primo singularem obtinuit sedem, uni|tatem pro denominatione sub eo in eiusdem deceni infimo | spatio ponemus et bina-

l. 10 rium, qui remanserit, in me|dio locabimus. deinde quaternarium ad proprium sedem, ui|delicet ad singularem reuocabimus, eumque in bina|rio qui in deceno de prima diuisione remanens uig|enarium explet numerum, denominabimus ita dicen|do: quocies est quaternarius in uiginti. scientesque, | eum in ·xx· quinquies contineri et nichil remanere | quinarium sub eo in singulari

ponemus, seruata | regula, quę dicit: singularis denominationem | suam sub
se ponit. quo facto diuisione completa | pronuntiabimus, quaternarium in
·lx· quindecies contineri | nichilque remanere. Quod si utrum bene diui- l. 20
se|rimus, multiplicando probare uoluerimus, ipsum | quaternarium diuisorem
per denominationes multi|plicando sexagenarium numerum procul dubio re-
pa|rabimus. Item de simplici diuisione, ubi plures | sint diuidendi, tale
sumamus exemplum. Sit | in deceni superiore spatio ·Ч· diuisor, in cente||no f. 21v l. 1
·Λ·, in ipso deceno ·Ƨ· in mediis spaciis di|uidendi disponantur. itaque
senarium diuisorem a | deceno in centenum super septenarium trahemus,
eumque | in ipso septenario denominabimus ita pronunci|ando: quociens est
senarius in septenario. cumque eum | semel in illo contineri et unum re-
manere responderimus, | in eodem loco unum relinquimus et scientes, quod
diuisor | secundum locum, id est decenum obtinuit, unitatem pro de|nomina-
tione retro ad deceni inferius secundabimus | spatium. ad propriam sedem, l. 10
id est ad decenum, diuisorem retrahemus | senarium, dicemusque: quociens
est senarius in ·xii^{cim}· uidelicet | in illa unitate, quę de septenario in cen-
teno re|mansit et in binario, qui primo in deceno positus | fuit. uidentesque
in ·xii· senarium bis contineri, | binarium pro denominatione retro ad singu-
larem secun|dabimus, secundum illam deceni regulam quę dicit, decenus | de-
nominationem suam secundat. eruntque in denomi|nationibus unitas in deceno,
binarius in singulari, qui | simul ·xii· complent. sicque cognoscemus, ·lx· in l. 20
·dcc·xx· | duodecies contineri. porro si quis et hic, utrum bene | diuiseri-
mus, probare uoluerit, facta per denomi|nationes diuisoris multiplicatione
diuidendorum | summam redintegrabit. Eodem quippe modo et centenus
di|uisor denominationes retro terciabit, millenus quar|tabit, decenus millenus
quintabit et ceteri per ordinem | quotos a prima sede obtinuerint locos, a
sedibus || in quas traducti fuerint retro gradationibus denominati|ones suas f. 22r l. 1
ordinabunt. Et hoc simplicis aureę diui|sionis proprietas est, quam et prius
exposuimus uerbo et prius modo patefe|cimus exemplo. Compositę autem
diuisionis proprium est, statutis | diuidendis et diuisoribus diuisores super
diuidendos | sicut et in simplici trahere. et primum tantum id est, per
maxi|mum diuisorem denominationem sumere, reliquos uero di|uisores de re-
sidua summa per primi diuisoris deno|minationem remouere. uerum tamen pri-
mus diuisor, et si | sępius in primo diuidendo denominari possit, habita l. 10
| posteriorum diuisorum consideratione, tanto moderami|ne suo diuidendo com-
parandus est, ut reliqui finetenus | diuisores de residua summa per sumptam
ab eo deno|minationem possint absque offendiculo remoueri. | quod eo usque
fiet, donec inminuta summa et diui|soribus ad proprias sedes regressis, diui-
dendi eis minores | occurrant et tunc quod remanserit uel in minutias di|ui-
demus, uel tamquam indiuiduum relinquemus. Sint ergo diui|sores in milleno | l. 20

·ɦ·, in centeno ·ꝶ·, in deceno ·ꟼ· atque in mediis diui|dendorum sedibus in centeno milleno ·ɦ·, in deceno milleno | ·ꝶ·, in milleno ·8· diuidendi disponantur. cumque diui|sores super diuidendos eo ordine, quo in sedibus suis sunt, posuerimus, ternarium in supposito sibi ternario semel ac|cipiemus et
f. 22v l. 1 nichil remanebit, ipsamque denomina||tionem, id est unitatem retro ad centenum quartabimus, conside|rata primi diuisoris ratione, qui quartum locum id est millenum | primo obtinuit. per hanc autem denominationem quater|narium diuisorem de supposito sibi quaternario semel | auferentes nichil ibi relinquemus. atque per ipsam eandem | senario diuisore de supposito sibi octonario se|mel ablato, duo remanebunt, positoque inibi, id est | milleno ·ϭ·, diuisores ad proprias sedes reuocabi|mus. Completa ergo usque ad
l. 10 minutias diuisione, quia | quę remanent, duo milia in ·$\overline{\text{III}}$·cccc·lx· per inte|grum diuidi non possunt, plene constare licebit, | in ·$\overline{\text{ccc}}$·xlvIII· ·$\overline{\text{III}}$·cccc·lx· centies contineri et ·II°· | milia indiuisibilia remanere. Quam diuisionem si cui | probare placuerit, tunc nos bene diuidisse comperiat, | cum facta per denominationem multiplicatione sum|ma fuerit in integrum restituta. Item per compo|sitos continuatim diuisores, aliud proponamus ex|emplum. Sint in deceno milleno ·ϭ·, in milleno ·ꟼ·, in | centeno ·8· diuisores ordinati, in
l. 20 centeno milleno ·ꟼ·, in | deceno milleno ·ϭ·, in milleno ·l· diuidendi | in mediis dispositi sedibus. tractis ergo super diui|dendos diuisoribus primus diuisor binarius supposito | sibi senario comparabitur. qui quamuis in eo ter accipi | possit, tamen habita posteriorum diuisorum consideratione, | qui
f. 23r l. 1 utique sibi suppositis diuidendis multo maiores || sunt, non nisi bis accipietur, ut reliqui diuisores de residuo | per eandem denominationem remoueri possint. binarium | ergo ad denominationem retro in deceno quintabimus atque | in centeno milleno alterum binarium, qui de senario reman|sit, relinquemus. ac per ipsam denominationem senarium | diuisorem non de subiecto sibi binario, qui eo multo | minor est, sed de illo binario, qui de senario in centeno | milleno remansit, quique respectu senarii, qui in poste|riori loco est,
l. 10 uigenarii uice fungitur, bis remo|uebimus, remanebuntque octo ad posteriorem locum | cum binario, qui ibi est, transponendi. deinde per ipsam | eandem primi diuisoris denominationem sequentem, id est octo|narium, non de subiacente sibi unitate, quę multo mi|nor est, sed de binario in anteriore arcu cum octo|nario consistente, tamquam de uiginti tolletur, rema|nebuntque ·IIII^{or}· qui ad posteriorem arcum relati et u|nitati iuncti quinarium facient. et erunt residui | in deceno milleno ·8·, in milleno ·ɥ· diuidendi. | tunc di-
l. 20 uisores ad proprias sedes reducemus iterumque primum | diuisorem binarium in subiecto sibi octonario propter pręmo|nstratam rationem non quantum sed tantum accipiemus, atque ip|sum ternarium ad ultimos digitos, id est ad singularem | quintabimus, remanentibus in deceno milleno duobus. | et de

ipsis duobus, qui respectu senarii in posteriore | arcu consistentis ·xx· faciunt, ipsum senarium per prędi|catam denominationem ter tollemus, remanebuntque duo, | qui quinario in milleno iuncti ·vii· explebunt. de quo | septenario ad posteriorem se octonarium ·lxx· reddente | cum octonarium ter remouerimus, remanebunt ad ipsum | octonarium in centeno existentem ·xlvi·, quaternario | in milleno, in centeno senario posito. qui post ea per minu|tias diuidentur. eritque minor ille numerus id est ·$\overline{\text{xxvi}}$·dccc· | in maiore, uidelicet in ·$\overline{\text{dcxxi}}$· uigies ter, remanebuntque | ·$\overline{\text{iiii}}$·dc·. In intermissa quoque diuisione eadem obseruantia | est. Sed quum si forte longa acciderit intermissio, simpli|ciorem abbacistam non nullo scruplo mouere potest, | quid in tali diuisione facto opus sit, expediendum uidetur. | Ponamus itaque in centeno milleno ·Ч· diuisorem et in dece|no ·ꝶ·, tribus in medio uacantibus sedibus, atque infra | in milleno milleno ·Ꞇ· diuidendus adhibeatur. et quidem in ipso | binario, qui ad senarium in posteriore arcu positum uigenarium explet, ipsum senarium ter ac|cipiemus, remanebuntque ·ii^o^· in centeno milleno retro trans|ponendi. ipsam uero denominationem, scilicet ternarium, ad | singularem arcum sexabimus ac per ipsam denominationem | quaternarium diuisorem de remanente in centeno milleno | binario remouere necesse habebimus. quod sic faciemus. | in singulis uacuis arcubus, id est in deceno milleno, in milleno | atque in centeno singulos ·9· ponemus, alteram in suo lo|co relinquemus. tunc de nouenario in centeno posito | et superposita sibi unitate qui respectu deceni pro centum | computantur, ter ·iiii^or^· auferemus, remanebuntque ·lxx· || ·xviii·. Eruntque in centeno ·8· et in deceno | similiter ·8·. factaque diuisione erunt in bis mille | milibus ·$\overline{\text{dcxl}}$· ter, remanentibus ·$\overline{\text{cxcix}}$·dccc·lxxx·. Sa|ne eodem ordine procedemus, ubicumque de longe remoto numero | inferiorum diuisorum quantitatem per denominationem primi | remouere oportebit, tunc ut pręmonstratum est, in singulis | uacuis sedibus singulos nouenarios ponemus et subtractam | de superiori numero unitatem super ultimum nouenarium sta|tuemus, in inferiores diuisores per primi denominationem | auferentes, quid residuum sit liquido colligere poteri|mus. Sed quum et alius in aurea diuisione diuidendi mo|dus a plerisque usitatus est, ne quid quod scitu utile sit, prętеriisse | uideamur, de eo et aliquid dicere nequaquam supersedendum est. In hoc | siquidem diuisionum genere statutis diuisoribus et diuiden|dis diuisores in propriis sedibus immobiles permanebunt. sed | tamen pro sedium suorum ratione de diuidendis sumtas deno|minationes ordinabunt ita, ut, qui in primo arcu fuerit | diuisor, in eodem, quem diuidet, denominationem ponat. qui | in secundo, id est in deceno steterit, ab eo, quem diuidet, deno|minationem secundet. qui in centeno, terciet. qui in milleno, | quartet et deinceps ad eandem consequentiam. Hoc autem in huius | centeni (*sic*) genere attendendum erit ut, quamdiu

[Margin: f. 23v l. 1 — l. 10 — l. 20 — f. 24r l. 1 — l. 10 — l. 20]

diuisorum ca|rectere minore et diuidendorum maiore denomina|tio digitaliter accipi poterit, nunquam articulariter | accipiatur et tunc eo quo diximus ordine secundum diuisorum | sedes adinueniendos collocetur. Ubi uero in-
f. 24v l. 1 minutauerit su||mmam, articulariter accipienda erit, uno inferius | a diuidendis loco, quam ipsi a primo arcu fuerint diui|sores, denominationes disponentur, donec ad summam | manum perducta per integros numeros diuisione, sub diui|soribus minores occurrent diuidendi. et tunc quod remanebit, uel | indiuiduum reputabitur, uel in minuta secabitur. Et hoc in simplici diuisi|one dictum accipiatur. In compositis autem diuisoribus et conti|nuis et inter-
l. 10 missis, seruata in omnibus diuisorum immo|bili sede, per primum diuisorem secundum pręmonstratam ra|tionem per denominationes a diuidendo et digitaliter et | articulariter disponentur. et per eorum denominationes | reliqui diuisores de reliqua summa, ut supera docuimus, | auferentur, donec sub diuisoribus minores inuenti | fuerint diuidendi. Hoc autem in his compositis | diuisoribus, quod in superioribus diximus, obseruandum erit, | ut primi diuisoris denominatio tam moderatę | accipiatur quantitatis, ut reliqui diuisores
l. 20 de residuo possi|nt per eandem denominationem remoueri. hac ha|bita consideratione, ut diuidendi in superioribus sedi|bus longe remoti erunt et primus diuisor in primo | diuidendo digitaliter fuerit denominatus, secundus | diuisor de secundo diuidendo digitaliter idem remo|uebitur, uel si secundus diuidendus secundo diuisore minor occu|rrerit de eo, quod de primo diuidendo reman-
f. 25r l. 1 serit, | articulariter auferatur. Si uero primus diuidendus primo || diuisori par, secundus secundo diuisore minor fuerit, tunc | et primus diuisor articulariter denominabitur et reli|qui per ordinem diuisores non de proximis, sed de superiori|bus diuidendis, aut de eo, quod de primo remanserit, | articulariter remouebuntur. et eo semper ordine, quo primus diuisor uel digitaliter uel articulariter denominabitur et reliqui diuisores non de proxima sed de superiore summa et digitaliter et articulariter remouebuntur, donec paulatim im|minuta summa et usque ad diuisorum sedes perducta | diuisoribus minores diuidendi inueniantur. aut si | sub primo diuisore diuidendus par occurrerit, reli|qui uero diuisoribus suis minores fuerint, tunc quicquid erit,
l. 10 | ad minuta seruabitur. Hoc autem, quod diximus, primum | per simplices et postmodum per compositos diuisores sub | exemplo lucidius ostendamus. Ponatur in singulari | limite ·ꝛR· diuisor, in centeno ·Ⴗ·, in deceno | ·Ч·, in singulari ·ꝁ· diuidendi. inmoto itaque di|uisore ipsum diuisorem quaternarium in illo, quem in cente|no posuimus, senario semel denominabimus, rema|nebuntque duo. et quia diuisor singularis est et de | digito sumitur, denominatio in eodem centeno | ponetur. item in binario, qui in centeno
l. 20 remansit, qua|ternarium non digitaliter sed articulariter quinquies | denominabimus. ipsaque denominatio, quia de | articulo tollitur, inferius quam

diuidendus stetit, id est ad | decenum transferetur. deinde in quinario qui in dece|no est, quaternarium diuisorem semel accipiemus, rema|nenteque unitate ipsam denominationem inibi | cum quinario reponemus. Postremo in ea, quę in dece||no remansit, unitate et ternario in singulari posito, | qui simul f. 25v l. 1 ·xIII· reddunt, quaternarium ter accipiemus. | terque accipiemus, remanebitque unus. atque ipsum terna|rium denominationem in singulari ponemus. quo | facto, diuisione completa, erit quaternarius in ·dc·lIII· | centies sexagies ter, remanente uno. Quod si quis, | utrum bene diuisum sit, probare uoluerit, cum per deno|minationes diuisorem multiplicando summam redin|tegrauerit, liquido agnoscet. In composita quoque di|uisione eandem uigere rationem l. 10 tali instruemur | exemplo. Sint diuisores in centeno ·Ⴗ·, in deceno | ·ч·, in singulari ·ƕ· ordinati. sub quibus in mi|lleno ·Λ·, in centeno ·ᖇ·, in deceno ·ᘔ· diuidendi con|stituantur. inmotis ergo diuisoribus primum diuisorem | senarium, qui est in centeno, in primo diuidendo sep|tenario ut in digito semel accipiemus, remane|bitque unus. ipsam autem denominationem, quod de digi|to est, secundum diuisoris sedem a diuidendo tercia|bimus, unum qui remanet in eodem loco relinquemus. | tunc per pręmonstratam in superiori- l. 20 bus rationem per primi de|nominationem reliquos diuisores de reliqua summa | subtrahemus. et quia quinarium de uicino sibi quaternario, | quia minor eo est, auferre non possumus, de ulte|riore, quę ad eum articuli uice fungitur, unitate | eum remouebimus et, qui remanserint ·V· quaternario | iungentes in nouenarium conpingemus. de quo no|uenario qui ad sequentem se binarium nonaginta | facit, quia de binario digitaliter non possumus, | ternarium uero de articulo auferemus. remane||buntque ·lxxxvII· atque octonario inibi f. 26r l. 1 relicto, | septenarium cum binario in deceno ponemus, fi|entque ·VIIII·. rursum primum diuisorem in | supposito sibi octonario semel accipiemus et duo|bus remanentibus, denominationem ad singularem | tertiabimus. per quam quinario de supposito sibi noue|nario sublato ·IIII· remanebunt, de quibus ut de ar|ticulo ternario remoto remanebunt ·xxxvII·, ter|nario in deceno, septenario in singulari posito. | expleta ergo diuisione inuenientur ·dclIII· in l. 10 ·$\overline{\text{vII}}$·cc|ccxx· undecies contineri, remanebuntque ·cc·xxx|vII·. Atque hoc in omnibus huius generis compositis | diuisionibus tam continuis quam intermissis, sicut et uerbis | exposuimus et exemplificando ostendimus, dilige|nter obseruando inoffenso pede procedemus. | Per differentias quoque et simpliciter et composite, conti|nuatim et intermisse diuidemus. In hoc autem genere | cum quodam prodigiali modo multiplicando diui|dimus. cumque ad hoc peruenerimus, ubi nulla de | diuidendis denominatio accipi possit, | per l. 20 quam differentiarum multiplicatio fiat, tunc re|motis differentiis secundum aureę rationes diui|sio terminatur. Differentiarum uero alię integrę, | alię minus integrę sunt. integrę, quę diui|sori ad supplendum denarium sufficiant,

mi|nus integrę, quę cum diuisorum quantitate no|uenarium suppleant. et
f. 26v l. 1 sciendum, quod | in omni simplici diuisione diuisori inte||gra differentia, uidelicet ad supplendum denarium | datur. nec unquam diuidendi cum diuisoribus in eadem | abaci sede constituuntur, sed semper diuisores in digitis, | diuidendi in articulis ponuntur. Denominationes | uero a toto accipiuntur et semper uno inferius loco, quam | diuisor a primo arcu steterit, a diui|dendo sequestrantur ac per eas diuisoris differentia multi|plicatur. et quamdiu articuli de multiplicatione | excreuerint, ipsi quoque ad denominationem tra-
l. 10 huntur, | quod tamdiu fit, donec cessante articulorum in|cremento diuidendi cum diuisoribus in eisdem sedibus in|ueniantur. tunc, remota differentia, diuisor cum diuide|ndo aureę diuisionis lege comparatur et sic diuisio | terminatur. Cuius rei tale sit exemplum. sit in sin|gulari ·6· diuisor, in centeno itidem ·6· diuidendus. diuiso|ri itaque senario differentiam ad denarium dabimus, idest | quaternarium, considerantesque regulam, quę dicit, simplex | cum differentia primatus, id est in primo arcu positus deno|minationem a
l. 20 toto secundat, totum senarium diui|dendum, qui in centeno est, in decenum secundabimus ac per | eum diuisoris differentiam multiplicabimus, ita dicendo: sexcies ·IIII· ·XXIIII·. de quibus secundum regulam digitum, | id est quaternarium, ponemus in deceno, binarium | articulum in centeno. iterum articulum binarium ad | decenum secundabimus ac per eum differentiam, id est quaternarium, | multiplicabimus ita: bis ·IIII· ·VIII·. qui quia digi|tus, in
f. 27r l. 1 deceno secundum regulam cum quaternario ponitur || et ·XII· faciens binarium in eodem loco relinquit et | unitatem pro articulo ad superiora transmittit. ip|sam unitatem, quia articulus est, ad denominati|onem in decenum secundabimus, ibique cum senario | et binario constituemus ac per ipsam denominatio|nem differentiam semel ducentes, quaternarium in deceno | ponemus atque ipsas denominationes, id est senarium | binarium et unitatem in nouenarium conpingemus. | et quia de multiplicatione articuli excrescere desierint,
l. 10 | remanserintque in deceno binarius et quaternarius, qui senarium | complent et ipse ad diuisorem in articuli sedet loco, | ipsum quoque senarium a loco, in quo est, totum ad singula|rem pro denominatione secundabimus ac per eum differentiam, | sicut prius tamdiu, multiplicabimus, donec articulis | crescere cessantibus senarius nobis in singulari rema|neat et in ipso itidem singulari denominationes, | uidelicet ·6·2·1· nouenarium reddant. tunc | demum differentiam remouebimus et diuisorem senarium | in supposito sibi
l. 20 senario lege aureę semel acci|piemus. quam denominationem cum nouenario addideri|mus, completa denarii quantitate, articulum ad decenum | promouebimus, itemque de nouenario, qui in deceno est, et | superueniente unitate unitatem pro articulo ad | centenum propellemus. sicque completa diuisione pate|bit, quod in ·dc· senarius centies contineatur. Eodem modo et | in ceteris

simplicibus cum differentia diuisionibus faciendum | erit et ipsarum communis regula firmiter memori||a tenenda, quę doceat, qualiter denominationes a toto f. 27v l. 1 | transponere debeamus. Est autem scilicet regula: simplex | cum differentia primatus, id est in singulari positus denomi|nationem a toto secundabit, secundatus in dece|no uidelicet constitutus, tertiabit, tertiatus quartabit, | quartatus quintabit et deinceps ad eundem modum, | ut semper uno inferius a diuidendo denominatio re|trogradetur, quam ipsorum diuisorum fuerit dispositio. sem|per enim ut diximus diuisores in digitis, diuidendi in ar|ticulis l. 10 erunt et eo usque, ut sub exemplo pręmonstratum est, | articulorum fiet ad denominationes transpositio, | donec cessantibus articulis sub diuisoribus diuiden|di inueniantur et tunc et lege aureę diuisionis termi|nabitur. Compositę uero cum differentiis diuisionis proprium est, | ultimo tantum diuisori integram dare differentiam, primo | nullam, mediis minus integras. quę autem integrę, quę mi|nus integrę differentiae sint, superius exposuimus. nec erit | necesse in hac diuisione, ut diuisores in digitis, | diuidendi contineantur in articulis, quia et si in eisdem sedibus | cum diuisoribus fuerint diuidendi, l. 20 quin diuisio fieri debe|at, nichil erit impedimenti. ecquidem hic non a toto, | sed a partibus denominationes ducerentur et quantumcunque diui|dendi a diuisoribus in superiores recesserint sedes, nunquam articu|lariter partes accipientur, quamdiu digitaliter accipi | potuerint. atque ubi digitaliter accipientur, toto a | diuidendo remouebuntur loco, quot a prima sede | primus recesserit diuisor. ubi uero de articulo par||tes sumuntur, uno inferius loco, f. 28r l. 1 quam diuisor a primo se|derit, loco ponentur. per ipsas autem partes diuisorum | differentię multiplicabuntur, donec in ultima summa | neque de articulo neque de digito partes tolli possint. | et tunc remotis differentiis lege aureę diuisio termina|bitur. Sane partes ipsas nobis primi diuisoris quan|titas insinuabit, qui si unitas fuerit, de diuide|ndo medietatem tollemus, si binarius tertiatur, si terna|rius quartatur, si quaternarius quintatur, si quinarius sextatur et de|inceps uno semper multiplicior erit pars, quam | primi diuisoris l. 10 quantitas sit. Si quid autem medieta|tes tercias quartas et ceteras superabit, si de digito partes sub|latę fuerint, in eisdem remanebit sedibus. si de | articulo inferius secundabitur positisque, ut pręmo|nstratum est, partibus diuisorum differentię multiplicab|untur. Quare uero medietates, tercias et quartas partes | accipiamus, hęc ratio est. si quidem cum ultimus diuisor | cum differentia sua denarium expleat mediorumque | singuli cum suis differentiis singulos perficiant noue|narios, ab ultimo diuisore usque ad primum uni|tas l. 20 intellectu transit eiusque quantitati intellectu | conmemorata, si medietatem fecerit, medietas | de diuidendo tollitur, si terciatur, tertia accipitur, | si quartatur, quarta et deinceps ad eandem consequentiam. | ut si primus diuisor unitas fuerit, unitas ei inte|llectu addita cum ea binarium facit, cuius

f. 28v l. 1 ipsa ‖ unitas medietas est. rursum si primus diuisor binarius | fuerit, unitas ei intellectu adiecta cum eo terna|rium facit, cuius unitas tertia pars esse dinoscitur. | et eandem in ceteris rationem considerare licebit. Atque ut quod | diximus manifestius fiat, tale proponamus exemplum. sint | diuisores ·$\overline{\text{II}}$·ccc·xlvi. binarium itaque in milleno, terna|rium in centeno, quaternarium in deceno, senarium in singu|lari ponemus. sint diuidendi ·ccclxv·dc·xl· et l. 10 erit | in centeno milleno ·ɦ·, in deceno milleno ·Ч·, in mil|leno ·ч·, in centeno ·Ч·, in deceno ·ꭆ·. ac | primo quidem diuisori nullam differentiam dabimus, | ultimo uero, id est senario, in singulari integram differentiam | ad supplendum denarium, id est quaternarium superponemus. mediis, | id est quaternario et ternario, differentias ad nouenarium, quaterna|rio quinarium et ternario senarium apponemus. quia ergo primus | diuisor in milleno binarius est, de primo diuidendo, id est ter|nario, tertiam partem, uidelicet unitatem, accipiemus | et nichil remanebit. amotoque ternario ipsam | unitatem secun- l. 20 dum primi diuisoris rationem a centeno | milleno ad centenum quartabimus ac per eam differentias diui|sorum multiplicabimus et quaternarium in centeno cum eo | qui ibidem erat senario, quinarium in milleno cum altero qui | illic habebatur quinario, senarium in deceno milleno | cum altero senario ponemus. aggregataque summa pro | quaternario et senario, quos in centeno habuimus, articul|um id est unitatem ad millenum mittemus. | porro de milleno pro duobus quinariis | unitatem ad decenum millenum mittemus, remane- f. 29r l. 1 bit‖que ibidem unitas et erit in deceno milleno unitas et ·II· | senarii, qui simul ·XIII· faciunt. ternarioque ibi rema|nente unitatem ad centenum millenum mittunt. rursum | de hac unitate, quia digitaliter tertiam partem non habet, | articulariter tamquam de ·X· terciam partem accipiemus, id est | ·III·, remanebitque unus, quem ad decenum millenum refere|mus et cum ternario in quaternarium conpingemus. ipsam uero tertiam | partem ternarium, quia de articulo sumpta est, non quartabimus, | sed ad decenum quin- l. 10 tabimus et per eam differentias multiplicabimus | ita: ter ·IIII·XII·. binarium in deceno cum quaternario pone|mus, unitatem in centeno, quem paulo ante uacuum reliqui|mus. item ter ·V· ·XV·, eritque in centeno cum unitate qui|narius et senarium perficiet, in milleno unitas, quę cum altera | unitate binarium reddet. item ter sex ·XVIII·. octona|rium ergo in milleno cum binario ponemus, unitatem in de|ceno milleno cum quaternario. porro de milleno pro octona|rio et binario articulum, uidelicet unitatem, ad de|cenum millenum transferemus et cum quinario (*l. quaternario*) et altera uni|tate l. 20 senarium faciet. deinde de senario, qui in dece|no milleno est, tertiam partem, id est ·II· accipiemus, nichilque | remanebit. quę quia de digito sumta est, ad decenum | sicut prior quartabitur ac per eam differentię multiplicabuntur, ita | dicendo. bis ·IIII· ·VIII· sunt. octonarium in deceno cum | senario

ponemus. item bis ·v· ·x· et unitatem articulum | in milleno ponemus. item bis ·vi· ·xii·, eritque binarius in | milleno et cum unitate ternarium faciet, unitas arti|culus in deceno milleno. tunc partes*), quę in deceno sunt, id est || ternarium et binarium in quinarium aggregabimus. de|inde octonarium cum senario, qui in eodem deceno sunt, | insimul copulantes ·xiiii· faciemus et, quaternario ibi | relicto, unitatem ad centenum mittemus. quę senario, | quem ibi inueniet, iuncta septenarium complebit. post ea | de unitate, quę in deceno milleno est, terciam partem ut de ar|ticulo tollemus, id est ternarium, remanebitque unitas, quę ad | millenum relata ternarioque iuncta quaternarium faciet. ipsa | autem pars, quia de articulo sumpta est, ad singularem quinta|bitur et per eam differentię more solito multiplicabuntur, di|ceturque sic: ter ·iiii· ·xii·. binarius in singulari pone|tur, unitas in deceno quaternario iuncta quinarium red|det. item ter ·v· ·xv· eritque quinarius cum quinario in deceno, | unitas in centeno cum septenario in octonarium | surget ac de duobus deceni quinariis articuli uni|tate accepta, ipse octonarius nouem faciet. item ter | ·vi· ·xviii·. octonarius cum nouenario in centeno po|netur, unitas in milleno cum quaternario quinarium efficiet. | dehinc de octonario et nouenario, qui in centeno sunt | ·xvii· faciemus. septenarioque ibi relicto, unitatem in | milleno cum quinario in senarium conpingemus. tandem de | senario tercia parte, id est binario, accepta, nichil | reliqui erit. qui ad singularem quartabitur ac differentias | multiplicabit, ita dicendo: bis ·iiii· ·viii·. eritque | octonarius in singulari et cum binario articulum | faciens unitatem ad decenum mittet. item bis ·v· | ·x· et articulum in centeno septenario iungentes || octonarium reddemus. item bis ·vi· ·xii·. binarium cum | octonario in centeno mittemus, unitatem ad mil|lenum transferemus, qui binarius cum octonario articu|lum faciet et unitatem ad millenum mittet. eritque | peracta diuisione in milleno binarius et in deceno u|nitas atque in denominationibus in centeno unitas, | in deceno et singulari quinarii singuli. Ecquidem si, primo | diuidendo ad diuisoris sedem perducto, pars solita | accipi non poterit, tunc remotis differentiis de diuidend|o diuisorem more aureę accipere licebit et per de|nominationem primi diuisoris de residua summa | reliquos auferre diuisores, quod si primus diuisor in primo | diuidendo denominari poterit, sed non erit quicquam | reliqui, de quo alii diuisores possint remoueri, tunc qui|cquid remanserit, tamquam indiuisibile ad minuta res|eruabitur. hoc autem in hac diuisione contingit. sub | primo enim diuisore, cessante partium prouentu, | binarius inuentus est, in quo remotis differentiis primus di|uisor, id est binarius, semel denominari posset. sed | cum in solo deceno inferius unitas tantum reliqua sit,

[margin: f. 29v l. 1; l. 10; l. 20; f. 30r l. 1; l. 10; l. 20]

*) *sc. denominationes.*

| residui diuisores multo numerosiores nequaquam | possent de ea remoueri. quare tota illa summa, | quę cessantibus partibus, remansit, indiuisibilis | per integrum ad minutias reseruabitur. Comple|ta ergo diuisione, utrum bene processerimus, multipli|catione probare licebit. cumque per denominationes,

f. 30v l. 1 | id est per ·c·l·v·, diuisorum numerum duxerimus, aggreg||ata quę de diuidendis remansit indiuisibili summa, | numerum diuidendorum procul dubio ad integrum restitu|emus. Sane et intermissa cum differentiis easdem, quas in superioribus | ostendimus regulas habet, uidelicet ut ultimo diuisori inte|gra applicetur differentia, primo nulla, mediis uno minus inte|grę dentur differentię. atque insuper in uacantibus sedibus pro di|fferentiis nouenarii apponantur, qui cum aliis differentiis per sub|latam de diuidendis partem multiplicabuntur. et tum per pa|rtes diuisores multiplicando diuisionem pro-

l. 10 bare uolue|rimus, cum aliis differentiis remouebuntur atque ita diuisio | inoffenso pede procedet, sicut in hoc perspicuum erit | exemplo. Sint diuisores in deceno milleno ·ϭ·, in cen|teno ·Ч·, in singulari ·Ᵽ· atque ab eis diui|dendi ipso deceno milleno ·Ч·, in milleno ·Ᵽ·, in | centeno ·ɩγ· disponantur. ultimo itaque diuisori, | id est quaternario integram differentiam, scilicet senarium da|bimus, medio, uidelicet senario, uno minus integram, | id est ternarium apponemus. primus uero nullam, ut sępe dictum | est, habebit differentiam.

l. 20 in uacuis quoque locis, id est in dece|no et milleno singulos locabimus nouenarias, qui et ip|si, ut dictum est, differentiarum uice fungentur. quo fa|cto secundum insinuatam in superioribus rationem de primo | diuidendo senario terciam partem, id est binarium, tolle|mus nichilque remanebit. quę pars, quia de digito | sublata fuerat, toto loco inferius a diuidendo | sequestrabitur, quoto primus diuisor a primo distat arcu. atque | in singulari locabitur et

f. 31r l. 1 per eam differentię multiplicabuntur, || ita dicendo: bis ·vi· ·xii·. eritque binarius in singulari, unitas in deceno. item bis ·viiii· ·xviii· atque | octonarium in deceno cum unitate in nouenarium | conpingemus, unitate in centeno cum ternario iuncta | quaternarium faciemus. item bis ter ·vi·. senarium quidem | in centeno cum quaternario ponemus, qui quum ·x· completur, | unitatem pro articulo ad millenum propellemus, quę quaterna|rio apposita quinarium reddet. item bis ·viiii· ·xviii·|, poneturque octonarius in milleno

l. 10 et cum quinario ·xiii· perfici|et. ternarioque inibi remanente duę unitates in de|ceno milleno binarium facient. et quia binarius terciam pa|rtem non habet, diuisio per differentias ulterius non procedit, sed remo|tis differentiis diuisores diuidendis more aureę comparantur. | et binarius, qui in supposito sibi binario semel erit, nichilque | remanebit, unitate ad denominationes appo|sita, per eam reliqui diuisores de residua summa auferen|tur. et cum senarium, qui in centeno est, de ternario qui in milleno | sedet, semel abstulerimus, remanebit in ipso milleno | binarius et in centeno quaternarius.

porro quaternarium, qui in | siugulari est, de subiectis sibi ·xcii· semel aufe- l. 20
remus, remanebuntque ·lxxx·viii·, octonario in deceno et | nichilominus
octonario in singulari posito, ut sit | in abaco dispositio talis.

Cꝏ	Xꝏ	ꝏ	C	X	I
	τ		ꟼ		℞
		τ	℞	8	8
					ꝁ

Quia ergo, quę de multiplicatione | scitu digna uidebantur, quanta potuimus | breuitate collegimus, necnon et diui|sionum regulas et sine differentiis et per differentias exsequen||darum, tam simplicium quam compositarum, con- f. 31v l. 1 tinuarum | siue intermissarum, quamdiu per integros numeros expleri | possunt, domino opitulante, usque ad finem perduximus | et licet affectata breuitate in re tam incogni|ta non paucis uerbis, quod sentiebamus, explicare potu|imus, superest, ut ·libelluli huius hic distinctionem facientes, | quę de unciarum et minutiarum sectione necessaria sunt, | in alio libello tractanda reseruemus.

Quum in pręmissa presentis opusculi distinctione de | numerorum multi- l. 10 plicatione seu diuisione, quę | memorię nostrę occurrere potuerint, quanta bre|uitate potuimus, sufficienter tractauimus, restat ut | de unciarum et minutiarum diuisionibus aliquid dicere ag|grediamur. hoc autem in huius modi negotio attendendum est, | ne forte cuipiam uideatur, cum eo usque processum fuerit, | ut de talium rerum subtili indagine sermo oriatur, | indiuisibiles natura unitates partium suscipere posse | sectionem. Neque enim, sicut et alibi nos iam dixisse recoli|mus, id quod omni rationi contrarium est, quod omni auctori|tati repugnat, conamur astruere, ut quod natura | indiuisibile l. 20 est, aliquo humanę industrię artificio | in diuisionem cadere possit. Uerum quotiens aliquid | tale molimur, non ipsas unitates, sed tamquam aliqua | una corpora partienda suscipimus, partesque ip|sas ad ingenii nostri exercitium a metallorum | ponderibus mutuamur. Nam et apud philosophos, || licet crebro f. 32r l. 1 multa de numerorum rationibus disputata sint, | ad hoc tum fere totum spectabat negotium, ut nume|ralia, quę infinitate sui captum humanę mentis | eludebant, inspecta numerorum habitudine facilius in | notitiam cadant. Siquidem et aremetica, quę totius | quadriuii princeps purius quam ceterę

circa numerorum | uersatur indaginem et ipsa huic dispensationi seruire | uidetur, dum docet, musicarum sinphoniarum modos rela|ta numerorum quanti-
l. 10 tate reperire, geometricarum figu|rarum formas numerorum ratione perscribere, erraticorum | siderum ortus et obitus, uagosque per zodiacum discursus, | stationesque ac retrogradationes, quę omnia astronomicę spe|culationis sunt, accomodato et certo perscripti temporis nu|mero ad humanam notitiam deriuare. Non ergo mi|rum cuiquam uideri debet, si et hic, dum de numerorum mul|tiplicatione seu diuisione tractamus, numeralium nos | inspectio in potissimum seruire dicamus. Itaque dum ad | numeralium discussionem de numerorum diuisione sermo et | ubi eo usque diuidendo processerimus, ut numeros per
l. 20 inte|grum patiri non possumus, tunc, habito numeralium | respectu, tamquam corpora distribuere accomodatis par|tibus molliemur et secundum pręmonstratos in superiore tracta|tu modos diuisiones nostras usque ad finem perducemus. | Restat igitur, ut ipsarum ordinem partium in ponde|ribus mutuarum earumque continentias dicere ingrediamur, | quo inspectu qualiter dissi-
f. 32v l. 1 pari et redintegrari debeant, || plane liquere possit. Sane ęrea libra assis nomine | antiquitus appellata tali inscribitur figura ·+·. ea medi|etatem habet, quę semis dicta hac figura notatur ·S·, habet tertiam | ·SS·, habet quartam ·S·, habet sextam sextantem ·S·, octauam ·S·, ·XII^{mam}· | unciam, quę duplici modo inscribitur ·Ͱ· uel ·é·. Ne autem omnes par|tes totam assis quantitatem perequum distribuant, est et alia | eiusdem assis per inequales partes diuisio, ut in deuncem ·SSS· et | unciam ·Ͱ· deunx enim ·XI· uncias continens exdempta uncia | compositum nomen accepit, adiectaque sibi uncia
l. 10 ad assis inte|gritatem reducitur. Item in dextantem ·SSS· et sextantem ·S·, qui | ·X· continens uncias exdempto sextante composito nomine nuncupa|tur. Item in dodrantem ·SS· et quadrantem ·S·, qui dodrans nouem un|cias habens exdempto quadrante compositum traxit uocabulum. | Item in bissem ·SS· et trientem ·SS·. Bisse autem unde nomen acceperit, | nusquam adhuc scriptum reperi. Item in septuncem ·S· et quincuncem | ·SS·, quorum alter a septem, alter a quinque unciis nomen accepit. | Hę ergo partes, quę uel pari uel dispari quantitate assem compo|nunt, sic in ordine digeri possunt ·SSS·SSS· ·SS·SS·S· | ·S·SS·SS·S·S·S·Ͱ·. quarum quidem semisses trientes quadrantes
l. 20 | sextantes sescuntię uncię pari quantitate, ut dictum est, | totum diuidunt et redintegrant. at uncia cum deun|ce, sextans cum dextante, quadrans cum dodrante, triens cum | bisse, quincunx cum septunce dispari partium connexu | totum componunt et diuidunt. Et hoc est assis per uncias diuisio. | Porro uncia ·Ͱ· medietatem habet semuntiam ·Σ·, terciam | partem duellam ·υυ·, quartam sicilicum ·ͻ·, sextam sextulam | ·υ·, octauam dragmam ·ͻ|c·, duo-
f. 33r l. 1 decumam hemisesclam || ·ψ·, octauam decimam tremissem (·H·), uicesimam quartam | scripulum ·ℌ·, quę omnes coęquęue partes pari quanti|tate totum

suum distribuunt et reparant. habet enim uncia semuncias duas, duellas tres, sicilicos ·IIII[or]·, | sextulas ·VI·, dragmas ·VIII·, hemisesclas ·XII·, | tremisses ·XVIII·, scripulos ·XXIIII· et est earum dispo|sicio talis · Ƨ·Σ·UU·Ɔ·U· ·Ɔ|C·ψ·H·ℌ·. Sed et scripu|lus habet medietatem obolum ·⊢·, tertiam partem bisili|quam ·M·, quartam zeratem ·Z·, sextam siliquam ·H·, oc|tauam calcum ·C|Ꝺ· habet enim scripulus obolos ·II·, | bissilicas tres, zerates ·IIII[or]·, siliquas ·VI·, calcos | ·VIII·. Hanc autem partium sectionem tertio*) limite | distinctam, uidelicet ab asse ad unciam, ab u|ncia ad scripulum, a scripulo usque ad finalem ca|lcum uno si placet ordine contexere possumus, ita. | ·✝· ·SSS·SSS·SS·SS·S·S·SS·SS·S·S·S·Ƨ·Σ· | ·UU·Ɔ·U·Ɔ|C·ψ·H·ℌ·⊢·M·Z·H·C|Ꝺ. | ut simul figurę ·XXVII·. Hanc autem summularum | distributionem ad maiorem rei euidentiam terno quidem | limite distinximus, non tam ignorantes, partes | partium contra rationem et totius partes et appellari | et esse. His ita de partium continentiis breuiter pręli|batis secundum pręmonstratos in superiore tractatu | diuidendi modos, quę per integrum indiuisibilia | erunt, per ipsos dissipare ingrediamur. primoque ad sim|plicem auream diuisionem reuertamur, indeque per sing||ulos alios diuidendi modos pedetentim procedamus. | et quia hic diuisionis modus facillime ac sine inpe|dimento transigitur, ubi cito numero diuisorum partium | numerositas par inuenitur, ut hiis, quę difficiliora | sunt, expeditis, ea, quę nichil ambiguitatis habent, | sine omni possint labore consummari. Et quidem in to|ta dispositarum serie summularum nullam quinariam | reperimus partium, seu septenariam diuisionem. exemp|lificemus, et primum quinarium diuisorem in singulari | ponemus, cui diuidendum ternarium subiciamus. In hoc | autem genere hoc attendendum erit, ut si numeri quanti|tas patitur, par diuisorum numero partium quantitas | efficiatur. quod si diuisoris numeri natura repugnauerit, | diuidendam summam tali moderamine dissipabimus, | ut diuisore numero partium pluralitas paulo maior | inueniatur atque in illo partium numero diuisor semel | denominabitur. et quod super habundauerit, ibidem in | minora diuidendum reseruabitur. pro denominatione | uero in unitatem scilicet unam de particulis, in quas sum|mam diuisimus, inferius collocabimus. et sic denuo | ad illam, quę remansit, partem diuidendam procedemus. | Si quidem huius, quem posuimus, numeri, uidelicet quinarii | natura non patitur, ut aliqua summa in ęquales illi pa|rtes possit dissipari, ternarium itaque, quem diuiden|dum posuimus, tamquam tres asses in ·VI· semisses, istos | tres asses in ·VI· semisses diuidemus. qui numerus par||tium quinarium diuisorem proximo transgreditur loco, | atque ita quinarium in sex semissibus semel de|nominabimus, remanebitque unus. quo | in eodem relicto, semissem unum pro denomina-

[Margin: l. 10; l. 20; f. 33v l. 1; l. 10; l. 20; f. 34r l. 1]

*) *leg.* terno.

|tione in singulari inferius ponemus. dehinc | semissem, qui superius remansit, in ·vi· uncias | distribuemus, remanebitque inibi uncia. secundum | denomi-
l. 10 nationem unciam unam | inferius locabimus cum semisse, | quem ibi ante posueramus. | remanentem rursus unciam | in ·vi· sextulas partiremur, | sextulaque secundum prędictam rationem | ad denominationes posita, aliam itidem | sextulam, quia in ·vi· partes non possumus, in ·viii· | obolos secabimus. cumque pro quinarii ratione obolum | unum ad denominationes posuerimus, tres, qui reman|serint, in ·vi· zerates diminuemus, e quibus uno
l. 20 re|manente unum nichilominus ad denominationes | ponemus. qui uero remanserit zeràtes indiuisibilis | reputabitur, quia dualem tantummodo in calcos potest habere | diuisionem. Erunt ergo peracta diuisione in denomi|nationibus semis et uncia, qui septuncem faciunt, sex|tula obolus zerates. quas per diuisorem multiplica|bimus, ut summam redintegrare possimus, a minoribus
f. 34v l. 1 inci|piendo hoc modo: quinquies zerates scripulus et zerates, || qui cum zerate, qui remanserat, aggregati scripulum et obo|lum reddunt. item quinquies obolus hemisescla et obolus, | qui simul cum scripulo et obolo iuncti sextulam redin|tegrabunt. item quinquies sextula semuncia et due|lla, quibuscum superiorem sextulam si adiecerimus, unciam | procul dubio conpingemus. item quinquies septunx duo | asses et deunx, quibus uncia opposita tres asses, quos | ad diuidendum posueramus, ad plenum reparabimus. Per | sep-
l. 10 tenarium quoque diuidendum hic nobis sit exemplum. Po|natur in deceno septenarius diuisor atque sub | eo ·xxvii· diuidendi, binario in deceno, septe|nario in singulari posito. quia ergo as septena|riam, ut supra diximus, non recipit sectionem, duos | asses, quos in deceno sub septenario habemus, in ·viii· | quadrantes diuidemus, indeque unum pro ratione septenarii ad denominationem ponemus. unumque nichil|ominus quadrantem in eodem loco relinquemus. deinde de | septenario, quem singulari habemus, ·x· bisses et
l. 20 trientem | faciemus, bisseque in deceno posito, septenarium in | ipso bisse et quadrante, qui ·vii· sescuncias et semunciam re|ddunt, denominabimus. atque ita sescuncia in sing|ulari ad denominationem posita, semunciam in eodem | loco relinquemus. exhinc de triente, qui in singulari est, du|ellas duodecim faciemus, duellaque in deceno cum semu|ncia apposita, in singulari semunciam et sextulam | relinquemus. sed et de semuncia et sextula, quę simul
f. 35r l. 1 || scripulos ·xvi· reddunt, scripulum ad decenum transferemus, | sicilicum, qui ·vi· continet scripulos, in singulari relinque|mus. eruntque in deceno sub septenario diuisore ·Σ· | ·ᴜᴜ·ʃʃ·, quę omnia dragmas ·vii· explent. itaque | cum per diuisoris denominationem dragmam unam ad | singularem transposuerimus, cum solus sicilicus inibi in sin|gulari residuus sit, qui et ad indiuisibiles calcos | perductus septuagenariam nullatenus recipit diuisionem,
l. 10 | diuisionem ad finem perductam cognoscemus. habebimusque in | partibus

·Ɛ·Ƨ·ↄ|c·, atque inibi indiuisibilis, ut supra | dictum est, remaneat sicilicus. Tunc ad probandam diuisionem | per diuisorem partes multiplicabimus, a minimis in|cipiendo ita: septies ·ↄ|c···£·υυ·ʄ·. item septies | semuncia ·Ɛ·£·. item septies triens ·ɪɪº· asses et ·ƐƧ·. | itaque trientem et quadrantem et semuncias duas in bissem compi|ngemus, indeque tam bissem quam duellam et scripulum ad | singularem reducemus, ut, quem habuimus, septenarium | recuperare possimus. Scire autem debemus, quod unaquęque | partium, quas in deceno habemus, decuplum suę | quantitatis ibidem faciat, sicut et superius de numeris docuimus, | cum omnes carecteres in deceno decuplum suę quantita|tis significare dicebamus. Sed ibi carecteres et ipsi numeros significantes, pro ratione sedium abaci suę quantitatis | capiebant augmentum. Hic autem particulę | nullum prius numerum exprimentes et superiorum sedium | ratione decuplum sui capient augmentum et sic || ad inferiores reducentur sedes. Cum enim scripulus in dece|no decuplum suę quantitatis efficiat, decies autem scri|pulus duella sit et hemisescla et singulari duellam et he|misesclam posuerimus, idem erit, qnod in deceno per scripulum | significabatur. item duella in deceno suam decuplat qua|ntitatem. decies autem duella quadrans est et duella. si | ergo quadrantem et duellam in singulari posuerimus, idem | habebimus, quod per ipsam duellam in deceno habebamus. | porro decies bisse ·vɪ· asses sunt et bisse, quę omnia, cum singu|lari posuerimus, erunt in simul ·vɪ· asses, ·ƧƧ·Ɛ·. duę due|llę, sicilicus et hemisescla unciam faciunt, quę quadranti | et bisse coniuncta in assem surgit. fiuntque ·vɪɪ· quos | cum ·xx· habuimus diuidendos. Ac per hoc plane cognos|cimus, quia bene diuidendo processimus. Similiter et in ali|is diuisionibus agendum erit, ut de superioribus sedibus ad | inferiores secundum eam quam diximus rationem transferantur pa|rtes, quę in superioribus locis in asses reintegrari non po|terunt. Per compositos quoque diuisores in hoc diuisionis genere | per uncias et minutias ad finem usque perducere poteri|mus, si quę per integros numeros non poterunt terminari. Cuius | rei sit exemplum tale. sint diuisores dispositi ·d|lxɪɪɪɪ·, eritque in centeno ·ч , in deceno ·ꟼ·, in | singulari ·ɼ·, eisque ·clvɪɪɪ· diuidendi supponan|tur, ut sit in centeno ·I·, in deceno ·ч·, in singulari | ·8·. itaque, sicut in composita aurea docuimus, per primum | diuisorem partem accipiemus, quam eandem partem per || persequentium diuisorum.*) in centeno quinarius est. huius suppositum | sibi assem diuidendum [qui], ut maiorem possit accipere pa|rtem, de quinque assibus, qui in deceno sunt, ·x· semisses facie|mus et semissem cum asse in centeno ponemus. atque id totum, | quia quinarium, ut supra diximus, in asse non inueniemus, secti|one scilicet in senariam particionem seca-

l. 20 — f. 35v l. 1 — l. 10 — l. 20 — f. 36r l. 1

*) *desiderantur nonnulla.*

bimus, ut assem et semis|sem in ·VI· quadrantes diuidamus. sicque per quinarii deno|minationem quadrantem ad singularem transferemus, remanente
l. 10 ibidem | quadrante. deinde senarium diuisorem, quem in deceno habemus, | cum sub se nichil habeat, unde remoueri possit, de | ·X· quadrantibus, qui in centeno sunt, auferemus, per numerum quidem | eius partis, quam primus accepit diuisor, de residuo remouen|do. Ita ablatis ·VI· quadrantibus de ·X·, remanent ·IIII· | quadrantes, id est as. ipsum assem in deceno sub senario po|nemus. per quaternarium quoque diuisorem, qui in singulari est, | quadrantem de sibi suppositis octo assibus auferemus. et, | quia quater quadrans assem facit, cum assem unum de ·VIII· sub|traxerimus, remanebunt
l. 20 ·VII·. ipsos autem ·VII· asses in ·X· | bisses et trientem diuidemus, remanenteque ibi triente, | bissem cum asse in deceno locabimus. indeque de asse et | bisse ·X· sextantes faciemus atque in centeno sextantem | unum ponemus. quo facto ipsum sextantem in ·VI· par|tes distribuemus, quum ipse sextans duas continet | uncias, quarum singulę ternis constant duellis, atque ita ·VI· | duellę in sextante continentur. cumque, una ibidem rema-
f. 36v l. 1 nente duella, secundum primi diuisoris denominationem du|ellam ad singularem transposuerimus, per sequentem diuisorem de | ·X· duellis sexies duellam auferemus, remanebuntque ·IIII· | id est uncia et duella in denario limite transponendę. | indeque per quaternarium quater duellam de sibi supposito triente | auferemus, remanebuntque ibi ·Ꝫ·Ꝟ·υ·. de sextante | uero et semuncia ·X· sicilicos facientes, remanente ibidem | sola sextula, sicilicum in deceno cum uncia et due|lla statuemus. et quia uncia et sicilicus ·X· drag-
l. 10 mas | reddunt, remanente inibi duella, dragmam ad | centenum transferemus. quę, quod ·VI· reddit obolos, unum | ad partes transponemus et alium in eodem loco relinque|mus. postea de subiecta senario diuisori duella sex obo|los auferentes scripulum et sextulam illic habebimus, atque | de subiacente quaternario diuisori sextula quater obolo | sublato remanebit ibidem ·ψ·. tunc de sextula et scri|pulo, qui nobis in deceno remanserunt, ·X· obolos facie|mus et obolum unum, qui uice articuli ·X· obolos expleat, | ad centenum
l. 20 mittemus. eruntque ibi oboli duo, qui scri|pulum faciunt. scripulus autem ·VI· siliquas habet. siliquam ergo | ibidem relinquentes, alteram siliquam ad partes ponemus et | de ea, quę remansit, tamquam de ·X· siliquis persequentem | diuisorem sexcies siliquam auferentes, obolum et siliquam pro | ·IIII· siliquis in deceno ponemus. et per quaternarium diuisorem | de subiecta sibi hemisescula quater siliqua remota, tremi|ssem ibidem habebimus. erunt-
f. 37r l. 1 que peracta diuisione reliqui in || deceno ·⊦̇ H̦̦· in singulari ·H·. In partibus uero ·Ꝫ·υυ·⊦̇·H̦̦·. | Ad probandam itaque diuisionem per diuisores partes multi|plicabimus, ut reformata ad integrum summa nos | bene diuisisse liquido cognoscamus. ac per quaternarium quidem, qui in | singulari est, omnes

particulas primum metiemur ita. quater | siliqua obolus et siliqua, qui in singulari cum tremisse, qui ibi | remanserat, positi hemisesclam explent. item quater obolus | hemisescla. erunt hemisesclę duę, quę iunctę sextu|lam complebunt. item quater duella uncia et duella, quibus si sextulam | aggre- l. 10 gaueris, sescuncię summam surgere uidebis. item quater | quadrans as. habebisque in singulari assem et sescunciam. | quo expleto per senarium, qui in deceno est, itidem omnes parti|culas multiplicabis, ita dicendo: sexcies siliqua scripulus. | item sexcies obolus dragma. porro scripulus et dragma | in sextulam surgunt. item sexcies duella sextans, sex|cies quadrans as et semis. semissem et sextantem in bissem | compinges, habebisque inibi ·+·SS·U·F·Ḥ·. hoc peracto | per quinarium in centeno limite easdem particulas duces | hoc modo: quinquies siliqua obolus et bisiliqua. quinquies obolus he|misescla et l. 20 obolus. quinquies duella sescuncia et sextula. | quinquies quadrans as et quadrans. de quadrante et sescuncia | trientem et semunciam facies, de hemisescla et sextu|la sicilicum, de duobus obolis et bisiliqua tremissem. | quę partes, quia in assem non surgunt, decuplo auctę | in posteriorem arcum, uidelicet decenum transponendę | sunt, sicut supra ostendimus, hoc modo: decies ·H· [tremissis] ·Σ· || et ·H·. tremissis cum obolo et siliqua f. 37v l. 1 hemisesclam faciet, quę | sextula iuncta sicilicum complebit. eruntque ibi cum asse | bisse semuncia et sicilicus. porro decies sicilicus sextans | et semuncia. decies semuncia quincunx. decies tri|ens tres asses et triens. duas semuncias in unciam compi|nges, quę sextanti iuncta quadrantem faciet. eruntque ibi | bisse quincunx triens quadrans et sicilicus cum assibus ·IIII^or·. bisse et triens assem facient, quincunx et quadrans in bis|sem surgent, remanentibusque ibidem quinque assibus bissem | et sicilicum per decuplum l. 10 ad singularem reducere necesse | erit, ita dicendo: decies sicilicus sextans et semu|ncia. semuncia itaque cum sescuncia, quam ibi habebis, | iuncta habebis sextantes duos, qui trientem facient. ite|rum decies bisse ·VI· asses et bisse. quo facto, cum bissem | et trientem in assem compigeris, ·VIII· asses in singulari | habebis. et quia centum quinquaginta ·VIII· multiplicando | redintegrasti, te diuidendo bene processisse certo cognosces | experimento. |

Minor quam octaua decima, maior quam noua decima, | quę magis pro- l. 20 ximat octauę decimę maius semitonium, quę minus semitonium minus.

(explicit.)

DAS QUADRIPARTITUM

DES

IOANNES DE MURIS

UND DAS

PRAKTISCHE RECHNEN IM VIERZEHNTEN JAHRHUNDERT.

VON

DR. ALFRED NAGL.

Die Aufnahme und erste Verbreitung der indisch-arabischen Arithmetik im christlichen Abendlande fällt in die erste Hälfte des zwölften Jahrhunderts. Ihre graphischen Ausdrucksmittel entsprechen der Natur der concreten Zahlengrösse am genauesten und in der denkbar einfachsten Weise, ein Vorzug, der zum erstenmale geeignet schien, der Praxis ein wirklich schriftliches Rechnen in fruchtbringender Weise zu vermitteln. Ein solches hatte zwar seit dem dritten vorchristlichen Jahrhunderte unter den griechischen Stämmen allgemeine Aufnahme gefunden (griechische Alphabetzahlen), allein seine inneren Mängel verrathen sich in dem Umstande, dass diese Rechenweise von den Römern, trotz deren Abhängigkeit von der mathematischen Theorie der Griechen, nicht mit aufgenommen worden ist.

Die nächste Folge jener Annahme der indisch-arabischen Arithmetik im Abendlande war nun die alsbaldige Verdrängung der von Gerbert und seiner Schule wieder aufgenommenen Methode, welche die an sich wohl treffliche Idee zum Ausgange hatte, die früher zeichenlosen Rechensteine mit den Zahlzeichen der neun Einheiten zu versehen und so auf den Columnen des Abacus zu verwenden. Aber diese Methode, welche zweifellos lange vor Gerbert (Papst Sylvester II., † 1003) im Abendlande gehandhabt worden, war ob ihrer Schwerfälligkeit für die Praxis des Alltagslebens ungeeignet, sie war reine Schulgelehrsamkeit geblieben. Ihre schnelle Verdrängung durch die indische Arithmetik kann also nicht Wunder nehmen.

Aber auch die letztere fand im Abendlande ein mächtiges Hinderniss ihrer Verbreitung vor. Es war gerade in ihrem eigentlichen Vorzuge, der Schriftlichkeit, gelegen. Die ungemeine Schwierigkeit, welche die germanischen Völker bei der Aneignung des Schriftwesens empfanden, hielt auch die neue Methode in Frankreich, England und Deutschland, wo sie unter dem Namen Algorismus fortdauernd in völlig unveränderter Form gelehrt wurde, einstweilen in den Kreisen der Schulgelehrsamkeit zurück. Andere zufällige Hindernisse verlangsamten selbst die Verbreitung der Zahlzeichen. Sogar in Italien, wo der mächtig aufstrebende Handels- und Bankverkehr ein lebhaftes Interesse an der neuen Zahlenmethode nahm, ward vorläufig durch das Werk des Leonardo Pisano, den Liber Abaci von 1202, nur eine

Methode erzielt, in welcher das antike Fingerrechnen noch immer eine grosse Rolle behielt. Unter solchen Umständen kann es nicht überraschen, dass wir gerade in jenen Zeiten den Abacus mit dem unbezeichneten Rechenstein, jetzt das „Rechenbrett" (table) mit dem „Rechenpfennig" (jeton), eine allgemeine Verbreitung annehmen sehen (dreizehntes Jahrhundert, zunächst in Frankreich und den Niederlanden), so zwar, dass er in dieser neuen Form zur eigentlichen Signatur des praktischen Rechenwesens diesseits der Alpen wird.

Aber die gewaltige Handelsbewegung, welche namentlich mit dem dreizehnten Jahrhundert ihrer Blüthe entgegengeht, verlangt auf diesem Felde dringend nach Verbesserungen und wir dürfen annehmen, dass in den hierauf gerichteten Versuchen Elemente aus allen bis dahin üblich gewordenen Methoden zur Erscheinung gekommen sind. Es ist interessant, dies an einem besonderen Falle zu beobachten, umsomehr als die Quellen hierfür, wie überhaupt für jene Uebergangszeit in unserem Gegenstande, das vierzehnte Jahrhundert, sehr spärlich und vereinzelt fliessen. Das Unfertige der Methoden mochte wohl von einer theoretischen Behandlung derselben zurückgehalten haben und das Streben richtete sich vorläufig zunächst auf verwendbare Neubildungen für das praktische Leben.

Dies sind die Ergebnisse, welche ich aus dem bisher leider nicht veröffentlichten Quadripartitum des Johannes de Muris nach einer anonymen Handschrift der Wiener Hofbibliothek (no. 4770) aus dem 14. Jahrhunderte, also der Abfassung sehr nahe liegend, entnehme.*) Vier Capitel aus dem prosaischen Theile, deren Text unten theilweise veröffentlicht ist, die einzigen Stellen des Werkes, welche sich mit der praktisch operativen Arithmetik befassen, zeigen in besonders lehrreicher Weise die Bemühungen der damaligen Zeit, aus den wissenschaftlichen Ergebnissen der vorangegangenen Systeme für die Praxis des Alltagslebens eine brauchbare Methode zu gewinnen. Wir sehen hierbei eine höchst originelle Vereinigung des antiken Columnen-Abacus mit dem zeichenlosen Rechensteine und des mittelalterlichen (Gerbert'schen) mit dem Zahlzeichen versehenen Rechensteines zum Vorscheine kommen, in der Weise, dass das Zahlzeichen hier von dem Rechensteine auf den Abacus selber übergegangen ist. Es sind die zwei Capitel 11 und 14 des zweiten Buches des prosaischen Theiles, die hier den Gegenstand unserer Veröffentlichung und näheren Betrachtung bilden.

---

*) Dieselbe Bibliothek besitzt auch eine zweite, ebenfalls anonyme und viel jüngere Handschrift (no. 10954, 15. Jahrhundert) des Quadripartitum (des Prosatheiles). Es ist das Verdienst des Custos Herrn Dr. Alfred Göldlin von Tiefenau, die Identität dieser Schrift mit dem Werke des Jean de Meurs nach den Pariser Handschriften no. 7190 und 7191 des 16. Jahrhunderts festgestellt zu haben.

Wir schicken voraus, dass der Verfasser Jean de Murs, auch de Meurs, latinisiert de Muris*), in der Normandie geboren wurde und noch im Jahre 1345 (wohl noch 1351) als Doctor der Sorbonne und Canonicus zu Paris lebte. Von ihm sind folgende Werke vorhanden:

a) ein „tractatus Canonum minutiarum philosophicarum et vulgarium quem composuit mag. Iohannes de Muris Normannus a. MCCCXXI“ (M. S. Oxford, Bodl. Digby);

b) das Speculum musicae vom Jahre 1321 (M. S. Paris Bibl. nat. 7027, 7207);

c) Arithmetica communis ex Boethii Arithmetica compendiose excerpta, gedruckt in Georg Tannstetter's Sammelwerk, Wien 1515 (Johann Singriener); endlich

d) Das Quadripartitum rimatum mit den vier Büchern des prosaischen Textes.

Die Identität der anonymen Wiener Handschriften mit denen zu Paris ist schon durch die zu Anfang des metrischen Theiles vorkommende Widmung des Verfassers die „epistola Iohannis ad Philippum“**) festgestellt. Der prosaische Theil wird eingeleitet mit den Worten: Finit quarta pars quadripartiti numerorum metrice conscripti. Incipit prosa quartę partis.

Um nun zu dem Inhalte der bezeichneten zwei Capitel zu kommen, so finden wir im ersteren, dem 11.***), unter dem Titel: „Theoremata multiplicationis“ zuvörderst eine praktische Erleichterungsregel für das Multiplicieren ganzer Zahlen (nur von solchen handeln überhaupt die beiden Capitel) im Kopfe vermittelst Zerlegen der beiden Factoren in mehrere kleinere Factoren. Wichtiger ist aber die nun folgende Auseinandersetzung, welche als „ars multiplicandi per notas limitum“ bezeichnet wird. Der Autor bezieht sich hierfür auf ein Schema, dessen Construction mit den alten Problemen der Stellenbestimmung zusammenhängt. Es soll nämlich in der Multiplication zweier mehrstelliger Zahlen aus der Ziffernreihe links vom Striche (s. flgde. S.) die Stellenanzahl beider Faktoren festgehalten und aus der Stellenbenennung rechts vom Striche die Potenz des Productes für den wörtlichen Ausdruck

---

*) Vgl. Michaud, Biographie universelle XXXVI col. 1012 s.; F. J. Fetis, Biogr. univ. des musiciens VI pag. 265 s.

**) Philippe de Vitry, Bischof zu Meaux von 1351 an, gestorben 9. Juni 1362 nach Gams, Series episc. Es ist wahrscheinlich, dass die Widmung des Quadripartitum aus einer Zeit stammt, wo Philipp den Bischofsstuhl bereits inne hatte.

***) Die Wiener Handschrift des 14. Jahrhunderts bedient sich überall, auch in den Ueberschriften u. dgl. zumeist schon der Zahlzeichen in jenen Formen, wie sie in den abendländischen Algorismus- und Computus-Tractaten seit dem 12. Jahrhunderte üblich sind: ı, 2, 3, ꝶ, ч, 6, ʌ, 8, 9, o.

oder die Niederschrift bestimmt werden. Die Regel hierfür leitet Johannes mit dem Satz ein, dass die erste Stelle zu der zweiten sich in derselben Proportion befinde, wie die zweite zur dritten u. s. w. Enthält schon diese Stelle eine auffallende Rückerinnerung an das ἀνάλογον εἶναι im Arenarius des Archimedes, so werden wir noch mehr überrascht durch den Umstand, dass wir daselbst die von Archimedes gelehrte Stellenregel für die Multiplication, nämlich durch Addition der Stellenanzahl beider Factoren und Verminderung der Summe um die Zahl Eins, um die Stellen des Productes zu bestimmen, bei Johannes in unveränderter Formulierung und Anwendung wieder finden, nachdem sie seit dem Arenarius in der Geschichte der Arithmetik eigentlich verschollen war. Bei Johannes ist dieselbe offenbar auf ein Rechnen ohne Abacus berechnet und da hierdurch das Festhalten des Productes durch sogleiches Einlegen der digiti, πυθμένες, und articuli, ἀνάλογοι, in die Columnen entfällt, so ist eben durch die Bezeichnungen rechts vom Striche des Schema's angegeben, welchem Wortausdrucke das Product für jede erreichte Stelle entspricht. Er löst also z. B. die Aufgabe, eine Hunderter- (3 Stellen) mit einer Tausender-Stelle (4 Stellen) zu multiplicieren, durch die Rechnung $3 + 4 - 1 = 6$ und findet nun beim limes 6 des Schema's, dass das Product (d. h. die Einer, digiti, desselben) ein 100 m d. i. ein hundertmal Tausender sein muss. Johannes fügt noch die Bemerkung bei, dass von Andern die Buchstaben des Alphabetes für die Bezeichnung der Stellen (ordines, limites, Zahlenreihe links vom Striche) verwendet werden. Das Hülfsmittel war also damals ein allgemeiner gangbares. Da unter dem Alphabete hier nur ein Zahlen-Alphabet verstanden sein kann, so wird man mit der Annahme kaum irren, dass diese ganze Einrichtung aus griechischer Quelle stammt und ihrerzeit im griechischen Rechnen mit Alphabetzahlen eine wesentliche Rolle gespielt hat. Denn etwas Aehnliches war hierbei in der That unentbehrlich.

1	1
2	10
3	100
4	m
5	10 m
6	100 m
7	m m
8	10 m m
9	100 m m
10	m m m
11	10 m m m
12	100 m m m
13	m m m m
14	10 m m m
15	100 m m m
16	m m m m m
17	10 m m m m m
18	100 m m m m m

Das andere, vierzehnte Capitel trägt die Ueberschrift: „De tabula Abaci subtilis computationis“. Johannes beschreibt zunächst diese „tabula numerorum, quam Abacus invenit“,*) in der nebenstehend versinnlichten Weise und lässt

*) Hier wird also die Sache zur Person, wie umgekehrt die Person des Alkharismi zum Gegenstande, Algorismus, geworden war. Das Wort Abacus ist also auch in der Ueberschrift des Capitels als Personennamen zu verstehen.

auch keinen Zweifel darüber, was dieser „Abacus" gewesen: durch Wiederholen derselben „caracteres" könne diese Tafel bis auf die von „Abacus" selbst gemachte Ausdehnung von 27 Stellen*) gebracht werden. Es ist bezeichnend für die mittelalterliche Wissenschaft, dass einem Gelehrten wie Johannes de Muris damals schon und trotz der deutlichen Anlehnung an die Abacistenschule die wahre Bedeutung des Wortes Abacus so sehr entgangen sein konnte.

9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9

Die Anwendung, welche Johannes von dieser Tabelle macht, ist nun durch die Numeration bezeichnet. Letztere geschieht, indem die einzelnen Ziffern einer Zahl durch Zudecken derselben Ziffern in den betreffenden „arcus" vermittelst eines zeichenlosen „calculus" markiert, also daselbst eigentlich unsichtbar gemacht werden. Johannes addiert also z. B. zwei Zahlen, indem er nach vorläufiger Darstellung der einen Zahl in der tabula in jeder Columne die Summierung der hinein gehörigen Zahlen durchführt und die erhaltenen Summen sogleich wieder durch Zudecken vermittelst eingelegter calculi markiert. Das Gesammtergebniss wird sodann festgestellt, indem der calculus in jeder Columne aufgehoben und die darunter befindliche Ziffer abgelesen wird. Für die Multiplication verweist der Autor auf die Mitwirkung seiner oben dargestellten ars multiplicandi nach Capitel 11, wobei die in den arcus eingestellten Ziffern den limites-Nummern links vom Striche des obigen Schema's entsprechen. Er beginnt die Operation mit den beiden höchsten Stellen. Im Dividieren, welches ohne jede Reminiscenz an die dekadischen Differenzen geschieht, überlässt er zunächst die Aufgabe, den richtigen höchsten Quotienten zu finden, ganz der Erfahrung des Rechners: „de quo nemo nisi tu te docere potest". Sehr merkwürdig ist nun aber wieder die Stellenregel für den Quotienten. Sie lautet, von dem besondern Fall des Beispieles im Texte abstrahiert: die Stellenanzahl des Divisors abzuziehen von derjenigen des Dividend und der Rest um die Zahl Eins zu vermehren (Johannes vermehrt sogleich vor der Subtraction die Stellenzahl des Dividend um Eins), — also wieder genau die

*) Ueber die Rolle dieser Stellenanzahl 27 in der Abacistenschule vgl. meine Abhandlung „Gerbert" in Wiener Sitz.-Ber. 116 (1888), 878. 880. 886 ff. 912.

Stellenregel des Archimedes in ihrer complementären Anwendung auf die Division, welche Anwendung bekanntlich im Arenarius selbst vermisst wird.

„Und auf diese Art," sagt Johannes zum Schlusse, „wirst du nun mit geringem Aufwande von zahlenmässiger Rechenkunst alle Rechnungen mit Wechslern und anderen Leuten in vorzüglicher Weise abmachen können." Hiermit ist die eminent praktische Absicht des Ganzen betont. Wir haben es hier wohl, nach den Worten des Autors zu urtheilen, mit der Erfindung eines Arithmetikers zu thun und zwar einer recht sinnreichen, zusammengesetzt aus Elementen der beiden Abacus-Methoden; denn die verdeckte Zahl der Tafel vertritt hier den „apex, caracter" der Gerbert'schen Schule und das Deckmittel ist der zeichenlose calculus des Linienrechnens. Wir erhalten hiermit zugleich einen interessanten Einblick in das damals fortdauernde Bemühen der Handelskreise nach einer praktisch tauglichen Rechenmethode.

Bibl. palat. Viennensis m. s. lat. no. 4770.

(Libri secundi)

Capitulum 11[m]. Theoremata multiplicacionis.

f. 205^v l. 16

| Si per subduplum numeri dati quemcunque numerum | extenderis, productum dupletur, idem | fiet quod si per duplum multiplicatio facta | fuisset, l. 20 ut si per subduplum de 6, quod est 3, 12 | multiplices, 36 exibunt; quo duplato ʌ2 | producuntur, quod idem est ac si per 6 12 ampliasses. | Si autem fueris operatus per subtriplum, tripletur | et per subquartum decuplum*), quadrupletur. Si per | subduplum numeri dati subduplum numeri | cuiuslibet augeatur, productum quadrupletur. | Si per subtriplum subtriplum, noncupletur. Si per subduplum subtriplum, sextupletur. | idem proueniet utrobique ac si totum per totum | duceretur. ut ter 6 et 12 satis ostendere possunt, (l. 30) || (f. 206^r l. 1) quod iste numerus, qui prouenit ex multiplicacione, denominacionem | parcium inter se docebit. Et nota quod aliqui volunt dare | artem multiplicandi per notas limitum, ut primi | limitis nota sit 1, secundi 2, tercii 3 etc. semper, | et cum post tres limites ponatur mille per notas, | prout scire ordinem et econtra ut mille quater | iterata sunt post 12 ordinem, qui prouenit ex 3 in ꝗ. | Sed nunc transeo, satis breuiter sumpto inicio ab | unitate. in tercio limite post, scilicet quarto, ponitur | mille, et postea in tercio post quartum, scilicet | in septimo bis iteratum, post in decimo ter iteratum | etc. per ternarium ambulando. et statim post mille

1	unum
2	decem
3	centum
ꝗ	mille
ч	10 milia
6	100 ∞
ʌ	∞ ∞
8	10 ∞ ∞
9	centum ∞ ∞
10	∞ ∞ ∞
11	decem ∞ ∞ ∞
12	centum ∞ ∞ ∞
13	∞ ∞ ∞ ∞
1ꝗ	decem ∞ ∞ ∞ ∞
1ч	centum ∞ ∞ ∞ ∞
16	∞ ∞ ∞ ∞ ∞
1ʌ	decem ∞ ∞ ∞ ∞ ∞
18	centum ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

l. 10

*) decuplum *deleatur*.

| simplex uel iteratum, ac si superponeretur unitas | pro mille, ponitur post 100 · 10.*) ut hic post ·I· unum, | Ջ mille, Λ mille milia, 10 o ō ō, 13 ō | ō ō ō, 16 ō ō ō ō ō ō**), 2 decem, ɥ decem | milia, 8 decem ō ō, decem***) ō ō ō, 1Ջ decem ō | ō ō ō, 1Λ decem ō ō ō ō ō, 6 centum ō, 9 | centum

l. 20 o ō, 12 centum ō ō ō, 1ɥ centum ō | ō ō, 18 centum ō ō ō ō ō. Cum ita sit quęramus, in qua proporcione | se habet primus ordo siue limes, qui est unorum, | ad secundum, qui est decenorum, sic secundus ad tercium | et tercius ad quartum et sic semper. Si igitur tercius | ordo multiplicet quartum, iunge notas simul, | qui sunt 3 · Ջ. et exit Λ, a quo deme unum et remanent 6. Dic ergo quod peruenit ordo sextus, | in quo ponitur centum milia. si vis scire | quid est in 10 ordine, diuide 10 per 3, possunt | ter et remanet 1. Dic ergo quod ibi est mille ter iteratum. | ita in aliis. Alii significant limites

f. 206v l. 1 per || literas alphabeti, sed non est vis. sufficiat hoc audisse.

(explicit capitulum.)

(Libri secundi)

f. 208r l. 1

Capitulum 1Ջm de tabula abaci subtilis conputationis.

Non est sub silencio transeundum de tabula numerorum, | quam abacus adinuenit, quam qui diligenter in|spexerit gaudebit eius animus operantis, cuius compositionem | breuiter te docebo. In primo limite a dextris dispone | 9 ordines angulorum ab unitate sumpto computacionis | inicio et superpone ·I· pro limitis titulo siue nota. | In secundo uero limite et tercio, quam-

l. 10 diu fuerit | expediens, eosdem caracteres iterans tabulam | potes extendere, quam extensionem fecit abacus, usque | ad 2Λ limites numerorum. Ego autem propter breuitatem in | 9 limitibus requieui et super quemlibet posui | suam notam, primo arcui scribens 1, secundo 2 et sic | usque ad 9 arcus continue se habentes et hij sufficiunt | michi pro declaratione doctrinę. tabula igitur | quadrata sic disposita per 9 in quolibet laterum | extensa sequitur eius utilitas et operacio per hunc modum. | Scito ergo quod quilibet arcus in decuplo superat | pręcedentem. Primo addi(c)tionem in ea non est diffi-

l. 20 cile | reperire. Propositis namque numeris addicionis, supra | figuras cuius-

---

*) *pro* 100 · 10 *lege* 10 · 100.

**) ō *deleatur.*

***) *ante vocabulum* decem *inseratur nota* 11.

libet numeri calculis situatis adde | singulam singulis, arcubus obseruatis, et productum |' signa per calculos atque lege. Econtrario de | subtractione agendum | est, sed de multiplicacione laudabilius opus erit.

| Numeris in multiplicacione datis ultimum multiplicantis | in singulas multiplicandi ducas et productum pone | suis arcubus iuxta notas ut in capitulo 11⁰ monstratum est, | figuris per calculos annotatis. Deinde secundam figuram, ‖ multiplicantis: et si qui fuerint plures multiplicandi | singulas du- f. 208ᵛ l. 1 cere debes et producta, scitis prius | suis arcubus, situare et peracta multiplicacione cal|culos abice et lege figuras et summam multipli|cacionis habebis. Esto exemplum. propone dies | anni qui sunt 36ч per 2Ջ multiplicandos, qui sunt | partes unius diei, ut numerus horarum tocius anni arti|ficialiter habeatur. Duco 2 in 3 scilicet ultimam | multiplicantis in ultimam multiplicandi et prouenit | 6 et quoniam secundus arcus tercium multiplicat iunctis | notis, l. 10 quę faciunt ч, unitateque dempta remanet | quartus arcus. Ponam ergo 6 in quarto limite | calculo mediante et inde tenebit sex milia | ista uice. Deinde duco iterum 2 in 6 et sunt | 12, cuius digitum, qui est 2, per regulam ante dictam | ponam in tercio limite articulum sinistrando | in eodem arcu ubi positus iam erat 6. tunc per | addicionem, cum sint in eodem limite, Λ exibunt | per unum calculum designati. Postea duco | 2 in ч et ueniunt l. 20 10, cuius cifra situabitur in | arcu secundo, articulo sinistrato, ubi duo nuper | ponebantur, quibus incorporatis solus calculus 3 | tenet. Iam ergo duos calculos habes Λ300 | denotantes. Sicut de ultima figura multi|plicantis in omnes multiplicandi iam operatus sum, | sic de alia id est prima multiplicantis, cum | plures modo non sint, in aliarum singulas | operabor. et cum fecero facienda horas anni | 8Λ60 non dubito prouenire aspectis calculis super | numeros situatis. Sic igitur sine tędio et labore ‖ potes multiplicare f. 209ʳ l. 1 quemlibet numerum per alium quantuscunque | fuerit et in breui. Sed de diuisione neminem | uidi promptum nisi sicut communiter operatur. In hac tantum | tabula te poteris exercere actibus iteratis. Exemplum | do tibi. proponantur 8Λ60 per 2Ջ diuidendi. sic age. | caracteribus ordinatis deme 2 de 8 et de Λ et | potes ter. de quo nemo nisi tu te docere potest. et | quoniam secundus ordo diuidit quartum, adde cum Ջ, | qui est maior, notam ·I· et exit ч, a quo deme minorem | notam, que est 2 et remanet 3. pone l. 10 ergo numerum quociens | scilicet 3 in tercio limite calculo conseruante. Deinde | multiplica 3, scilicet numerum quociens, per 2Ջ secundum regulam | tibi datam et exibunt Λ2 in suis limitibus | coaptatis, quibus demptis ab 8Λ60 remanent | 1ч60, quos iterum per 2Ջ diuide pari forma | et exibit numerus quociens 6 in secundo limite collo|candus. quod cum secundus ordo tercium diuidat, unitate | addicta 3, quę est nota maior, exit Ջ, a quo dempta | minore nota, quę est 2, remanent 2 pro nota limitis, | ubi debet senarius l. 20

collocari. et de diuidendo re|manent 120, quos iterum per 2ደ diuidas sicut prius | et numerus, quociens erit, ɥ in arcu primo notandus. | Inspectis igitur calculis exit numerus quociens, diuisione | facta, 36ɥ. Et hoc est quod uoluimus concludere | arte ista. Eis ergo peruigil abacista et per conti|nuum exercicium manus operantes per hanc prȩue|nient obloquentis. Addidi tantum sub tabulam | de solidis et denariis, sed tabula abaci de libris | superponatur
l. 30 et inde poteris cum aliis campsoribus | uel uulgaribus per excellentiam computare cum | pauco calculo numerorum.

(explicit capitulum.)

BEITRAG

ZUR

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

DR. E. WAPPLER.

Die Handschrift C 80 der Königl. öffentl. Bibliothek zu Dresden enthält auf dem ersten Vorsetzblatt folgende von Johann Widmann von Eger, dem früheren Besitzer derselben[1]), geschriebene Notiz:

Pythagoram Samium virum summe apud grecos auctoritatis scientiam numerorum (quam postea Appulegius Boetiusque romanus latinam fecerunt) invenisse sapientissimi veterum tradiderunt. Id enim discipline genus grauissimus philosophus in vita humana perutile et necessarium arbitratus est quod sepenumero accidat homines inter se res contrahere vendendo emendo mutuando creditum soluendo hac arte tolluntur errores. hac quid cuique debeatur facile ostenditur Quam ob rem numerorum disciplinam non modo oratori sed cuique in primis saltem literis erudito necessariam censet Quintilianus. Nam in causis illa frequentissime uersari solet in quibus actor circa summas trepidat. Et si digitorum incerto atque indecoro gestu computator dissentit iudicatur indoctus Sed quanquam partes omnes scientie que de numero tractat dignis laudibus sint ornande Illa tamen multis iure anteferri debet quam regulam falsi appellant: quoniam tanta illius est exellentia tanta commoditas ut Regulis Algobre exeptis in tota arithmetica que numeralis dici potest sine alicuius dubitatione teneat principatum Que uero ista sit et quomodo cognoscatur in sequentibus late clarius apparebit. Da mit dieser Notiz die Vorrede einer unter dem Titel: Regula Falsi apud Philozophantes Augmenti et Decrementi appellata. omnium Regulis Algobre demptis optima[2]) erschienenen anonymen Abhandlung bis auf zwei unbedeutende, in Note 2 ersichtliche Wortverschiedenheiten vollständig übereinstimmt, so dürfte die Annahme nicht ungerechtfertigt sein, dafs diese Abhandlung eine Arbeit Widmanns ist. In dieser Ansicht bestärkt mich der Umstand, dafs im erwähnten Dresdensis ein Stück sich findet, dessen Anfang grofse Ähnlichkeit mit dem der genannten Abhandlung hat. Zur Vergleichung setze ich die beiden Anfänge nebeneinander.

---

1) Vergl. mein Programm: Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. Zwickau 1887. S. 9—10.

2) Das Exemplar der hiesigen Ratsschulbibliothek hat die Signatur: XXIV, XI, 5 und besteht aus 20 Blättern. Die Vorrede dieses Exemplars endigt (Bl. 1'): Que vero ista sit et quo modo cognoscatur ex sequentibus luce clarius apparebit.

Codex C 80 (Bl. 9).

Sciendum de regula Nucleum que secundum philosophos regula dicitur augmentacionis et diminucionis proposito aliquo casu ex duobus numeris falsis invenire verum Examinatis enim hijs numeris secundum exigenciam casus tunc vterque aut excedit summam expressam aut vterque deficit aut vnus excedit et alter deficit Si vterque excedit vel vterque deficit idem est modus scilicet subtrahendo minorem excessus a maiori Residuum autem numerum ostendit diuisorem Multiplica igitur primum falsum per excessum secundi Et secundum numerum falsum per excessum primi subtrahendo minus productum a maiori Et quod remanserit diuide per diuisorem Itaque patebit numerus verus | Si vero vnus excedit et alter deficit tunc hos numeros excessus et defectus adde simul id est illud quo vnus excedit summam expressam et illud quo alter deficit ab illa summa adde simul et illud erit diuisor Post hoc multiplica vnum numerum falsum per excessum alterius Et alium numerum falsum per defectum alterius prioris addendis producta simul et hic erit numerus diuidendus | que diuide per diuisorem premissum Et patebit numerus verus qui fuit ignotus et quesitus.[1])

Regula Falsi (Bl. 2—2′).

Quanquam autem ipsa quam certi philozophantium non immerito Augmenti et Decrementi dicunt Falsi appellata sit Regula Quoniam ex duobus numeris falsis pro tanto quia ad placitum positi practicantis. Verus et quesitus elicitur numerus Augmenti vero et decrementi eadem dicta est Regula propterea quia numeri ex opere practicantis iuxta Regule preceptionem procreati. Primos ad placitum positos excedunt numeros: aut illis sunt minores Hinc Regula Augmenti et Decrementi dicta est Et secundum hoc etiam Regula tripartita est Quoniam propositis duobus numeris falsis examinatisque secundum casus propositi exigentiam tunc aut deficiat vterque vel excedat. Aut vnus illorum excedet et alter deficiet. Si primis duobus modis tunc minor excessus vel defectus a maiore subtrahatur numerus et relictum pro diuisore reseruatur numero. Quo facto cruciformis numerorum adinuicem fiat multiplicatio hoc modo. quilibet numerus ad placitum secundum tamen rei exigentiam positus seorsum in alterius ducatur mendatium. et facta multiplicatione. productum minus a maiore subtrahatur producto. et relictum si cum diuisore seruato diuisum fuerit. quociens ostendet quesitum et numerum verum. Si vero vnus deficiat et alter excedat addantur simul numeri scilicet excessus et defectus et aggregatum ipsum. vt supra pro diuisiore seruatur et iterum vt superius factum est cruciformis fiat

1) Hieran reihen sich unmittelbar ohne jeden Zwischenraum zwei Aufgaben mit Auflösungen.

multiplicatio. Ipsis itaque ad inuicem multiplicatis addantur simul producta. et aggregatum. reseruato diuisore diuisum. verum vt supra ostendit numerum et quesitum.

Den Hauptteil von der in Rede stehenden Abhandlung bilden 46 Beispiele; eins derselben lautet (Bl. 20—20′): ¶ Casus aliter procedens Est quedam linea perpendicularis vt 9 cadens super alteram extremitatem alterius linee vt 6. orthogonaliter. Prima igitur linea vt 9. scilicet sic fracta vt altera extremitate eius cadit supra reliquum alterius linee extremum vt .6. secum vnum faciens orthogonium et rectum angulum habentem Queritur ergo de quantitate maioris partis linee fracte que ypothemisa appellatur quantaque sit pars minor que cathetus dicitur Cum autem quadratum ypothemise in triangulo orthogonio equale sit duobus quadratis. basis scilicet et catheti pariter acceptis Quare ponatur maior pars linee fracte scilicet ypothemise vt 8 cuius quadratus est 64 a quo si quadratus basis scilicet .36. ablatus fuerit relinquitur quadratus catheti scilicet .28. qui tamen solum 1 esse debet quare .27. superfluunt Quare secundo ponatur ypothemisa vt .7. cuius quadratus est .49. a quo 36 quadratus scilicet basis si detractus fuerit .13. relinquuntur quadratus scilicet catheti qui tamen .4. est quare 9. superfluunt Quare sic ponatur ad formam.

8	plus	27	18
7	plus	9	

¶ Et procedatur secundum regulam et veniunt .$6\frac{1}{2}$. quantitas scilicet ypothemise erit ergo cathetus vt .$2\frac{1}{2}$ Quod sic ostenditur Quia si quadratus catheti. a quadrato numeri inuenti subtractus fuerit relinquitur quadratus basis et econuerso Et si ambo et basis et catheti simul addita fuerint quadrata erit aggregatum equale quadrato ypothenise quod fuit probandum.[1])

An die Notiz, welche anfängt: Pythagoram Samium virum summe apud grecos auctoritatis scientiam numerorum (quam postea Appulegius Boetiusque romanus latinam fecerunt) invenisse sapientissimi veterum tradiderunt, schliefst sich diejenige, welche in meinem Programm: Zur Geschichte der

1) Dieses Beispiel findet sich fast wörtlich abgedruckt in dem Algorithmus de Integris. Minucijs vulgaribus ac proportionibus Cum annexis detri falsi alijsque Regulis. Liptzck 1507. Bl. 26—26′ (vergl. auch Chasles, Geschichte der Geometrie übersetzt von Sohnke. Halle 1839. S. 639). Beiläufig bemerke ich, dafs der Abschnitt des genannten Algorithmus, welcher die Überschrift hat: Sequitur Regula falsi apud Philozophantes Augmenti et decrementi appellata | omnium Regulis Algebre demptis | vtilissima nichts weiter ist als ein Auszug aus der Regula Falsi apud Philozophantes Augmenti et Decrementi appellata. omnium Regulis Algobre demptis optima.

deutschen Algebra im 15. Jahrhundert S. 9 gedruckt ist. Ebendort ist von mir die Vermutung geäufsert worden, dafs der edierte anonyme Algorithmus Linealis, welcher beginnt: (A)D euitandum multiplices Mercatorum errores et alterius Arithmetice partis difficultates inuenta est quedam alia apud Apuleium virum in omni doctrina peritissimum huiuscemodi artis speculatio und schliefst: Et tantum de Radicum extractione et vltima huius Algorithmi specie Et per consequens de toto Algorithmo[1]), von Widmann verfafst sei. Zu dieser Annahme hatten mich früher zwei Gründe bestimmt. Einmal die Ähnlichkeit, welche die erwähnte Notiz mit dem Anfang des genannten Algorithmus hat, und dann die Angabe Wimpinas, nach der Widmann der Verfasser einer gedruckten Linienrechnung mit den Anfangsworten: Ad evitandum multiplices ist.[2]) In neuester Zeit habe ich noch zwei Gründe gefunden, welche für meine Vermutung sprechen. Erstens enthält der Algorithmus Linealis mehrere Verse, welche auch die Handschrift C 80 hat[3]), und zweitens ist er in Leipzig, wo bekanntlich Widmann eine Zeit lang lehrte, erschienen.[4])

---

1) Das Exemplar der hiesigen Ratsschulbibliothek hat die Bezeichnung: XXIV, XI, 5 und besteht aus 14 Blättern.

2) Vergl. Conradi Wimpinae scriptorum insignium centuria luci publicae tradita a Merzdorf. Lipsiae 1839, p. 50. — Als Titel des Druckes, der beginnt: Ad evitandum multiplices, ist angegeben: Algorithmi lineales. lib. I. Ich habe anfangs geglaubt, dafs lineales ein Druckfehler ist. Herr Oberbibliothekar O. v. Heinemann in Wolfenbüttel hatte indes die Güte, mir mitzuteilen, dafs im codex Guelferbytanus 22. 8. Aug., der das Originalmanuskript der Wimpinaschen centuria enthält, ebenfalls lineales steht.

3) Die betreffenden Verse lauten in dem

Algorithmus Linealis (Bl. 3′—4).

I monos .v. quinos .x. denos. dupla vigenos
XL. duplat idem. triplat .lx. l quoque sola
Quinquaginta facit. sed nonaginta dat .xc.
C. dat centenos. quadringenta quoque .cd.
D. quoque quingenta si non fuerit sociata
DC. sexcenta sola .M. quoque milia prebet
Si . C. preit . M . aufert centum sic scribe totum
Has tibi millificat subscriptas linea cunctas
Maiori numero si iungas forte minorem
Prepositus minuit Sed si postponitur auget
Auget in tantum numerus quantum minor habet.

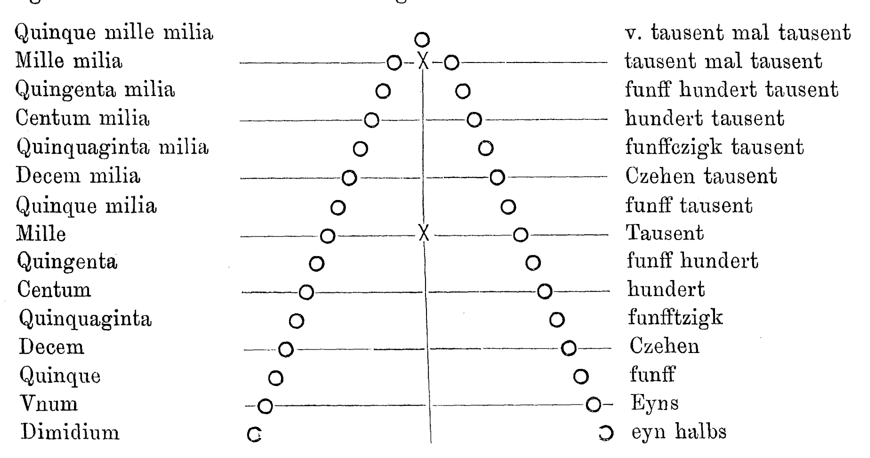
Cod. C 80 (Bl. 1).

I monos .v. quinos | x. denos dupla vigenos
xl. duplat idem | triplat .lx. l quoque sola
Quinquaginta facit | sed nonaginta dat xc
C. dat centenos. quadringenta quoque cd
DC. sexcenta . M . quoque milia prebet
Si C. preit . M . aufert centum sic scribe totum
Maiori numero si iunges forte minorem
Prepositus minuit sed si postponitur auget
Auget in tantum quantum maior numerus habet.*)

*) Neben diesen Versen hat Widmann bemerkt: Litera quingentos .D. tibi sola facit und linea super illam scripta tibi millificabit.

4) Am Ende des Algorithmus Linealis findet sich das Signet des Martinus Herbipolensis, der von 1490—1512 in Leipzig druckte. Vergl. Hain, Repertorium

Die Königl. öffentl. Bibliothek zu Dresden besitzt unter dem Zeichen: Mathem. 291 eine Schrift über das Rechnen auf den Linien, welche mit der unsrigen nur wenig übereinstimmt. Diese Schrift hat auf Bl. 1 den Titel: Algoritmus linealis und das nachfolgende Schema:



Der Anfang lautet (Bl. 1′): Quoniam propter multiplicem regularum positionem alterius aritmetrice scientie partis. inuenta est alia leuioris quidem operationis pars. ab appulegio philosopho industriosissimo.[1] de liniarum. spatiorumque cognitione tractans. linealis dicta calculatio que vt facilior est tanto vtilior et ingenio cuiuscunque accomodatior. Et quemadmodum sophiste quidem interest vt virtutes vocabulorum cognoscat ne paraloisetur ita quoque mercatoris. ac denique cuiuscunque negotiatoris in agendis rebus vt numerandi artem sciat ne decipietur. que quidem ars fructuosissime et breuissime per algoritmum linealem delucidatur Istius autem algoritmi linealis nouem sunt species scilicet numeratio circa quam eleuationem et resolutionem enucliare opportunum erit. additio. subtractio. duplatio. mediatio. multiplicatio. diuisio. progressio et radicum extractio. Darauf folgen Capitulum de Numeratione (Bl. 1′), De Additione (Bl. 2′), De Subtractione (Bl. 3′), De Duplatione (Bl. 4), De Mediatione (Bl. 4′), De Multiplicatione (Bl. 5), De Diuisione (Bl. 5′), De Progressione (Bl. 6). Der Schlufs lautet (Bl. 6): Capitulum de radicum extractione ad algoritmum integrorum reseruabo cuius species per ciffrales figuras ostenduntur vbi ad plenum de hac tractabitur.

---

bibliographicum. Voluminis I pars I, Stuttgartiae et Tubingae 1826. S. 90. Nr. 828 und Falkenstein, Geschichte der Buchdruckerkunst. Leipzig 1840. S. 181.

1) Die Worte: ab appulegio philosopho industriosissimo lassen mich vermuten, dafs die vorliegende Schrift der Algorithmus linealis ist, den Wildermuth (Artikel „Rechnen“ in Schmid, Encyklopädie des gesammten Erziehungs- und Unterrichtswesens. 6. Band, Gotha 1867. S. 733. 736) anführt.

Dann folgt der Druckvermerk: Impressum Liptzk per melchiorem Lotter. Anno. et cetera.[1]) Der vorliegende Algoritmus linealis hat zweifellos die Grundlage zu dem von Heinrich Stromer gebildet.[2]) Um dies augenscheinlich zu machen, setze ich den Abschnitt de Progressione aus beiden Schriften vollständig hierher. Man liest im

Algoritmus linealis von unbekanntem Verfasser (Bl. 6 des Dresdner Exemplars).

De Progressione.

Et quia in omni progressione aritmetrica ex additione primi cum vltimo excrescit vel numerus par aut impar. Si par tunc medietas illius paris multiplicetur (penes capitulum supra dictum) in numerum locorum et productum ostendit summam progressionis. Si autem impar tunc medietas locorum multiplicetur in vltimum aggregatum vt patebit summa progressionis et in exemplo

	1			1	
	2			2	
	3			3	
Exemplum	4	10	Exemplum	4	9
de pari	5		de impari	5	
	6			9	
	7			7	

Algorithmus linealis des Heinrich Stromer (Bl. 6′—7 der Ausgabe von 1504).

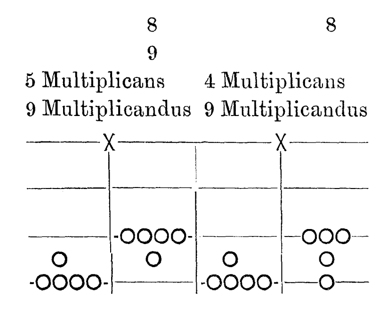
Octaua species.

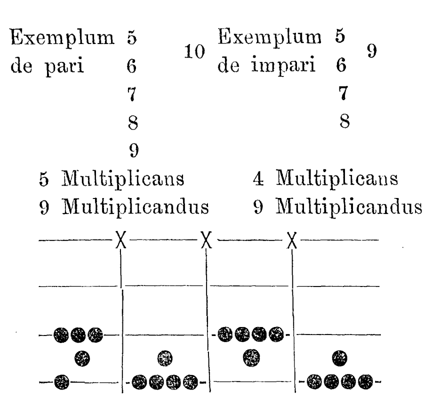
Progressio est plurium numerorum secundum equales excessus sumptorum in vnam summam reductio | In omni progressione Arithmetica ex additione primi cum vltimo excrescit vel numerus par. vel impar. Si par tunc medietas illius paris multiplicetur penes capitulum de multiplicatione | in numerum locorum et productum ostendit tibi summam progressionis Si vero impar tunc medietas locorum multiplicetur in vltimum aggregatum vt pateat summa progressionis: proba. Si omnes numeri in progressione | ordine a producto subtractionis more equaliter surgunt | inercie non accusaris Cuius quidem rei tam de pari: quam impari numero sume exemplum.

1	1
2	2
3	3
4	4

1) Unger (Die Methodik der praktischen Arithmetik. Leipzig 1888. S. 43) liest irrtümlich: Impressum Lipzik per melchiorem Lotter Anno $\overline{XC}$. Über meine Lesart vergleiche auch Hain, Repertorium bibliographicum. Voluminis I pars I. S. 90. Nr. 830. Da nach Falkenstein (Geschichte der Buchdruckerkunst S. 181) Melchior Lotter von 1497 an in Leipzig druckte, so kann der in Frage stehende Algoritmus linealis nicht vor 1497 erschienen sein.

2) Der Algorithmus linealis des Heinrich Stromer wurde gedruckt 1504 (vgl. auch Drobisch, De Ioannis Widmanni Egerani compendio arithmeticae mercatorum. Lipsiae 1840, pag. 5), 1510 (vergl. Catalogue de la bibliothèque scientifique, historique et littéraire de feu M. Michel Chasles. Paris 1881. S. 204. Nr. 1940), 1512, 1514, 1520 (vergl. Denis, Wiens Buchdruckergeschicht bis M.D.LX. Wien 1782, pag. 78. 116. 211). Eine neue Ausgabe ist von Günther (Prag 1880) veranstaltet worden.





¶ Aliud exemplum | Volens scire quot ictus facit tintinabulum ad campanam signando a prima hora vsque ad .i2. Iunge extrema faciunt .13. que multiplica per medietatem positionem scilicet per .6. faciunt .78. tot ergo ictus facit signando horas.

Bemerkt sei noch, daſs in das Dresdner Exemplar des fraglichen Algoritmus linealis eine alte Hand manches von dem eingetragen hat, was Stromers Text mehr enthält.

Das erste gröſsere Stück der Handschrift C 80 umfaſst Vorder- und Rückseite von einem losen Blatt, welches mit 226 bezeichnet ist, und Bl. 1′—5′. Es ist die Arithmetik des Johannes de Sacrobosco.[1]) Dieselbe beginnt ohne Titel: (O)Mnia que a primeua rerum origine processerunt ratione numeri uel numerorum formata sunt und schlieſst: Et hec de Radicum extractione sufficiunt tam in numeris Cubicis quam Quadratis. Widmann hat gewuſst, daſs das Manuskript von Johannes de Sacrobosco verfaſst ist. Denn er hat am Rande bemerkt: huius libri .... duplex est scilicet Mediata et immediata. Immediata fuit quidam philosophus arabicus nomine algus Sed Mediata fuit Johannes de Sacrobusco | qui hanc artem de arabico in latinum transtulit et compilauit (Bl. 226′). Auſser dieser Note sind von Widmann dem Manuskript noch andere Noten hinzugefügt worden. Aus letzteren läſst

---

1) Die Arithmetik des Johannes de Sacrobosco wurde zum erstenmal 1488 gedruckt. Die bisher bekannten Exemplare dieses Druckes findet man angegeben bei Favaro (Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi im Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo XII, pag. 126—127). Diesen Exemplaren lieſse sich das Exemplar anreihen, welches unsere Bibliothek unter dem Zeichen: XXIV, X, 22 aufbewahrt.

sich schliefsen, dafs Widmann der Verfasser des gedruckten anonymen Algorithmus Integrorum Cum Probis annexis ist.[1]) Nach dem Anfang: (Q)Voniam omnia quecunque a primeua rerum natura constructa sunt numerorum videntur ratione formata, der bis auf das erste Wort aus des Boetius Arithmetica entlehnt ist[2]), heifst es in dem genannten Algorithmus: Quia numerus Boetio teste principale in animo conditoris fuit exemplar Deus enim vt Ecclesiastes dicitur .11. omnia in mensura numero et pondere fecit et creauit (Bl. 2). Zwischen der ersten und zweiten Zeile (Bl. 226′) hat Widmann bemerkt: quia numerus in animo conditoris principale fuit exemplar Boe. ibidem und auf dem Rande: ecclesiastes 11⁰ Deus omnia in mensura numero pondere fecit et creauit. Dann liest man im Algorithmus Integrorum: Et quia vt Arestoteles dicit secundo methaphisice Quemadmodum res sunt. sic et cognosci habent (Bl. 2). Zwischen der zweiten und dritten Zeile (Bl. 226′) steht von Widmanns Hand: ut dicit aristoteles secundo methaphisice; die Worte: Quemadmodum res sunt. sic et cognosci habent finden sich im Texte. In dem Algorithmus Integrorum ist weiter zu lesen: In alijs nanque scientijs dum certitudo veritatis inquiritur: ambiguitatis diuersitas inuenitur. et dum ad scientie veritatem laboramus in profundiorem dubitationis incidimus laborintum (Bl. 2). Hiermit stimmt folgende von Widmann geschriebene Notiz

---

1) Das Exemplar der hiesigen Ratsschulbibliothek hat die Signatur: XXIV, XI, 5 und besteht aus 12 Blättern.

2) Die Arithmetik des Boetius erstreckt sich in der Handschrift C 80 von Bl. 24—71′. Der Anfang derselben lautet: (D)Omino patricio Simacho Boecius In dandis et accipiendisque muneribus ita recta officia inter eos precipue. que sese magnifaciunt. estimantur. si liquido constabit nec ab hoc aliud quod liberalius offerret. inventum. nec ab illo nunquam quod iucundius beniuolencia complecteretur acceptum und der Schlufs: huius autem descripcionis exemplar adiecimus. Das Manuskript scheint Widmanns Arbeitsexemplar gewesen zu sein. Ich glaube dies aus dem Umstande schliefsen zu dürfen, dafs Widmann manches korrigiert hat. So hat er gleich in den Anfangsworten recta durch recte, offerret durch afferret und nunquam durch unquam verbessert. Von der Ausgabe, welche 1488 in Venedig erschienen ist, weicht das Manuskript nur unerheblich ab. — Ein zweites Stück der Handschrift C 80, welches über theoretische Arithmetik handelt, befindet sich auf Bl. 11—19. Es ist die Arithmetik des Johannes de Muris. Der Anfang derselben lautet: Nvmerus est duplex scilicet mathematicus | qui dicitur numerus numerans | et naturalis qui dicitur numerus numeratus und das Ende: Nam sicut se habent 6 ad 9 ita 8 ad 12 scilicet in sesquialtera proporcione Et tantum de arithmetica communi Magistri Iohanni Muris | extracta ex arithmetica bohecij | quam boecius transtulit de greco in latinum Ex arithmetica Nicomaci patre aristotelis qui nicomacus arithmeticam in greco composuit. Widmann scheint das Manuskript fleifsig benutzt zu haben. Dafür sprechen die vielen Noten, die er demselben beigefügt hat. Mit den Ausgaben aus den Jahren 1515 und 1538 stimmt das Manuskript fast völlig überein.

überein: In alijs namque .... dum certitudo ueritatis inquiritur ambiguitatis diuersitas invenitur et dum ad scientie ueritatem laboramus in profundiorem dubitationis incidimus laborinthum (Bl. 226′). Zur weiteren Vergleichung teile ich aus dem Drucke und der Handschrift noch folgendes mit.

¶ Est autem Ars numerandi vt Consiliator .15. particula probleumatum refert commento tertio Recta numerorum ratio (Bl. 2).

Bemerkung von Widmann: ars numerandi est recta numerorum ratio. petrus de Ebano super. 15ta particula probleumatum aristotelis probleumate tertio (Bl. 226′).

Numerus vero vt Boe. dicit in primo Arithmetice et Euclides in principio septimi elementorum. est multitudo ex vnitatibus profusa (Bl. 2).

Der Text hat (Bl. 226′): numerus est multitudo ex vnitatibus profusa. Hierzu ist von Widmann bemerkt: ut dicit Boe. in primo Arithmetice und ut dicit Eucli. in principio septimi.

Hinc Aristoteles .10. methaphisice dicit Numerus est vna mensurata multitudo (Bl. 2).

Zwischen der 13. und 14. Zeile (Bl. 226′) steht von Widmanns Hand: qui est vna mensurata multitudo .10. methaphisice. qui steht über numerus; numerus gehört in den Text.

Quare vnitas secundum Boe. in principio Arithmetice est principium numeri et potentia omnis numerus (Bl. 2).

Zwischen der 16. und 17. Zeile (Bl. 226′) liest man von der Hand Widmanns: que est principium numeri et potentia omnis numeri Boecius. que steht über vnitas; vnitas gehört in den Text.

Bene dicit ergo Euclides vbi supra. quod vnitas est qua vnaqueque res se sola vna dicitur (Bl. 2).

Der Text hat (Bl. 226′): Vnitas autem est qua vnaqueque res se sola vna dicitur. Hierzu ist von Widmann bemerkt: ut dicit Euclides in principio septimi.

secundum Iordonium circa principium sue Arithmetice. vnitas est rei esse per se discretio (Bl. 2′).

Notiz von Widmann: Vnitas secundum Iordanum in principio arithmetice est rei esse per se discretio (Bl. 226′).

Alia autem diuisione et generali numerus in tria scinditur membra. quam etiam petrus de Ebano tangit. .15. particula probluematum. commento tertio dicens Numerorum alius digitus Alius articulus Alius compo-

Im Texte heifst es (Bl. 226′): Numerorum alius Digitus. alius Articulus. alius numerus compositus ¶ Digitus quidem est omnis numerus minor denario ¶ Articulus est omnis numerus diuisibilis in decem partes

situs siue mixtus. Digitus est omnis numerus sub denario contentus Articulus vero est omnis numerus qui potest in decem diuidi partes equales nullo existente superfluo Numerus autem compositus constat ex digito et articulo (Bl. 4).

equales: ita quod nihil sit residuum neque diminutum ℭ Compositus siue mixtus est qui constat ex digito et articulo. Widmann hat dazu bemerkt: ut dicit Consiliator super arestotelem in probleumatibus.

Dafs der Algorithmus Integrorum Cum Probis annexis eine Widmannsche Schrift ist, wird durch das Zeugnis Wimpinas zur Gewifsheit.[1]) Danach ist von Widmann ein (Algorithmus) Integrorum cum probis im Druck erschienen, der beginnt: Quoniam omnia quaecunque.[2])

---

1) Vergl. Conradi Wimpinae scriptorum insignium centuria luci publicae tradita a Merzdorf pag. 50.

2) Bei Abfassung des Algorithmus Integrorum Cum Probis annexis konnte Widmann neben der Arithmetik des Johannes de Sacrobosco noch das Rechenbuch des Johannes de Sevilla benutzen. Davon befindet sich in der Handschrift C 80 ein Fragment. Dasselbe hat die Überschrift (Bl. 129): Incipiunt Regule de Algorismo Prolagus und beginnt: (Q)Visquis in 4 Matheseos disciplinis efficacius uult proficere. numerorum raciones prius studeat apprehendere und schliefst (Bl. 134): Vtrum autem bene diuiseris sic probabis id quod exierit de diuisione scilicet excogitatos suprapositos numeros quotquot sint multiplica in diuidentem et adde si forte aliquid remansit ex diuidendo et si ex multiplicacione eorum cum addicione istius prouenerit primus diuidendus numerus bene diuisisti aliter enim Si autem ex diuidendo nihil remansit nisi sola multiplicacio priorum sufficit ad reddendum priorum numerum diuidendum. Item de diuidendo 9 serua pro nota. deinde post diuisionem similiter de diuidente subtractis 9 quociens poteris. Si autem ipsos 9 serua pro nota Similiter fac in eo qui exiuit de diuisione Deinde notam diuidentis et eius quod exiuit de diuisione in se multiplica et eorum multiplicacione notam. numeri qui si forte ex diuidendo remansit ad instar priorum inuentam aggrega et ex numero quod multiplicacione notarum et alterius aggregacione prouenerit. subtractis 9 quociens poteris. Sin nota prima diuidendi processerit. bene diuisisti. Sin autem non Item nota quod quociens aliquem numerum in alium multiplicaueris et quod ex eorum multiplicacione prouenerit per ipsum quem multiplicasti diuisis. ex diuisione ipse tamen exibit quoniam prius multiplicasti Verbi gracia. Si duo multiplico in 10 proueniunt 20. Hos autem 20. si per 10 diuisero reddunt 2 et sic de ceteris. Post hoc autem notandum est quia quilibet numerus in quemlibet potest multiplicari. in diuisione vero nunquam nisi maior in minorem potest diuidi Quia enim diuidendus numerus eciam multiplicatus debet a diuidendo detrahi uel parificari. et impossibile est per maiorem uel equalem aliquem numerum posse diuidi; et cetera. Das Manuskript reicht bis zu dem Abschnitt De fraccionibus numerorum der Druckausgabe. Ein zweites Fragment des Rechenbuches des Johannes de Sevilla ist enthalten im cod. Ampl. Q 355 und zwar von Bl. 85—115. Dasselbe beginnt nach zweimaligem: Assit principio sancta maria meo mit den Worten: Quisquis in quatuor matheseos disciplinis efficatius uult proficere numerorum raciones primum studeat apprehendere und

Auf Bl. 135—136 enthält die Handschrift C 80 unter dem Titel: Sequitur de phisicis eine Abhandlung über die Sexagesimalrechnung. Dieselbe ist von Widmann eigenhändig im Jahre 1488 geschrieben.[1]) Mit ihr stimmt der edierte anonyme Algorithmus Minutiarum Phisicarum in vielen Stücken überein.[2]) Zur Vergleichung teile ich einige Stellen aus dem Manuskripte und dem Drucke mit.

(C)Irculus obliquus qui signifer nuncupatur diuiditur in 6 Signa phisica quorum quodlibet valet duo communia quorum quodlibet habet 30 gradus. Gradus autem diuiditur in 60 minuta. quodlibet minutum in 60. secunda. Quodlibet secundum in 60 tertia et sic procedendo usque quo placet Sic est in tempore quod Annus diuiditur in 365 dies si est communis Et hij vocantur prima in Astronomia quorum 60 faciunt vnum secundum. 60 autem secunda faciunt vnum tertium .60. tertia. vnum quartum. et sic habent se contrario modo precedentibus. Quod autem primum diuiditur in 60. minuta dierum. uel alia diuisione in 24 horas. Et quodlibet minutum in 60 secunda diei. secundum in 60. tertia diei et sic consequenter. Sic quelibet hora diei partitur in 60 minuta. ita tamen quod minuta sint minora minutis dierum Et quodlibet minutum in 60 secunda hore. et sic de alijs Et inter illa

Circulus igitur obliquus qui signifer nuncopatur in sex phisica diuiditur signa. quorum quodlibet duo valet communia Et illorum vnumquodque in .30. subdiuiditur gradus. quorum quilibet in .60. minuta. quorum quodlibet in .60. secunda et quodlibet secundum in 60. tertia Et vnumquodque tertium in .60. quarta et sic procedendo vsque quo placet Sic et de tempore. Quia annus communis in .365. diuiditur dies. qui prima in Astronomia vocantur. quorum .60. vnum faciunt secundum 60. autem secunda vt supra vnum faciunt tertium . et .60. tertia vnum quartum et sic de alijs Sicut autem primum in .60. dierum diuiditur minuta vel alia diuisione in .24. horas Sic quelibet hora diei in .60 subdiuiditur minuta Ita tamen vt minuta horarum. minutis dierum sint minora. et quodlibet minutum in 60. secunda hore et sic de alijs Et inter illa quedam dicuntur integra sicut sunt Signa gradus

---

endigt: Cum ergo de .7. residuo equale acceperis id est tribus necessario 4 remanent. Von der Edition umfaſst die Handschrift S. 1—103. Erwähnt sei noch, daſs das zweite Fragment nach der Subscriptio: Explicit liber algorismorum et omnium fraccionum in numeris translatus ex arabico a magistro .G. cremonensi von Gerhard von Cremona aus dem Arabischen ins Lateinische übertragen ist.

1) Die letzten Worte sind: Et sic est finis in die Lune: 88 post crucis.

2) Das Exemplar der hiesigen Ratsschulbibliothek hat die Bezeichnung: XXIV, XI, 5 und besteht aus 6 Blättern. Der Anfang dieses Exemplars lautet (Bl. 2): (Q)Vanquam de Minutiarum vulgarium consideratione in superioribus satis diligentium lectorum indagationi explanatum sit.

Quedam dicuntur Integra Sicut Signa. Alia dicuntur fractiones sicut Minuta. secunda. tertia et cetera Quoniam autem hec in opere praxis astrorum scientie creberrime et ferme semper occurrunt Ideo dicere de eorum Additione adinuicem et Subtractione ab inuicem alijsque modis in hoc opere fractionum phisicarum est dicendum (Bl. 135).

Alia vero integrorum partes que minutie appellantur Sicut sunt minuta secunda tertia et cetera Et quia iste in opere praxis astrorum scientie creberrime occurrunt Quare de eorum ad inuicem additione alijsque modis in hoc opere minutiarum scilicet phisicarum dicendum (Bl. 2).

Sunt autem 8 species huius scilicet Reductio. Sutractio Additio. Mediatio. Duplatio. Multiplicatio. Diuisio et radicum extractio tam in numeris Cubicis quam quadratis (Bl. 135).

Sunt autem huius Algorithmi sicut et precedentis octo species scilicet Reductio Additio Subtractio Duplatio Mediatio Multiplicatio Diuisio et Radicum extractio (Bl. 2—2′).

(E)St igitur Reductio numerorum diuerse denominationis sub eodem collatio (Bl. 135).

(E)St igitur Reductio vt supra tactum est numerorum diuerse denominationis ad eandem collatio (Bl. 2′).

(A)Dditio est diuersorum numerorum fractiones diuersas continencium ad inuicem aggregatio (Bl. 135).

(A)Dditio est diuersorum numerorum minutias diuersas continentium ad inuicem aggregatum (Bl. 3).

(S)Vbtractio est datis numeris fractionum maiorum ad minorem exessus inventio (Bl. 135′).

(S)Vbtractio est datis numeris fractionum maiorum ad minores excessus inuentio (Bl. 3′).

(D)Vplatio est numeri fractionum ad se inuicem aggregatio (Bl. 135′).

(D)Vplatio est minutiarum ad se inuicem aggregatio (Bl. 4).

(M)Ediatio est numeri propositi fracti tantum medietatis inventio (Bl. 135′).

(M)Ediatio est minutiarum propositarum medietatis tantum inuentio (Bl. 4′).

(M)Vltiplicatio est ex duobus numeris in se ductis tertij inventio qui tociens continet alterum quot vnitates sunt in reliquo licet denominatio varietur (Bl. 136).

(M)Vltiplicatio est ex duobus numeris in se ductis tertij inuentio qui tociens continet alterum quot vnitates sunt in reliquo licet denominatio varietur (Bl. 5).

(D)Iuisio est datis duobus numeris in tot partes distributio quot minor continet licet denominator uarietur (Bl. 136).

(D)Iuisio est propositis duabus quantitatibus maioris in tot partes distributio quot minor continet vnitates licet denominator varietur (Bl. 5′).

(R)Adicem extrahere est sub proposito numero alium invenire qui

(R)Adicem extrahere est sub proposito numero alium inuenire qui

semel uel bis in se ductus qui fuerit propositus resultabit si uerus fuerit Cubicus uel quadratus (Bl. 136).	semel vel bis in se ductus propositum primo producit Si quadratus fuerit vel cubicus (Bl. 5′).

Diese Übereinstimmung veranlaſst mich zu behaupten, daſs der Algorithmus Minutiarum Phisicarum von Widmann verfaſst ist. Bestätigt wird meine Behauptung von Wimpina.[1]) Bei diesem liest man, daſs von Widmann ein (Algorithmus) Minutiarum Physicarum gedruckt worden ist, welcher anfängt: Quanquam de minutiarum vulgarium.[2])

---

1) Vergl. Conradi Wimpinae scriptorum insignium centuria luci publicae tradita a Merzdorf pag. 50.

2) Vier Stücke der Handschrift C 80 handeln von dem Rechnen mit Sexagesimalbrüchen und gemeinen Brüchen. Das erste der vier Stücke umfaſst Bl. 157′—166 und ist vermutlich ein Fragment. Es hat den Titel: De Diuersitate fraccionum und beginnt: (Q)Voniam in precedentibus frequenter contingit quod quantitas quantitati additur vel ab ea subtrahitur et vna per aliam multiplicatur vel diuiditur Sed et radicum extractio necessaria est quandoque. et hec fiunt precipue in quantitate temporis et circuli celestis und schlieſst: non est autem mirandum quod maior est numerus radicis quam quantitatis cuius est radix hoc enim accidit in fraccionibus sed non in integris Radix enim per multiplicacionem queritur sed in multiplicacione integra creſcunt fractiones vero decrescunt quantitate licet eorum numerus augeatur sicut habitum fuit supra Et hec de computacione fraccionum sufficiant.) Laus deo. Das zweite der vier Stücke beginnt mit den Worten (Bl. 177): (D)Ei omnipotentis gloriosi et sublimis sancto Spiritu Inuocato sine quo nullum rite fundatur exordium: qui cum deo patre et filio Idem est et diuersus pariter procedens ab utroque fractionum tractatu Inchoans Dico quod Minucia nihil aliud est quam pars respectu sui ad totum considerata und endigt (Bl. 181): ℂ Obsecro uero lectores auditoresque huius opusculi Si qui fuerint vt si alicubi Somnus ignorantie aliquis me arripuerit ut parcentes mihi causis pluribus que minus bene dicta fuerint corrigant et emendant: quia melius est multo plus falsitatem corrigere quam palliatam eandem sustinere De bene dictis autem laudent spiritum veritatis a quo procedit omnis veritas prolata a quocunque Placeat deo altissimo omnium creatori ut omnia premissa dicta sint ad ipsius qui vnus et trinus est gloriam et honorem atque Matris sui filij gloriosi Et ad instructionem tholose studentium sufficiat hec dixisse vt tandem cum anime fuerint egresse corpora valeamus paradisi gaudium obtinere alme meritis redemptoris Amen. Von dem Verfasser dieses Stückes werden citiert Jordanus, Campanus und Richardus Anglicus. Das dritte der vier Stücke beginnt ohne Titel (Bl. 182): (M)Inutiam siue fractionem nihil aliud dicimus quam partem consideratam in respectu partis ad totum und schlieſst (Bl. 185′): Prima autem Multiplicatio faciet tertia. secunda. quarta. Et sic deinceps Explicit secundus liber de Minutijs Iordanj. Dieses Stück ist ein Fragment. Der liber primus, der wahrscheinlich de integris handelt, fehlt vollständig. Bemerkt sei noch, daſs die beiden letzten Stücke einige Ähnlichkeit mit dem zweiten Teil des Algorithmus demonstratus (Norimbergae 1534) haben und von Widmanns Hand geschrieben sind. Das letzte

Von Bl. 191—195 erstreckt sich in der Handschrift C 80 eine, wie es scheint, noch ungedruckte Schrift über Proportionen. Dieselbe ist ohne An-

---

der vier Stücke beginnt mit den Worten (Bl. 280): (M)Odum representacionis minuciarum vulgarium et phisicarum proponere. Quia in fraccionibus duo numeri sunt necessarij Scilicet numerus numerans et numerus denominans und endigt (Bl. 285′): tamen non posui plures quia ista ad propositum nostrum sufficiunt. Dann folgt das Explicit: Minuciarum Algorithmus Explicit. Handschriften dieses Stückes giebt es noch mehrere; hier nur diejenigen, welche den Namen des Autors enthalten:

1. Manuskript der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München mit der Signatur: Cod. lat. 14684. Dasselbe beginnt ohne Titel (Bl. 22): Modum representacionis minuciarum volgarium et phylosophicarum. proponere intendimus quia in fraccionibus duo sunt numeri scilicet numerus numerans. et numerus denominans und schliefst (Bl. 29′): tamen non posui plures quia ista ad propositum nostrum sufficient minuciarum. volgarium et phylosophicarum. et cetera. Dann folgt die Subscriptio: Explicit liber de minucijs anno domini M°c°c°c°lvj°. In vigilia. nativitatis. domini. a magistro Iohanne de Linerijs astronomo egregio editus.

2. Manuskript der nämlichen Bibliothek mit der Signatur: Cod. lat. 11067. Dasselbe hat den Titel (Bl. 160): Item incipit algorismus de minucijs magistri Iohannis de linerijs und beginnt: Modum representacionis minuciarum vulgarium et phisicarum proponere quia in fractionibus sunt duo numeri scilicet numerus numerans et numerus denominans und endigt (Bl. 166): tamen non posui plures quia ille ad propositum nostrum sufficiunt. Dann folgt das Explicit: Explicit tractatus de minucijs editus per magistrum Iohannem de linerijs et scriptus per fratrem theodericum ruffi ordinis minorum in gronenbarch anno domini M°cccc°xlviij die xxviij mensis marcij et cetera.

3. Manuskript der Königl. Bibliothek zu Erfurt mit der Signatur: F 377. Dasselbe beginnt mit den Worten (Bl. 38′): Modum representacionis minuciarum vulgarium et phisicarum proponere. ℭ Quia In fractionibus sunt duo numeri scilicet numerus numerans et numerus denominans und schliefst (Bl. 40′): tamen non posuj plures | quia Ille ad propositum nostrum sufficiant. Dann folgt die Subscriptio: ℭ Expliciunt Canones Minuciarum Magistri Iohannis de linerijs. Auf Bl. 39′—40 stehen Tabellen, die nicht in den Text gehören.

4. Manuskript der Biblioteca Vaticana zu Rom mit der Signatur: Codice Urbinate, n° 1399. Dasselbe hat den Titel (Bl. 22): Inc. de minutijs Io. de linerijs und beginnt: Modum representationis minuciarum vulgarium et physicarum preponere: Quia in frationibus sunt duo numeri scilicet numerus numerans et numerus denominans und endigt (Bl. 26): tamen non posint plures quia ille ad propositum nostrum suficiant. Dann folgt das Explicit (Bl. 26′): Explicit canones minutiarum. Vergl. Boncompagni, Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni de Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro) scritte da Bernardino Baldi im Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo XII, pag. 376—377.

Die Canones minuciarum — diese Bezeichnung findet sich sowohl im Erfurter

gabe des Verfassers und zerfällt in zehn Kapitel. Die Überschriften der zehn Kapitel lauten wörtlich:

1. Quid sit proporcio (Bl. 191).
2. De triplici Manerie proporcionis (Bl. 191).
3. De inuencione medij proporcionalis inter duas quantitates (Bl. 191).
4. Quinque regule que ex dictis colligi possunt (Bl. 191′).[1]
5. De diuisione proporcionis per species (Bl. 192).
6. De compositione proporcionum (Bl. 192).
7. De multimoda produccione proporcionis composite in 6 quantitatibus positis (Bl. 192′).
8. Qualiter proporcio proporcioni additur vel subtrahitur (Bl. 194).
9. De multiplicacione proporcionum (Bl. 194′).
10. De diuisione proporcionum (Bl. 195).

Dem Manuskript hat eine andere Hand die nachfolgenden Bemerkungen hinzugefügt:

Proportio secundum Euclidem in quinto Elementorum diffinitione tertia Est duarum quantecunque sint eiusdem generis quantitatum certa alterius ad alteram habitudo (Bl. 191).

Non solum in quantitatibus reperitur proportio sed in ponderibus: potencijs et sonis. In ponderibus quidem et potencijs vult plato in thimeo esse proporcionem ubi Elementorum numerum ostendit. In Sonis esse proportionem liquet ex musica Nam ut vult Bo. in quarto Si quilibet neruus in duas equales partes diuidatur erit ipsarum suorumque sonorum eadem conuerso modo proportio (Bl. 191).

Sola enim vnivoca comparabilia sunt ut vult Campanus (Bl. 191).

---

als im Vatikanischen Manuskript — des Johannes de Lineriis sind in Padua (1483) und später in Venedig (1540) erschienen. In der ersten Ausgabe wird aber Johannes de Liveriis, in der zweiten Johannes de Liveriis Siculus als Verfasser genannt. Weiteres über diese Ausgaben bei Favaro, Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi im Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo XII, pag. 41 ff.

1) Die fünf Regeln lauten:

1. Si fuerint due quantitates note earum proporcio erit nota.

2. Si proporcio duarum quantitatum fuerit nota et vna illarum sit nota. reliqua erit nota.

3. Si fuerint tres quantitates continue proporcionales et due illarum fuerint note. tercia erit nota.

4. Si fuerint 4 quantitates continue proporcionales et tres fuerint note quarta erit nota.

5. Si fuerit proporcio alicuius quantitatis ad suam partem nota et fuerit excessus tocius super illam notus erit illa pars nota et tota quantitas erit nota.

proportio est duplex scilicet {
Rationalis ubi minor est pars uel partes maioris et est nota et reperitur in continuis et numeris
Irrationalis ubi minor non est pars uel partes Maioris et in talibus non est nota proportio nec nobis nec nature (Bl. 191).

Diese Bemerkungen finden sich fast wörtlich in dem gedruckten anonymen Tractatus Proportionum plusquam Aureus.[1]) Dort liest man:

Est igitur primo proportio secundum Euclidem. diffinitione tercia quinti elementorum: duarum quantecunque sint eiusdem generis quantitatum certa alterius ad alteram habitudo (Bl. 2).

Et quia non solum in quantitatibus reperitur proportio. sed et in ponderibus: potencijs et sonis In ponderibus quidem et potentijs vult plato in thimeo esse proportionem vbi elementorum numerum ostendit. In sonis autem esse proportionem liquet ex Musica Nam vt vult Boe. in quarto sue musice Si quilibet neruus in duas inequales diuidatur partes erit ipsarum parcium suorumque sonorum: eadem conuerso modo proportio (Bl. 2).

Sola enim vniuoca comparabilia sunt vt dicit campanus (Bl. 2′).

Alia enim est rationalis Vbi minor scilicet quantitas. est pars aut partes maioris. et talium omnium mediantibus numeris est proportio nota — Alia autem irrationalis dicitur vbi scilicet minor non est pars aut partes maioris. Et in talibus non est nota proportio nec nobis nec nature (Bl. 3).
Der Umstand, dafs die angezogenen Bemerkungen von Widmann geschrieben sind, bestimmt mich anzunehmen, dafs dieser der Verfasser des Tractatus Proportionum plusquam Aureus ist. Eine weitere Stütze hierfür liegt darin, dafs Wimpina in seiner Scriptorum insignium centuria (Lipsiae 1839, p. 50) sagt, von Widmann sei ein gedruckter (Algorithmus) Proportionum plusquam aureum vorhanden, welcher mit den Worten beginne: Quoniam autem maximam.[2])

---

1) Das Exemplar der hiesigen Ratsschulbibliothek hat die Signatur: XXIV, XI, 5 und besteht aus 17 Blättern. Der Anfang dieses Exemplars lautet (Bl. 2): (Q)Voniam autem maximam Profundissimamque eam esse disciplinam. nemo dubitat.

2) Der cod. C 80 enthält noch mehrere Stücke, in welchen von Proportionen gehandelt wird. Die wichtigsten sind:

1. Handschrift der Arithmetik des Boetius. Vergl. S. 156, Note 2.

2. Manuskript der Arithmetica communis des Johannes de Muris. Vergl. S. 156, Note 2.

3. Exemplar des Algorismus Proportionum des Nicole Oresme. Dasselbe beginnt ohne Titel (Bl. 201): (V)Na medietas sic scribitur $\frac{1}{2}$ vna tripla sic $\frac{3}{1}$ Et due tercie sic $\frac{2}{3}$ et sic de alijs und schliefst (Bl. 206): Sic igitur se habent aspectus

Auf Bl. 280—285′ enthält die Handschrift C 80 die schon erwähnten Canones minuciarum des Johannes de Lineriis. Zu denselben hat Widmann die nachfolgenden Noten gemacht:

1. Item in omni toto excedit tertia quintam in duabus tertijs ipsius quinte uel in duabus quintis ipsius tertie siue in duabus quintis decimis tocius Campanus sexta decima quarti Elementorum (Bl. 280).

2. Et hoc fit per 39. septimi elementorum (Bl. 280).

3. Ad extrahendum radicem numeri quadrati in minucijs reduc minucias ad eandem denominationem Si fuerint diuersarum denominationum post hoc prepone numeratori aliquem numerum quemcunque volueris et ipsum

---

signorum celi secundum istam consideracionem vt patet in figura Exagoni huius tractatus. Das Manuskript weicht vielfach von dem Drucke durch Curtze ab. Widmann hat es fleifsig studiert. Belege dafür sind die vielen Korrekturen, die er über und unter den Zeilen und am Rande gemacht hat.

4. Bruchstück des Tractatus proportionum des Nicole Oresme. Dasselbe hat den Titel (Bl. 234): Incipit liber proporcionum und beginnt: (O)Mnis rationalis opinio de velocitate motuum ponit sequi aliam proporcionem und endigt (Bl. 244): bonum est ex philosophia philosophos et Mathematica mathematicos impugnare vt Golias proprio gladio feriatur manifestatur quoque veritas et falsitas destruatur Hic ergo quartum finitur. Von der Edition (Uenetijs 1505) umfafst das Manuskript Bl. 1—8.

5. Fragment des Tractatus breuis proportionum: abbreuiatus ex libro de Proportionibus. D. Thome Braguardini Anglici. Dasselbe beginnt ohne Titel (Bl. 217′): Amis (lies Omnis) proporcio uel est communiter dicta. vel proprie dicta und schliefst (Bl. 219′): Quod illa conclusio sit impossibilis. Die Endworte des Manuskriptes finden sich auf S. 13 der Druckausgabe (Vienne 1515).

6. Manuskript des Tractatus demonstrativus Iordani de proporcionibus. Dasselbe beginnt ohne Titel (Bl. 245): Proporcio est rei ad rem determinata secundum quantitatem habitudo und endigt (Bl. 245′): ut omnes pariter fiant 36; et cetera. Ein zweites Manuskript des Tractatus demonstrativus Iordani de proporcionibus ist enthalten im cod. Ampl. Q 376 und zwar von Bl. 117′—119′. Dasselbe beginnt ohne Titel: PRoporcio est rei ad rem determinata. secundum quantitatem habitudo und schliefst: ut omnes pariter fiant 30. sex modi Explicit et cetera. In dem von Amplonius selbst angelegten Katalog hat das zweite Manuskript den angeführten Titel. Vergl. Schum, Beschreibendes Verzeichniss der Amplonianischen Handschriften-Sammlung zu Erfurt. Berlin 1887. S. 801. Ein drittes Manuskript des Tractatus demonstrativus Iordani de proporcionibus befindet sich im cod. Dresd. Db 86. Dasselbe ist am Rande betitelt (Bl. 226): Incipit quedam arismetica demonstrata und beginnt: PRoporcio est rei ad rem determinata secundum quantitatem habitudo und endigt (Bl. 228): vt omnes pariter fiant 3. 6. Vergl. auch Curtze, Über eine Handschrift der Königl. öffentl. Bibliothek zu Dresden. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXVIII. Hist. lit. Abthlg. S. 9—10. Der Tractatus demonstrativus Iordani de proporcionibus hat sowohl mit dem siebenten Kapitel der erwähnten anonymen Proportionslehre als auch mit der von Schöner herausgegebenen De proporcionibus appendix (Norimbergae 1534) grofse Ähnlichkeit.

multiplica per denominatorem minucie tue et fit denominator radicis inveniende quem serua Post hoc multiplica numeratorem cum numero preposito in se ipsum et id quod provenit duc in denominatorem minucie tue et in productum numeratorem primo propositum et huius producti extrahe radicem et provenit numerator denominatoris seruati (Bl. 285).[1])

4. Ad inveniendum radicem cubicam in minucijs requiritur quod sint eiusdem denominationis minucie Post hoc numeratori preponatur aliquis numerus ad placitum quem multiplica per denominatorem minucie tue et fit denominator quem serua Deinde numerum cui preposuisti numerum ad placitum duc in se cubice et id quod producitur duc numeratorem minucie tue multiplicatum in quadratum denominatoris primo propositi et eius quod producitur extrahe radicem cubicam que erit numerator denominatoris seruati (Bl. 285).[2])

Da die zweite von diesen Noten in dem edierten anonymen Algorithmus Minutiarum Vulgarium vorkommt[3]), so vermute ich, dafs dieser Algorithmus von Widmann verfafst ist. Für diese Annahme spricht auch, dafs auf Bl. 191 des mehrfach erwähnten Dresdensis eine Bemerkung von Widmann steht[4]), die viel Ähnlichkeit mit dem Anfang des genannten Algorithmus hat.[5]) Den besten Beleg für meine Vermutung finde ich aber bei Wimpina.[6]) Nach diesem rührt von Widmann ein gedruckter (Algorithmus) Minutiarum vulgarium her, der anfängt: Quoniam autem ut Campanus dicit.[7])

---

1) Die Regel läfst sich durch die Formel: $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{n^2pq}}{nq}$ ausdrücken. Widmann hat sie aus des Joh. de Lineriis Canones minuciarum entlehnt.

2) Die Regel kann man durch die Formel: $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[3]{n^3pq^2}}{nq}$ andeuten. Widmann hat sie den Canones minuciarum des Joh. de Lineriis entnommen.

3) Das Exemplar der Universitätsbibliothek zu Leipzig hat die Bezeichnung: Mathem. 346p und besteht aus 5 Blättern. Hier liest man auf Bl. 3: Cum igitur primas Si dissimilium fuerint denominationum ad eandem denominationem reducere volueris: duc secundum preceptionem campani super .39. septimi elementorum denominatorem prime in denominatorem secunde.

4) Die Bemerkung lautet: Item pars relatiue dicitur ad ipsum totum ut dicit Campanus super Euclidem.

5) Der Algorithmus Minutiarum Vulgarium beginnt mit den Worten (Bl. 2): (Q)Voniam autem ut Campanus dicit super secunda diffinitione quinti elementorum Pars relatiue ad totum.

6) Vergl. Conradi Wimpinae scriptorum insignium centuria luci publicae tradita a Merzdorf pag. 50.

7) Zwei Manuskripte der Handschrift C 80 handeln ausschliefslich von dem Rechnen mit gemeinen Brüchen. Das eine der beiden Manuskripte beginnt ohne Titel (Bl. 286): (M)Inucia est fraccio. integra et scribitur quelibet minucia duabus

Die Regula Falsi apud Philozophantes Augmenti et Decrementi appellata. omnium Regulis Algobre demptis optima, der Algorithmus Linealis, der Algorithmus Integrorum Cum Probis annexis, der Algorithmus Minutiarum Phisicarum, der Tractatus Proportionum plusquam Aureus und der Algorithmus Minutiarum Vulgarium sind ohne Angabe des Ortes. Da diese Schriften dasselbe Format, denselben Druck und auf jeder vollen Seite 33 Zeilen von 8 cm Länge haben, so sind sie höchst wahrscheinlich aus derselben Offizin hervorgegangen. Wenn nun eine von ihnen bestimmt in Leipzig erschienen ist (vergl. S. 152), so kann man dies mit ziemlicher Sicherheit auch von den übrigen annehmen.

Die genannten Schriften sind aufserdem ohne Angabe des Jahres. Da sie jedenfalls Widmann während seiner Wirksamkeit an der Universität zu Leipzig drucken liefs, so dürfte ihr Erscheinen um 1490 anzusetzen sein.

Die in Rede stehenden Schriften sind höchst wahrscheinlich die Editionen, auf welche von Widmann in zwei Notizen der Handschrift C 80 hingewiesen wird. Die eine dieser Notizen befindet sich auf Bl. 349′ und ist gedruckt in meinem Programm: Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert S. 10; die andere, etwas kürzere steht auf dem ersten Vorsetzblatt und hat folgenden Wortlaut: Satis superque satis Adolescentes Ingenui prioribus nostris editionibus communia atque ut ita dicam rudimenta Arithmetice pertractata sint que licet ad communes rerum usus facilem quendam supputandi modum habeant Si quid tamen in humanis negocijs ardius atque intricatius euenerit non illis sed altioribus quibusdam numerorum rationibus pertractandum erit quas preclarissimi quondam ac prope Ingenij Algabre paucis admodum aporismatibus (ut suo vocabulo utar) nobis tradidit artem sane admirandam ac inter cunctas mortalium inventiones precipuam tum propter singulares absconditosque calculandi modos tum eo maxime quod siue tibi de numeris siue de quibusuis rebus alijs ad numerum applicatis Enigmata difficilima ac pene inextricabilia apudque huius artis inscium impossibilia

---

figuris virga interiecta ad denotandum quod sit fraccio und schliefst (Bl. 287): Multiplicare non aliud quam multociens aliquem numerum ad alium addere. Das andere der beiden Manuskripte hat den Titel (Bl. 306): Algorithmus de Minucijs vulgaribus vel fraccionibus und beginnt: Nota duplices ponuntur minucie Scilicet Phisice id est astromice et vulgares Phisice minucie in denominacione neutro gaudent genere. vt vnum minutum. vnum secundum. vnum quartum. Vulgares vero feminino gaudent genere vt vna medietas vna tercia vna quarta due quinte et sic de alijs und endigt (Bl. 306′): Nam si numerator et denominator non habuerint se supra dicto modo Indubie minucia carebit radice Nec tam propinqua inuenitur quam. semper propinquior Inueniri poterit. Dann folgt die Subscriptio: Finit Algorithmus de Minucijs.

inciderint huius artis regulis facile investigare poteris Que res cum ad communem omnium utilitatem summopere conducere videbatur Ideo hodie M. et cetera resumere incipiet Aporismata Algobre.[1])

---

1) An diese Notiz schliefst sich diejenige, welche beginnt: Mathematicas sciencias toto orbe terrarum totque seculis celeberrimas Doctissimus omnium Arestoteles preclarissimo volumine Methaphisice sue non immerito certissimas atque ob id dignissimas In primisque expetendas asseruit. Ich habe früher fälschlich gelesen: Mathematicas sciencias toto orbe terrarum totque seculis celeberrimas Doctissimus omnium Aristoteles preclarissimo volumine Methaphisice sue non inmerito doctissimas atque ob id dignissimas inprimisque expetendas asseruit. Vergl. mein Programm: Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert S. 10.

Handschrift Johann Widmanns von Eger.

Zu: IV. Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Von Dr. E. Wappler.

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

Sechstes Heft.



Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1892.

DAS

MATHEMATIKER-VERZEICHNISS

IM

FIHRIST DES IBN ABÎ JA'ḲÛB AN-NADÎM.

ZUM ERSTEN MAL VOLLSTÄNDIG INS DEUTSCHE ÜBERSETZT
UND MIT ANMERKUNGEN VERSEHEN

VON

Dr. HEINRICH SUTER,

PROF. IN ZÜRICH.

Vorwort.

In den Jahren 1871 und 1872 erschien zu Leipzig in 2 Bänden (der 2. Band enthält Anmerkungen und Register) das bio- und bibliographische Handbuch des Abû'l-Faradsch Muhammed ben Ishâk, bekannt unter dem Namen Ibn Abî Jaʿkûb an-Nadîm (seine Lebenszeit ist nicht sicher anzugeben, er schrieb den Hauptheil seines Buches im Jahre d. H. 377 (987 p. Ch.)), betitelt: Kitâb al-Fihrist (Buch des Verzeichnisses), herausgegeben von Gustav Flügel: nach dessen Tode besorgt von Joh. Rödiger und August Müller. Dieses Buch enthält biographische (diese meistens sehr kurz) und bibliographische Notizen über eine grosse Zahl von Autoren der verschiedensten Wissensgebiete und Nationalitäten (Inder, Babylonier, Perser, Griechen, Araber etc.) und ist in 10 Hauptabtheilungen, jede mit mehreren (2—8) Unterabtheilungen, nach den verschiedenen Wissenszweigen geordnet, getheilt. Was den Inhalt der einzelnen Abtheilungen anbetrifft, so muss ich den Leser auf Flügels Besprechung des Fihrist in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft (Bd. 13 p. 559—650) verweisen; für uns kommt hier nur die 7. Hauptabtheilung mit drei Unterabtheilungen in Betracht, von denen die erste die Logiker und Naturphilosophen, die zweite die Mathematiker, Astronomen, Mechaniker etc., und die dritte die Aerzte behandelt. — Dieses Werk ist desshalb von so grosser Wichtigkeit für die Literatur- und Culturgeschichte der Araber, weil es die älteste Quelle dieser Art ist (Ibn Kutaibas Handbuch der Geschichte ist circa 100 Jahre älter, enthält aber nur wenige literarische Angaben) und alle späteren Literarhistoriker der Araber, wie Ibn al-Kuftî, Ibn Challikân, Nawawî, Ibn Abî ʿUsaibia, Hâdschî Chalfa und Andere mehr oder weniger aus ihm geschöpft haben. Neben Flügel haben bis auf diese Zeit schon eine Reihe von Gelehrten diese wichtige Quelle vor und nach ihrer Drucklegung zu historischen Studien benutzt, so de Sacy, Quatremère, Reinaud, Woepke, Hammer-Purgstall, Chwolsohn, Steinschneider etc. Andere wieder, wie Hankel, bedauerten, dasselbe wegen Unkenntniss der arabischen Sprache nicht benutzt haben zu können, und Letzterer drückt den Wunsch aus,

seine Darstellung möchte eine vollständige Uebersetzung der betreffenden Theile desselben veranlassen.*)

Dem Verfasser dieser Abhandlung war es erst seit seinem Aufenthalte in Zürich (seit 1886) vergönnt, sich dem Studium des Arabischen eingehender zu widmen, und derselbe fühlte sich nun in der Kenntniss der Sprache soweit erstarkt, dass er mit der Uebersetzung der auf die mathematischen Wissenschaften sich beziehenden Partien des Werkes nicht mehr länger zurückhalten zu müssen glaubte.

Gemäfs den drei Unterabtheilungen des 7. Buches des Fihrist zerfällt meine Uebersetzung ebenfalls in drei Theile; da aber sowohl unter den Logikern und Naturphilosophen der ersten, wie auch unter den Aerzten der dritten Unterabtheilung sich nur wenige Autoren befinden, von denen mathematische (im weiteren Sinne des Wortes) Werke angeführt werden, so sind diese beiden Theile nicht vollständig übersetzt, sondern jeweilen nur diejenigen Stellen wiedergegeben worden, die für unsern Zweck von Interesse sind.**) Dagegen ist die zweite Unterabtheilung vollständig und soweit es, ohne der Sprache allzuviel Zwang anzuthun, angieng, wörtlich übersetzt. Das Wort كتاب „Buch", das im Texte vor jedem aufgeführten Werke eines Autors steht, habe ich der Kürze halber meistens weggelassen. Sachliche, auf die Autoren und ihre Werke bezügliche Zusätze, Berichtigungen etc. habe ich in einem Schlusstheil, „Anmerkungen" betitelt, zusammengestellt.

Was die Transscription der Eigennamen anbetrifft, so habe ich im Allgemeinen diejenige Flügels in der citierten Abhandlung über den Fihrist adoptiert, nur schreibe ich, wie es gebräuchlich ist: Muḥammed statt Muḥammad, ʿOmar statt ʿUmar, Aḥmed statt Aḥmad, Bekr statt Bakr, ben statt bin. Ferner gebe ich, um die vielen unterscheidenden, für den Drucker und Leser unangenehmen Zeichen zu reducieren, ش durch sch, ج durch dsch, خ durch ch wieder, was auch der gewöhnlichen Aussprache entspricht. Ueber die anderen Consonanten merke man sich: ح = ḥ ist ein scharfes h; ذ = ḏ das weiche englische th; ث = ṯ das harte englische th; ز = z ein weiches s; س = s ein scharfes s; ص = ṣ noch schärferes emphatisches s;

---

*) Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874. p. 223 u. 224.

**) Was in diesen beiden Abschnitten nicht wörtliche Uebersetzung ist, sondern von mir hinzugefügt, oder im Auszug wiedergegeben wurde, ist in eckige Klammern geschlossen. In allen drei Abschnitten sind von mir hinzugefügte Wörter, die einen Begriff näher bezeichnen oder erklären sollen, in runde Klammern eingeschlossen.

ظ = ẓ ein französisches z des oberen Gaumens mit Nachdruck auszusprechen; ع = ʿ ist ein Guttural, der für uns im Anfang und am Ende eines Wortes ohne Bedeutung ist, zwischen zwei Silben aber anzeigt, dass dieselben scharf getrennt ausgesprochen werden.

Der französische Circumflex (^) über einem Vocal deutet seine Länge an. Was die Betonung anbetrifft, so merke man sich, dass, wenn ein Wort eine Silbe mit langem Vocal oder eine durch Position lange Silbe hat, der Ton auf dieser ruht, doch hat der lange Vocal im Auslaut nie den Ton; also liegt der Accent in Chaṣîb auf dem i, in ʿUṭârid auf dem a, in Muhammed auf dem a; dagegen in Abû, ʿAlî, Jaḥjâ etc. auf der ersten Silbe.*) Hat ein Wort mehrere lange Vocale, oder solche und Positionslängen, so liegt der Ton auf der letzten Länge, so in Chowârezmî auf dem e, in Nûbacht auf dem a, in Manṣûr auf dem u, in Naṣrânî auf dem â. Hat das Wort gar keine lange Silbe, so rückt der Ton im Allgemeinen so weit nach vorn als möglich, also bei dreisilbigen auf die erste Silbe.

Was die Anmerkungen anbetrifft, so hielt ich es für zweckmässig, von der Hinweisung auf die vorhandenen lateinischen Uebersetzungen arabischer Werke Umgang zu nehmen (mit wenigen Ausnahmen), denn das Material für die Anmerkungen wäre dadurch zu einem schwer zu bewältigenden angewachsen; ich verweise den Leser hiefür auf die Schriften Wenrichs, Wüstenfelds und Steinschneiders.

Zum Schlusse will ich nicht unterlassen, Hrn. Dr. phil. Hausheer in Zürich meinen besten Dank auszusprechen für die Hülfe, die er mir bei der Erklärung einiger sprachlich schwieriger Stellen entgegengebracht hat. Trotz sorgfältiger Arbeit aber war es nicht zu vermeiden, dass der Leser hie und da noch auf ein Fragezeichen stossen, oder in den Anmerkungen unsichere Conjecturen treffen wird; es bezieht sich dies einerseits auf Namen von Autoren, deren richtige Transscription nicht festzustellen ist, und andrerseits auf Büchertitel, aus denen kein Schluss auf den Inhalt zu ziehen ist, oder die keinen verständlichen Sinn ergeben; doch darf ich hinzufügen, dass ich, was das erstere anbetrifft, die Fragezeichen des Herausgebers um keine neuen vermehrt habe, dass ich aber in Bezug auf das letztere vielleicht da und dort einiges Licht in unklare Stellen hineingebracht habe, die Denjenigen Verlegenheiten bereiten mussten, die mit dem wissenschaftlichen Stoff, um den es sich handelt, nicht genügend vertraut waren.

---

*) Eine scheinbare Ausnahme von dieser Regel machen Wafâ und ʿAlâ, die den Accent auf der Schlusssilbe haben, weil sie im Arabischen mit dem Consonanten (Spiritus lenis) Hamza schliessen, der in der Transscription weggelassen wird.

Verzeichniss der gebrauchten Abkürzungen.

Abulphar. = Abulpharajii Historia dynastiarum, edid. arab. et lat. vert. Ed. Pocockius. Oxon. 1672.

Casiri = Bibliotheca arabico-hispana escurial. Edid. Casiri, Matriti 1760—1770.

Dorn = Drei in der k. Bibl. zu St. Petersburg befindliche astronomische Instrumente mit arabischen Inschriften von B. Dorn. (Mém. de l'acad. impér. de St. Pétersb. Tome IX No. 1.)

Flügel, A. od. Fihrist, A. = Zweiter Band von Flügels Ausgabe des Fihrist, welcher die Anmerkungen und Register enthält.

H. Ch. = Lexicon bibliogr. et encyclop. a Haji Khalfa (Ḥâdschî Chalfa) compositum. Edid. et lat. vert. G. Flügel. Leipzig 1835—58.

Ibn al-K. = Târîch al-Ḥukamâ (Chronik der Gelehrten) von Ibn al-Ḳuftî (noch nicht herausgegeben, ich citiere nach Flügel die Wiener Handschrift No. 1161).

Reinaud = Mémoire géograph. histor. et scientifique sur l'Inde, par M. Reinaud. Paris 1849.

Wenrich = Wenrich, de auctorum graecor. versionibus et commentar. syr. arab. etc. commentatio. Lips. 1842.

Wüstenfeld = Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher, von Ferd. Wüstenfeld. Göttg. 1840.

Z. D. M. G. = Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft.

Z. f. M. Ph. = Zeitschrift für Mathematik und Physik, von Schlömilch, Kahl und Cantor; hist.-literar. Abtheilung.

Das siebente Buch des Fihrist.

Es enthält die Geschichten der Philosophen und der alten Wissenschaften*), und die Schriften, die auf diesen Gebieten verfasst worden sind, und zerfällt in drei Unterabtheilungen.

I. Unterabtheilung.

Ueber die Naturphilosophen und Logiker, die Titel ihrer Schriften, deren Uebersetzungen und Commentare, über das was noch von ihnen vorhanden ist, was von ihnen erwähnt wird, aber nicht mehr vorhanden ist, und was einmal vorhanden war, dann aber verloren gegangen ist.

[Nach einigen einleitenden Capiteln über die Verschiedenartigkeit der Wissenschaften, woher dieselben zuerst gekommen seien, wie sie sich verbreitet haben, durch wen sie im Islam hauptsächlich Eingang fanden, über die Uebersetzer aus verschiedenen Sprachen ins Arabische etc., kommt er zum eigentlichen Gegenstand mit dem Capitel]:

Der Erste, welcher sich mit Philosophie beschäftigt hat

[Dieser war nach den Einen Thales, nach den Andern Pythagoras, der Verfasser der goldenen Sprüche, so genannt, weil Galenos aus Hochschätzung für sie dieselben mit Gold niedergeschrieben habe. — Dann kommt eine grössere Abhandlung über]:

Platon.

[Am Schlusse derselben wird von ihm angeführt]: Das Buch über die Elemente der Geometrie, übersetzt von Ḳusṭâ.**)

*) Darunter sind diejenigen verstanden, mit denen sich schon die alten Völker, insbesondere die Griechen, beschäftigt haben, nämlich Mathematik, Astronomie (Astrologie und Alchemie) und Medicin.

**) Hier liegt wohl eine Verwechslung des Verfassers des Fihrist vor: Ḳusṭâ hat, wie in der III. Unterabtheilung (Aerzte) zu lesen ist, eine eigene Abhandlung unter diesem Titel geschrieben.

Aristoteles.

[Nachdem sein Leben und die logischen Schriften behandelt sind, geht der Verfasser zu Folgenden über]: Die Physik (auscultationes physicae), mit dem Commentar Alexanders (von Aphrodisias), enthält acht Bücher. Muḥammed ben Isḥâḳ sagt: Von dem Commentar Alexanders zum ersten Buch des Aristoteles seien zwei Bücher vorhanden, das zweite jedoch nur zum Theil, diese wurden übersetzt von Abû Rauḥ, dem Ṣabier, welche Uebersetzung verbessert wurde von Jaḥjâ ben ʿAdî; vom Commentar zum zweiten Buche existiert ein Buch, welches von Ḥunain aus dem Griechischen ins Syrische übersetzt worden ist, und aus dem Syrischen ins Arabische von Jaḥjâ ben ʿAdî; zum dritten Buche findet sich kein Commentar vor, dagegen drei Bücher des Commentars zum vierten Buche, jedoch das dritte nur unvollständig bis zu den Worten „über die Zeit"; diese wurden übersetzt von Ḳusṭâ, die bekanntere existierende Uebersetzung aber ist diejenige von ad-Dimischḳî; zum fünften Buche der Physik schrieb Alexander einen Commentar in einem Buche, übersetzt von Ḳusṭâ ben Lûḳâ; zum sechsten Buche schrieb er einen Commentar in einem Buche, der etwas mehr als zur Hälfte vorhanden ist; ebenso existiert ein Commentar zum siebenten Buche in einem Buche, übersetzt von Ḳusṭâ; von einem solchen zum achten Buche sind nur wenige Blätter vorhanden.

Die Physik wurde auch commentiert von Johannes dem Grammatiker (Philoponos) aus Alexandria. Muḥammed ben Isḥâḳ sagt: Was von diesem Werke Ḳusṭâ übersetzt hat, ist in unterrichtender (belehrender) Form[a], und was ʿAbdalmasîḥ ben Nâʿima übersetzt hat, ist nicht in dieser Form; Ḳusṭâ übersetzte die vier ersten Bücher, und Ibn Nâʿima die vier letzten.

Die Physik wurde noch von verschiedenen anderen Philosophen commentiert. Es existiert ein Commentar des Porphyrios zu den vier ersten Büchern, übersetzt von Basilios (?). Einen Commentar des Themistios übersetzte Abû Bischr Mattâ ins Syrische, ein Theil des ersten Buches der Uebersetzung ist noch vorhanden. Abû Aḥmed ben Karnîb commentierte einen Theil des ersten Buches und einen Theil des vierten bis zu den Worten „über die Zeit". Ebenso commentierte T̲âbit ben Ḳurra einen Theil des ersten Buches und Ibrâhîm ben aṣ-Ṣalt übersetzte das erste Buch: ich habe eine Abschrift dieser Uebersetzung von Jaḥjâ ben ʿAdî gesehen. Auch Abû'l-Faradsch Ḳadâma ben Dschaʿfar ben Ḳadâma commentierte einen Theil des ersten Buches der Physik.

Die Schrift über den Himmel und die Welt. Sie enthält vier Bücher und wurde übersetzt von Ibn al-Baṭrîḳ, welche Uebersetzung dann verbessert wurde von Ḥunain. Ebenso übersetzte Abû Bischr Mattâ einen

Theil des ersten Buches. Alexander von Aphrodisias commentierte von diesem Werke einen Theil des ersten Buches und Themistios das ganze Werk; diesen Commentar übersetzte oder verbesserte Jaḥjâ ben ʿAdî im Verein mit Ḥunain — von diesem sind die 16 Fragen (Quaestiones) —. Es existiert auch ein Commentar von Abû Zaid al-Balchî zum Anfang dieses Werkes, verfasst für (d. h. im Auftrag von . . ., auch gewidmet dem . . .) Abû Dschaʿfar al-Châzin.

Ueber die himmlischen Erscheinungen (Meteorologie). Hievon ist ein grosser Commentar vorhanden von Makidoros*), welcher übersetzt worden ist von Abû Bischr Mattâ, aus diesem hat aṭ-Ṭabarî einen Auszug gemacht. Alexander von Aphrodisias schrieb ebenfalls einen Commentar, der zuerst direct ins Arabische übersetzt, und erst später durch Jaḥjâ ben ʿAdî aus dem Syrischen ins Arabische übertragen worden ist.

Das Buch über den Spiegel**), übersetzt von al-Hidschâdsch ben Matar.[1]

Theophrastos.

Er war einer der Schüler des Aristoteles und ein Sohn seiner Schwester, und einer von denen, welchen Aristoteles sein Erbe (geistiges) anvertraute, er folgte auch diesem nach dessen Tode auf dem Lehrstuhl. Er schrieb [unter Anderem]: Ein Buch über die Meteore.

Proklos Diadochos,

der Platoniker. Er schrieb [unter Anderem]: Ueber die Definitionen der Elemente der Physik.[2] Ueber den Theil, welcher nicht getheilt werden kann.[3] Das Buch der kleineren Elemente.[2]

Alexander von Aphrodisias.

Er schrieb [unter Anderem]: Widerlegung derjenigen, welche behaupten, dass Nichts aus Nichts entstehen könne (wörtlich: dass Nichts entstehe ausser aus Etwas). Ueber die Gesichtswahrnehmungen, dass diese nämlich nicht stattfinden können ohne Strahlen, die vom Auge ausgesandt (zerstreut) werden, und Widerlegung derjenigen, welche die Aussendung der Strahlen behaupten.[4]

Porphyrios.

Er lebte nach Alexander (v. Aphrod.) und Galenos und vor Ammonios, war aus Tyrus gebürtig; er commentierte die Schriften des Aristoteles und

---

*) Ist eine oft genannte, doch nicht sicher zu stellende Persönlichkeit, und heisst auch bisweilen Amkidoros.

**) Wahrscheinlich eine Verwechslung mit der Eukleidischen Optik oder Katoptrik (de speculis).

schrieb überdies [unter Anderem]: Ein Buch über die Elemente.[5] Ueber die Geschichten der Philosophen; ich sah von diesem Werk das vierte Buch in syrischer Sprache.

Theophroditos?[6]

Was von seinen Schriften vorhanden ist, habe ich gelesen in einer Abschrift des Jaḥjâ ben ʿAdî, nämlich den Commentar zu der Abhandlung des Aristoteles über die Höfe und Regenbogen (ein Theil der Meteorologie), übersetzt von Ṯâbit ben Ḳurra.

Jaḥjâ, der Grammatiker (Johannes Philoponos).

Er schrieb [unter Anderem]: Das Buch, welches darüber handelt, dass jeder Körper begrenzt (endlich) sei, und dass also auch seine Kraft (Wirkung) eine begrenzte sei.

[Der Verfasser erwähnt nun eine weitere Reihe von Naturphilosophen, theilweise die blossen Namen, unter diesen befindet sich unter Andern]:

Theon,

der Platoniker. Er schrieb ein Buch über die Anordnung des Lesens der Platonischen Schriften und die Namen (Titel) dessen, was er verfasst hat.[7]

Al-Kindî.[8]

Abû Jûsuf Jaʿḳûb ben Isḥâḳ ben aṣ-Ṣabbâḥ ben ʿImrân ben Ismâʿîl ben Muḥammed ben al-Aschʿaṯ ben Ḳais al-Kindî ben Maʿdî Karib ben Muʿawwija ben Dschabala ben ʿAdî ben Rabîʿa ben Muʿawwija ben al-Ḥâriṯ ben Muʿawwija ben Kinda ben Ṯaur ben Murattiʿ ben ʿAdî ben al-Ḥâriṯ ben Murra ben Udad ben Zaid ben al-Hamaisaʿ ben Zaid ben Kahlân ben Sabâ ben Jaschdschub ben Jaʿrub.*) — Er war der Vortrefflichste seiner Zeit und einzig dastehend in der Kenntniss der alten Wissenschaften insgesammt; er wurde der Philosoph der Araber genannt; seine Schriften handeln über die verschiedensten Wissenszweige, wie die Logik, die Philosophie, die Geometrie, das Rechnen, die Arithmetik, die Musik, die Astronomie und Anderes. Er war geizig. Wir haben ihn unter die Naturphilosophen eingereiht, weil wir ihn wegen seiner bevorzugten Stellung in der Wissenschaft so früh als möglich erwähnen wollten, wir werden aber auch seine sämmtlichen Schriften in den übrigen Disciplinen anführen.

---

*) Ich habe mich in dieser Genealogie genau an den von Flügel veröffentlichten Text des Fihrist gehalten, in der Abhandlung Flügels über Al-Kindî (Abhandlg. f. d. Kunde des Morgenlandes, Bd. 1, Heft 2) kommen einige Abweichungen vor.

[Unter den zuerst angeführten philosophischen Schriften befindet sich]: Die Abhandlung darüber, dass die Kenntniss der Philosophie nur durch die mathematischen Wissenschaften erreicht werden kann.

Die arithmetischen Schriften.*)

Fünf Bücher Einleitung in die Arithmetik. Vier Bücher über den Gebrauch der indischen Rechnungsweise. Ueber die Erklärung der Zahlen, die Platon in seinem Buch vom Staate erwähnt. Ueber die Zusammensetzung der Zahlen. Ueber die Einheit mit Rücksicht auf die Zahl. Ueber die Auffindung des Verborgenen und Geheimen. Ueber die Weissagung aus dem Vogelflug und das Fâlstechen[9] mit Rücksicht auf die Zahl. Ueber die Linien und das Multiplicieren mit der Zahl der Gerstenkörner (?). Ueber die hinzugefügte (in Verbindung gebrachte)[10] Quantität. Ueber die zeitlichen Verhältnisse (Proportionen).[11] Ueber die Zahlenkunststücke und die Kunst, sie zu ersinnen (zu ergründen).[12]

Schriften über die Kugel.

Abhandlung darüber, dass die Welt und Alles was darin ist (d. h. die Himmelskörper) Kugelgestalt hat. Ueber die Erklärung (Erläuterung) des Satzes, dass alle primitiven Substanzen (Elemente, Atome) und die letzten Körper (d. h. die zusammengesetzten, grossen Weltkörper) nur kugelförmig sind. Abhandlung darüber, dass die Kugel die grösste der körperlichen, der Kreis die grösste der ebenen Figuren sei. Abhandlung darüber, dass die Oberfläche des Meeres sphärisch sei. Ueber die ebene Darstellung der Kugel (Planisphaerium). Ueber die sphärischen Figuren. Ueber die Construction des Zenithes (Poles) auf einer Kugel. Ueber die Construction und den Gebrauch der Armillarsphäre mit sechs Ringen.

Schriften über die Musik.

Eine grössere Abhandlung über die Composition. Ueber das System der Töne, welche die natürlichen Eigenschaften der höheren Individuen darthun und die Uebereinstimmung (Harmonie) der Composition. Ueber den Rhythmus. Einleitung in die musikalische Kunst. Ueber die Geschichte der Kunst der Composition. Ueber die Kunst der Poesie. Ueber die Geschichte der Kunst der Musik.

Astronomische Schriften.

Abhandlung darüber, dass die Erscheinungen des Mondes nicht genau, sondern nur angenähert festgesetzt werden können.[13] Abhandlung über

---

*) Hier macht der Verfasser keinen Unterschied mehr zwischen Rechnen und Arithmetik wie oben.

die Fragen, welche an ihn (Al-Kindî) gerichtet wurden über den Zustand der Sterne. Abhandlung über die Beantwortung physikalischer (naturphilosophischer) Fragen über die Eigenschaften der Gestirne. Ueber die Projection der Strahlen.[14] Ueber die beiden Jahreszeiten. Abhandlung darüber, welche Sternbilder (des Thierkreises) und welche Sterne (Planeten) jeder einzelnen Gegend zukommen. Abhandlung über die Fragen, die an ihn gestellt wurden über die Verschiedenheit, die sich in den Gestaltungen der Horoskope zeigt. Abhandlung über das, was von den Lebensaltern der Menschen in den früheren Zeiten erzählt wird, und ihre Verschiedenheit in der Gegenwart. Ueber die Verbesserung der Construction der Horoskope, und die Auffindung des Regenten der Geburtsstunde und des Regenten der ganzen Lebensdauer.[15] Ueber die Verdeutlichung der Ursache der rückläufigen Bewegung der Planeten. Ueber die Strahlen.[16] Ueber die grössere Schnelligkeit der Bewegung, wie sie an den Gestirnen wahrgenommen wird, wenn sie am Horizonte sind, und die Verlangsamung derselben, wenn sie in die Höhe steigen. Ueber die Erklärung der Verschiedenheit, welche sich an den Himmelskörpern zeigt. Ueber den Unterschied zwischen dem Laufe und der Wirkung der Strahlen. Ueber die Ursachen der Stellungen der Gestirne (Aspecten?). Abhandlung über das, was in Abhängigkeit steht von den beiden Himmelskörpern, genannt „Glück und Unglück" (Saturn und Mars). Ueber die Ursachen der Kräfte, die den Regen anzeigenden Himmelskörpern zukommen. Ueber die Ursachen der Erscheinungen der Atmosphäre. Ueber die Ursache, warum es an einigen Orten fast nie regnet.*)

Geometrische Schriften.

Ueber die Zwecke des Eukleidischen Buches. Ueber die Verbesserung des Eukleidischen Werkes. Ueber die Verschiedenheit der Bilder (Optik). Abhandlung darüber, wie die Alten jeden einzelnen der fünf (regelmässigen) Körper auf die Elemente bezogen haben (auf je ein bestimmtes Element). Ueber die nähere Prüfung der Angaben des Archimedes über das Mass des Durchmessers des Kreises aus seinem Umfange.[17] Ueber die Construction der Figur der beiden mittleren Proportionalen.[18] Ueber die angenäherte Bestimmung[19] der Sehne (sollte wohl „Sehnen" heissen) des Kreises. Ueber die angenäherte Bestimmung der Sehne (Seite) des Neunecks. Ueber die Ausmessung eines Saales (Säulenhalle). Ueber die Theilung[20] der Drei- und Vierecke und Constructionen hiezu. Ueber die Art und Weise der Construction eines Kreises, der gleich ist der Oberfläche eines gegebenen

*) Flügel (al-Kindî, p. 24) führt aus andern Manuscripten noch fünf weitere Abhandlungen an.

Cylinders. Ueber die geometrische Darstellung des Auf- und Untergangs der Gestirne. Ueber die Theilung des Kreises: drei Abschnitte (Capitel).[21] Ueber die Verbesserung des 14. und 15. Buches des Eukleides. Ueber die geometrischen Beweise zu den astronomischen Berechnungen. Ueber die Verbesserung der Arbeit des Hypsikles über die Aufgänge der Gestirne. Ueber die Verschiedenheit der Spiegelbilder.*)[22] Ueber die geometrische Construction des Astrolabiums. Ueber die geometrische Construction der Mittagslinie und der Gebetsrichtung (n. Mekka). Ueber die geometrische Construction der Sonnenuhren. Ueber die geometrische Auffindung (Construction) der Stunden auf einer Halbkugel. Ueber die Anzeichen aus dem Vogelfluge. Ueber die Construction von Sonnenuhren, die auf Platten errichtet sind, die auf einer zum Horizont parallelen Ebene senkrecht stehen, und die besser sind als die andern.**)

Schriften über die Himmelssphären.

Ueber die Unmöglichkeit der Messung (Berechnung) der äussersten Sphäre, welche die übrigen in Bewegung setzt (oder regiert). Ueber die Erscheinungen an der Himmelssphäre. Abhandlung darüber, dass die Natur der Himmelssphäre von derjenigen der vier Elemente verschieden sei, und dass sie ein fünftes Element sei.[23] Ueber die äusserste Welt (Sphäre). Ueber die Anbetung des Schöpfers durch den entferntesten Körper. Ueber die Widerlegung der Manichäer in Betreff der zehn Sätze über die Grundlagen der Himmelssphäre. Ueber die Sternbilder.[24] Abhandlung darüber, dass es unmöglich sei, dass der Weltkörper (wohl das Weltall gemeint) unendlich sei. Ueber die verschiedenen Anblicke des Himmels. Ueber die Unmöglichkeit, dass der entfernteste Körper gekrümmt sei(?)[25] Ueber des Ptolemaios künstliche Darstellung von Sphären.[26] Ueber die Endlichkeit des Weltkörpers. Ueber die gegebenen Grössen. Ueber das Wesen der Himmelssphäre und der ihr eigenen blauen Farbe, welche wahrgenommen wird an der Oberfläche des Himmels. Ueber das Wesen des Körpers (Weltkörpers?), dem die Farben (oder Formen) der vier Elemente eigen sind. Ueber den Beweis der Bewegung des Körpers (wohl Weltkörpers, Himmelsgewölbes) und das Wesen des Lichtes und der Finsterniss.***)

[Auf die medicinischen folgen neun rein astrologische Schriften, die ich weglasse.]

---

*) Ist wohl eine irrthümliche Wiederholung des im Anfang genannten Werkes.

**) Auch hier führt Flügel (al-Kindî p. 26—27) noch vier weitere Abhandlungen aus andern Manuscripten an.

***) Flügel (al-Kindî, p. 27—28) gibt noch fünf weitere Schriften aus andern Manuscripten an.

Meteorologische Schriften.

Ueber die Erklärung der Ursache, die unmittelbar das Werden und Vergehen in den vergänglichen Wesen bewirkt. Ueber die Ursache, wesshalb man sagt, dass das Feuer, die Luft, das Wasser, die Erde die Elemente aller vergänglichen Wesen seien, und dass sie und andere von einem Zustand in den andern übergehen können. Ueber die Verschiedenheit der Zeitperioden, in denen sich die Kräfte der vier ersten Qualitäten (der vier Elemente?) zeigen (zur Geltung kommen). Ueber die zeitlichen Verhältnisse.[27] Ueber die Ursache der Verschiedenheit der Eigenthümlichkeiten des Jahres. Ueber das Wesen der Zeit, der Epochen und der Ewigkeit (ewiger Kreislauf der Zeiten, unendliche Zeit). Ueber die Ursache, wesshalb die obere Luftschicht kalt, die näher an der Erde befindliche warm ist. Ueber die Lufterscheinungen. Ueber die glänzende Erscheinung, welche sich in der Luft zeigt und Stern (bedeutet hier wohl Sternschnuppe oder Meteor) genannt wird. Ueber den Kometen.[28] Ueber den Stern, welcher für einige Tage erschien und beobachtet wurde bis er verschwand. Ueber die Ursache der Kälte, die man Alt-Weiberkälte nennt.[29] Ueber die Ursache des Entstehens des Nebels und der von ihm während seiner Dauer hervorgebrachten Erscheinungen. Ueber die Beobachtung des im Jahre 222 d. H. erfolgten grossen Phänomens (vielleicht Komet oder Meteor).

Schriften über die Entfernungen.

Ueber die Ausdehnung der einzelnen Klimata. Ueber die bewohnten Gegenden (Orte). Die grosse Abhandlung über das bewohnte Viertel der Erde. Ueber das was berichtet wird von den Entfernungen der Körper (Himmelskörper?). Ueber die Auffindung der Entfernung des Mondcentrums von der Erde. Ueber die Erfindung und Construction eines Instrumentes, mit dessen Hülfe die Entfernungen der Körper gefunden werden. Ueber die Construction eines Instrumentes, mit welchem die Entfernungen der für uns sichtbaren Körper bestimmt werden. Ueber die Bestimmung der Entfernungen (Höhen?) der Berggipfel.[30]

[In der Abtheilung, welche die Schriften enthält, die sich mit den Arten der Dinge beschäftigen, befinden sich noch folgende Erwähnenswerthe]: Die grosse Abhandlung über die Körper, die im Wasser tauchen. Ueber die beiden im (am) Wasser wahrzunehmenden Phänomene (Ebbe und Fluth?). Ueber Fluth und Ebbe.[31] Ueber die fallenden Körper.[32] Ueber die Construction der Brennspiegel. Ueber die Gluth (vielleicht Brennpunkt?) des Spiegels. Ueber die Entstehung der Dünste im Innern der Erde, welche viele Erdbeben und Einstürze[33] erzeugen. Beantwortung von 14 physikalischen Fragen, die einer seiner Freunde (Genossen) an ihn gestellt hatte.

Ueber die Ursache des Donners, des Blitzes, des Schnees, des Hagels, der Donnerschläge und des Regens. Ueber die Nichtigkeit der Behauptungen derjenigen, die sich anmassen, die Kunst des Gold- und Silbermachens zu verstehen und über ihre Betrügereien.

Ahmed ben aṭ-Ṭajjib.[34]

Sein voller Name ist Abû'l-ʿAbbâs Aḥmed ben Muḥammed ben Merwân as-Sarachsî; er war ein Schüler von Al-Kindî und Lehrer und Vertrauter des Chalifen al-Muʿtaḍid. Er schrieb [unter Anderem]: Das grosse Buch der Nester und der Rechenkunst.[35] Das kleine Buch des Nestes der Künste[36] und des Rechnens. Einleitung in die Astrologie. Das grosse Buch über die Musik, in zwei Theilen; es gibt keines, das ihm an Vortrefflichkeit gleichkommt. Das kleine Buch über Musik. Das Buch der Arithmetik, über die Zahlen und über die Algebra.[37] Einleitung in die Musik.

Ibn Karnîb.[38]

Abû Aḥmed al-Ḥusain ben Abî'l-Ḥusain Isḥâḳ ben Ibrâhîm ben Jazîd, der Schreiber, bekannt unter dem Namen Ibn Karnîb, ein bedeutender Naturphilosoph — sein Bruder Abû'l-ʿAlâ war Geometer — er schrieb: Widerlegung des Abû'l-Ḥasan Ṯâbit ben Ḳurra, betreffend seine Negation der Nothwendigkeit der Existenz von Ruhepunkten zwischen je zwei entgegengesetzten Bewegungen.[39]

Abû Jaḥjâ al-Merwazî[40]

war ein in Geometrie bewanderter Arzt. [Es werden keine Schriften von ihm angeführt.]

Mattâ ben Jûnus.[41]

Abû Bischr Mattâ ben Jûnus, ein Grieche, Uebersetzer aus dem Syrischen ins Arabische und erster Logiker seiner Zeit. Er übersetzte [unter Anderem] auch den Commentar des Alexander (von Aphrodisias) zum Buche des Aristoteles „über den Himmel“, verbessert von Abû Zakarijjâ Jaḥjâ ben ʿAdî.

Ibn Zurʿa.

Abû ʿAlî ʿÎsâ ben Isḥâḳ ben Zurʿa ben Marḳus ben Zurʿa ben Jûḥannâ, war jakobitischer Christ und berühmter Logiker, Philosoph und Uebersetzer; er wurde geboren zu Bagdad im Jahre 331 (943)[42] und schrieb [unter Anderem]: Einen Auszug aus dem Buche des Aristoteles über die bewohnte Erde. Ueber die Bedeutung (oder über die Ideen) eines Theils des dritten Buches der Schrift des Aristoteles „über den Himmel“.

Ibn al-Chammâr.

Abû'l-Chair al-Ḥasan ben Sawwâr ben Bâbâ ben Bihrâm, Logiker, geboren im Jahre 331 (943),[43] schrieb [unter Anderem]: Ein Buch über die Erscheinungen der Atmosphäre, die aus dem Wasserdampf entstehen und welche sind: die Höfe, der Regenbogen und der Nebel. Aus dem Syrischen ins Arabische übersetzte er das Buch über die Meteorologie (wahrscheinlich des Aristoteles).

II. Unterabtheilung.

Sie enthält die Geschichten der Geometer, der Arithmetiker, der Musiker, der Rechner, der Astronomen, der Verfertiger von Instrumenten und der Mechaniker.

Eukleides.

Ein Geometer; er war der Sohn des Naukrates, des Sohnes des Bereneikes (?); er lehrte die Geometrie und trat auf diesem Gebiete als Autor auf früher als Archimedes und Andere, er gehörte zu den exacten Philosophen.

Ueber sein Buch „Von den Elementen der Geometrie". Sein Titel ist *στοιχεῖα*[44] und dies bedeutet: Elemente der Geometrie. Es wurde übersetzt von al-Ḥidschâdsch ben Jûsuf ben Maṭar zwei Mal: die eine Uebersetzung ist bekannt unter dem Namen der Hârûnischen und diese ist die erste, die andere trägt den Namen der Mâmûnischen, diese ist die zuverlässigere (wörtlich: man vertraut, man verlässt sich auf sie). Ferner übersetzte Isḥâḳ ben Ḥunain das Werk, verbessert wurde diese Uebersetzung von Ṯâbit ben Ḳurra al-Ḥarrânî; auch übersetzte Abû ʿUṯmân ad-Dimischḳî einige Bücher desselben — ich sah das zehnte in Mossul, in der Bibliothek des ʿAlî ben Aḥmed al-ʿImrânî, einer seiner Diener war Abû'ṣ-Ṣaḳr al-Ḳabîṣî, und dieser las ihm den Almagest*) vor zu unserer Zeit. — Dieses Buch (die Elemente nämlich) commentierte dann, indem er seine Schwierigkeiten zu lösen suchte, Heron. Ferner commentierte es an-Nairîzî, ebenso al-Karâbîsî, dessen später noch Erwähnung gethan wird. Einen Commentar zum ganzen Buche von Anfang bis zu Ende schrieb ferner al-Dschauharî — er wird noch erwähnt werden. — Ein weiterer Commentar zum fünften Buche existiert von al-Mâhânî;**) es berichtete mir ferner Naẓîf der Arzt, dass er das zehnte Buch des Eukleides griechisch gesehen habe, dasselbe hatte 40 Sätze mehr als das, welches in den Händen

*) Wird auch allgemein für Astronomie gebraucht.

**) Das Ms. 952. 2 (Suppl. arabe) in Paris enthält einen Commentar dieses Autors zum 10. Buche; vergl. Woepke, Essai d'une restitution, etc. in Mém. prés. par div. Sav. à l'acad. Tom. XIV. Paris, 1856. p. 669.

der Leute war und dieses hatte 109 Sätze, und dass er sich entschlossen habe, dasselbe ins Arabische zu übertragen. Es erzählt auch Johannes al-Ḳass (d. h. der Priester), dass er den Satz, welchen Ṯâbit im ersten Buche für sich in Anspruch nahm, in dem ihm gehörenden griechischen Exemplar gesehen habe; es bestätigte auch Naẓîf, dass er (Joh. al-Ḳass) es ihm gezeigt habe. Auch Abû Dscha'far al-Châzin al-Chorâsânî — er wird später noch erwähnt werden — verfasste einen Commentar zu dem Buche des Eukleides, ebenso Abû'l-Wafâ, aber er vollendete ihn nicht; dann commentierte das zehnte Buch ein Mann, Namens Ibn Rahiwaih al-Ardschânî, ferner das ganze Werk Abû'l-Ḳâsim al-Anṭâḳî,*) nachdem es übersetzt worden war;[45] auch war es commentiert worden von Sind ben 'Alî — es sah Abû 'Alî neun Bücher desselben und einen Theil des zehnten — das zehnte commentierte auch Abû Jûsuf ar-Râzî, und zwar vortrefflich im Auftrage von Ibn al-'Amîd. Al-Kindî in seiner Abhandlung „über die Zwecke des Eukleidischen Buches" erwähnt, dass dieses Buch von einem Manne Namens Apollonios(?),[46] dem Zimmermann, verfasst worden sei, und dass er es in 15 Abschnitten entwarf; zu der Zeit nun, da das Buch schon veraltet und verbesserungsbedürftig geworden war, entschloss sich einer der Könige von Alexandria zum Studium der Geometrie; nun lebte zu seiner Zeit Eukleides und diesen beauftragte er mit der Umarbeitung des Buches und seiner Commentierung; dies that er und so wird es auf ihn (als Verfasser) zurückgeführt. Später fand Hypsikles, ein Schüler des Eukleides, noch zwei Bücher, das vierzehnte und fünfzehnte, und brachte sie dem König und dieselben wurden dem Buche noch hinzugefügt — und dies geschah alles in Alexandria. — Zu den Schriften des Eukleides gehören ferner: Das Buch der (himmlischen) Erscheinungen.[47] Das Buch von der Verschiedenheit der Bilder (Optik). Das Buch der gegebenen Grössen (Data). Das Buch der Töne, bekannt unter dem Namen der Musik: unächt. Das Buch der Theilung,[48] verbessert von Ṯâbit. Das Buch der Nutzanwendungen (Porismen):[49] unächt. Das Buch des Kanon.[50] Das Buch vom Schweren und Leichten.[51] Das Buch der Zusammensetzung (Synthesis): unächt. Das Buch der Auflösung (Analysis): unächt.[52]

Archimedes.

Es erzählte mir der (ein) Vertrauenswürdige, dass die Griechen von Büchern des Archimedes 15 Lasten verbrannt hätten; die ausführliche Darlegung dieser Geschichte würde zu lange dauern, wir geben daher nur seine noch vorhandenen Schriften an: Zwei Bücher über die Kugel und

---

*) d. h. von Antiochia.

den Cylinder. Ein Buch über die Quadratur des Kreises.[53] Ein Buch über die Siebentheilung des Kreises.[54] Ein Buch über die sich berührenden Kreise. Ein Buch über die Dreiecke.[55] Ueber die parallelen Linien.[56] Das Buch der angenommenen Grössen (Assumptorum) für die Elemente der Geometrie.[57] Ein Buch über das Vorausgesetzte (Gegebene, Bestimmte).[58] Ein Buch über die Eigenschaften der rechtwinkligen Dreiecke.[59] Ein Buch über die Wasseruhren, welche Schleudersteine werfen. (?)[60]

Hypsikles.

Ein Buch über die Körper (Himmelskörper?) und die Entfernungen.[61] Ein Buch über die Aufgänge, d. h. über den Auf- und Untergang (der Gestirne). Er verbesserte (oder stellte wieder her) das 14. und 15. Buch der Elemente des Eukleides.[62]

Apollonios.

Er ist der Verfasser des Buches der Kegelschnitte. Es erwähnen die Söhne Mûsâs im Anfang (Einleitung) des Buches der Kegelschnitte (wahrscheinlich Uebersetzung und Commentar des Apollonischen Werkes), dass Apollonios aus Alexandria (gebürtig) war, und dass sein Buch über die Kegelschnitte verdorben war, erstens, weil das Manuscript schwierig[63] war, daher auch seine Commentierung vernachlässigt wurde, und zweitens, weil die Erinnerung an das Buch verwischt und verschwunden war; so kam es, dass ganz verschieden lautende Exemplare sich in den Händen der Leute befanden, bis ein Mann aus Askalon mit Namen Eutokios auftrat, der sehr bewandert war in der Geometrie — die Söhne Mûsâs behaupten, dass dieser Mann vortreffliche Bücher über Geometrie verfasst habe, dass aber gar nichts von denselben bis auf uns gekommen sei —; nachdem dieser von dem Buche gesammelt hatte, was er im Stande war, brachte er wieder vier Bücher in Ordnung — die Söhne Mûsâs sagen, das Werk habe acht Bücher gehabt und es seien von ihm noch sieben und ein Theil des achten vorhanden, die vier ersten Bücher seien unter der Leitung Aḥmed ben Mûsâs übersetzt worden von Hilâl ben Abî Hilâl al Ḥimṣî (aus Emesa), und die drei letzten von T̲âbit ben Ḳurra al- Ḥarrânî, und was vom achten Buche noch gefunden wurde, seien vier Sätze —. Also ist von Apollonios vorhanden das Buch der Kegelschnitte in sieben Büchern und einem Theil des achten. Er verfasste ferner: Zwei Bücher über den Schnitt der Linien nach (gegebenem) Verhältniss.[64] Zwei Bücher über das bestimmte Verhältniss:[65] das erste Buch verbesserte T̲âbit, und das zweite, obgleich ins Arabische übersetzt, ist nicht zu verstehen. Ein Buch über den Schnitt der Flächen nach (gegebenem) Verhältniss.[66] Ueber die sich berührenden

Kreise.[67] Noch wird von Ṯâbit ben Ḳurra erwähnt, dass von Apollonios eine Abhandlung herrühre über den Satz, dass zwei Linien (Gerade), die von einer dritten unter weniger als zwei rechten Winkeln ausgehen, sich schneiden.[68]

Hermes.[69]

Wir haben ihn schon früher erwähnt. Von astrologischen Schriften verfasste er: Ueber die Breite, erster Schlüssel der Gestirne. Ueber die Länge, zweiter Schlüssel der Gestirne. Ueber den Umlauf der Gestirne (Planeten?). Ueber die Gradeintheilung des Umlaufes (Umwälzung, Umdrehung)[70] der Jahre der Geburten. Das Buch über das Verborgene, d. h. über die Geheimnisse der Gestirne, auch genannt „die goldene Ruthe“.

Eutokios.

Er verfasste: Einen Commentar zum ersten Buche des Archimedes über die Kugel und den Cylinder. Das Buch über die zwei Linien; er bewies dies Alles (d. h. den ganzen Inhalt des Buches) mit Aussprüchen (Sätzen) der mathematischen Philosophen;[71] es wurde ins Arabische übersetzt von Ṯâbit und man fand es vortrefflich. Einen Commentar zum ersten Buch des Ptolemaios über das Urtheil aus den Gestirnen (de judiciis astrorum).[72]

Menelaos.

Er lebte vor Ptolemaios, denn dieser erwähnt ihn im Almagest. Er verfasste: Das Buch über die sphärischen Sätze (Sphaerik). Ueber die Kenntniss der Grösse und Eintheilung (Unterscheidung) der verschiedenen[73] Körper (Himmelskörper?), verfasst im Auftrag des Kaisers Domitianus.[74] Drei Bücher über die Elemente der Geometrie, (neu-) bearbeitet von Ṯâbit ben Ḳurra. Das Buch über die Dreiecke: einiges Wenige davon wurde ins Arabische übersetzt.

Ptolemaios.

Er ist der Verfasser des Almagestes und lebte zur Zeit von Hadrian und Antonin; zu dieser Zeit beobachtete er die Gestirne und für den einen derselben schrieb er den Almagest. Er war auch der erste, welcher ein sphärisches Astrolabium und (andere) astronomische Instrumente verfertigte, und Messungen und Beobachtungen machte. Es wird aber auch gesagt, dass schon vor ihm viele Andere die Sterne beobachtet hätten, zu denen auch Hipparchos gehörte, und dass dieser sein Lehrer war, von dem er (die Beobachtung) lernte; aber die Beobachtung ist nicht vollkommen ohne das Instrument, und der Anfänger im Beobachten wird ein Künstler mit Hülfe des Instrumentes.

Ueber den Almagest: Dieses Werk hat 13 Bücher; der erste, der um seine Commentierung und Uebersetzung ins Arabische besorgt war, war Jaḥjâ ben Châlid ben Barmak; an dieser Commentierung nun arbeiteten für ihn eine Menge von Leuten, die es aber nicht geschickt ausführten, so dass er damit nicht zufrieden war und zu einer andern Commentierung den Abû Ḥussân*) und den Salm (oder Salam), den Verfasser des Bait al-Ḥikma,**) aufforderte, welche es geschickt in Ordnung brachten und Anstrengungen zu seiner Verbesserung machten, indem sie gute Uebersetzer kommen liessen; als sie deren Uebersetzung geprüft hatten, waren sie erstaunt über ihre Klarheit und Vollkommenheit (Richtigkeit).

Es wurde schon gesagt,***) dass auch al-Ḥidschâdsch ben Maṭar dieses Werk übersetzt hat, welche Uebersetzung von an-Nairîzî umgearbeitet (commentiert) wurde. Auch Ṯâbit verbesserte das ganze Werk nach der ältern Uebersetzung; ferner übersetzte es Isḥâḳ (ben Ḥunain), und Ṯâbit verbesserte auch diese Uebersetzung, welche aber nicht befriedrigend war, also ist seine erste Verbesserung ausgezeichneter. — Ausser diesem schrieb er noch: Das Quadripartitum, (gerichtet) an Syros, seinen Schüler; es übersetzte dieses Buch Ibrâhîm ben aṣ-Ṣalt und verbesserte es Ḥunain ben Isḥâḳ; Eutokios commentierte das erste Buch, ebenso das ganze erste Buch Ṯâbit und erklärte seinen Sinn; ebenso wurde es commentiert von ʿOmar ben al-Farruchân, Ibrâhîm ben aṣ-Ṣalt, an-Nairîzî und al-Battânî. Das Buch der Geburten.[75] Das Buch vom Krieg und Kampf. Ueber die Auffindung der Loose.[76] Ueber den Umlauf der Jahre der Welt. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Ueber die Krankheiten und die heilenden Getränke. Ueber den Lauf der sieben (Planeten?).[77] Ueber die Gefangenen und Eingekerkerten. Ueber das Ansichziehen und Dienstbarmachen des Glückes (der Glücksterne). Ueber die beiden Prozessgegner, welcher von ihnen Erfolg habe. Ueber die Personen des Adels (der Würde). Das Buch bekannt unter dem Namen des „Siebenten“ (?).[78] Das Buch über das Loos, in Tafeln geordnet. Das Buch über die Beschreibung der Stellungen der Gestirne (Planeten). Das Buch, betitelt die Frucht,[79] commentiert von Aḥmed ben Jûsuf al-Miṣrî, dem Geometer. Die Geographie: über das bewohnte Land, eine Beschreibung der Erde; dieses Buch enthält acht Abschnitte, für (oder von?) al-Kindî wurde davon eine schlechte Uebersetzung gemacht, nachher übersetzte es auch Ṯâbit und zwar vortrefflich; es existiert auch in syrischer Sprache.[80]

---

*) Casiri (I. p. 350) hat Abû Ḥijân.

**) Haus der Weisheit (Wissenschaft): grosses, wissenschaftliches Sammelwerk.

***) p. 244 des Fihrist, wo von den Uebersetzern gesprochen wird.

Autolykos.

Er schrieb: Ueber die sich bewegende Sphäre, verbessert von al-Kindî.[81] Drei Bücher über den Auf- und Untergang (der Gestirne).

Simplikios, der Grieche.[82]

Er verfasste: Einen Commentar zum Anfang des Buches des Eukleides, welcher eine Einleitung in die Geometrie bildet.[83] Einen Commentar zum vierten Buch der Kategorien des Aristoteles.[84]

Dorotheos.[85]

Er schrieb: Ein grosses Buch, welches eine Anzahl von Abhandlungen enthält und das Buch der Fünfe (πεντάτευχος) genannt wird; es wurde aber noch mehr hinzugefügt, wie ich sogleich erwähnen werde. Die erste Abhandlung handelt über die Geburten, die zweite über die Verheirathung (Paarung) und über die Nachkommen,[86] die dritte über den Regenten der Geburtsstunde und denjenigen der Lebenszeit, die vierte über den Umlauf der Geburtsjahre, die fünfte über den Beginn der Handlungen, die sechste ..... (Lücke), die siebente über die Fragen und die Geburten; von ihm ist auch die 16. Abhandlung über den Umlauf der Geburtsjahre;*) diese Abhandlungen wurden von ʿOmar ben al-Farruchân at-Tabarî commentiert.[87]

Theon von Alexandria.

Er schrieb: Ueber den Gebrauch der Armillarsphären. Das Buch über die astronomischen Tafeln des Ptolemaios, bekannt unter dem Namen Ḳânôn al-Masîr.[88] Ueber den Gebrauch des Astrolabiums. Einleitung in den Almagest, ist in einer ältern Uebersetzung vorhanden.[89]

Valens, der Grieche.[90]

Er verfasste: Einleitung in die Kunst der Astrologie. Ueber die Geburten. Das Buch der Fragen. Das Buch az-Zabradsch(?)**), commentiert von Buzurdschmihr.[b] Das grosse Buch der Fragen jeder Art. Das Buch der unumschränkten Herrschaft (oder des Kaisers). Ueber den Regen. Ueber den Umlauf der Jahre der Welt. Das Buch der Könige.

Theodosios.[91]

Er schrieb: Drei Bücher über die Kugeln (Sphärik). Ein Buch über die Wohnungen (bewohnte Orte der Erde). Zwei Bücher über Tag und Nacht.

---

*) Scheint eine Wiederholung der vierten zu sein.

**) Vergl. Abû Maʿschar, Anmerkung 188.

Pappos, der Grieche.[92]

Seine Schriften sind: Ein Commentar zum Buche des Ptolemaios über die ebene Darstellung der Kugel (Planisphaerium), übersetzt von Ṯâbit ins Arabische. Ein Commentar zum zehnten Buche des Eukleides, in zwei Theilen.[93]

Heron.

Er schrieb: Das Buch der Erklärung (Auflösung) der Undeutlichkeiten bei Eukleides.[94] Ueber den Gebrauch des Astrolabiums. Vom Aufziehen der Lasten (Gewichte).[95] Ueber die durch Luft bewegten Maschinen (wörtlich: über die Luftkräfte).[96]

Hipparchos .... (Lücke) az-Zafanî?[97]

Er verfasste: Das Buch über die Kunst der Algebra, bekannt unter dem Namen: Die Regeln (Definitionen). Es wurde ins Arabische übersetzt, dann verbessert von Abû'l-Wafâ Muḥammed ben Muḥammed al-Ḥâsib (d. h. dem Rechner), dieser commentierte es auch und versah es mit geometrischen Beweisen. Das Buch über die Theilung der Zahlen.

Diophantos.

War ein Grieche aus Alexandria; er schrieb: Ueber die Kunst der Algebra.

Thadinos?[98]

Er schrieb: Ueber die Sündfluthen (allgemeines Sterben). Ueber die Kometen.

Nikomachos von Gerasa.

Er verfasste: Zwei Bücher über Arithmetik. Das grosse Buch über die Musik, von diesem existieren Auszüge (Compendien).

Badrogogia?[99]

Er verfasste: Das Buch über die Heraufziehung(?) des Wassers (wörtlich der Wasser),*) in drei Abschnitten: der erste enthält 39, der zweite 36 und der dritte 30 Capitel.

Tinkalos (oder Tinklos)? der Babylonier.[100]

Dieser war einer der sieben Gelehrten, auf welche aḍ-Ḍihâk die sieben Häuser zurückführt, die nach den Namen der sieben Planeten (benannt) erbaut worden sind. Er schrieb: Ueber die Dekane und die Planetenbezirke.[101]

Tinkaros (oder Tinkros)? der Babylonier.[100]

Dieser gehörte (auch) zu den sieben Aufsehern beim Tempeldienst der Häuser, und ich halte ihn für den Vorsteher des Hauses des Mars,

---

*) Könnte auch heissen: über das Auffinden von Wasser.

als welcher er mir auch in einigen Schriften begegnet ist. Er schrieb: Das Buch der Geburten nach den Dekanen und Planetenbezirken.

Muritos (auch Muristos)?[102]

Er verfasste: Das Buch über die tönenden Instrumente, genannt die Trompete und die Flöte (Pfeife). Ueber das tönende Instrument, welches auf 60 Meilen weit gehört wird.

Sâʿâtos?[103]

Er schrieb: Ueber das schreiende (?) Glöckchen.

Herkal (Herakles?) der Zimmermann.[104]

Er schrieb: Ueber die Kreise und die Wasserräder.[105]

Kitwar? der Babylonier.[106]

Er gehörte zu den sieben Tempelwächtern und schrieb: Ein Buch über die Astrologie.

Aristoxenos.[107]

Er gehörte zu den Musikern und schrieb: Ein Buch über den Rhythmus. Ein Buch über die Harmonie.

Mazâbâ.

Ich habe in einer Schrift von Abû Maʿschar gelesen, dass dieser der Astrolog Nebukadnezars war; er verfasste nach den Angaben Abû Maʿschars — gesehen habe ich es nicht — das Buch der Könige, der Dynastien (Schicksalswechsel), der Conjunctionen und des Umlaufes (der Jahre).

Aristarchos.

War ein Grieche aus Alexandria; er verfasste das Buch über die Sonne und den Mond.[108]

Apion? der Patriarch.[109]

Ich setze ihn um weniges vor Beginn des Islams, oder um ganz wenig nach demselben. Er schrieb: Ueber den Gebrauch des Planisphaeriums.

Kankah (auch Katkah) der Indier.[110]

Er schrieb: Das Buch „an-Nimûdâr“ über die Lebenszeiten.[111] Ueber die Geheimnisse der Geburten. Das grosse Buch über die Conjunctionen. Das kleine Buch über die Conjunctionen.

Dschûdar, der Indier.

Er schrieb: Das Buch der Geburten, es wurde ins Arabische übersetzt.

Sandschahl (oder Sandschahal) der Indier.

Er schrieb: Ueber die Geheimnisse der Fragen.

Nahak, der Indier.

Er schrieb: Das grosse Buch der Geburten.[112]

Zu den indischen Gelehrten, von denen Schriften über Astrologie und Medicin (kann auch heissen Magie) auf uns gekommen sind, gehören noch: Bâkhur, Râḥah (auch Râdschah), Ṣukah (auch Ṣufah), Dâhir, Ânkû (auch Ânkar), Zankal, Arîkal, Dschabhar, Andî, Dschabârî (auch Dschârî oder Dschâdî).[113]

Es folgt eine Reihe von neueren Geometern, Mechanikern, Arithmetikern und Anderen.

Die Söhne Mûsâs.

Muḥammed, Aḥmed und Ḥasan waren die Söhne Mûsâ ben Schâkirs und es ist die Abstammung Mûsâ ben Schâkirs .... (Lücke) ... Diese Leute gehörten zu denjenigen, welche es im Erforschen der Wissenschaften der Alten zu einem hohen Ziele brachten, sie opferten ihren Reichthum und ihr ganzes Sein diesem Zwecke; sie sandten diejenigen, die für sie die Herbeischaffung jener Werke besorgen mussten, nach den griechischen Ländern und liessen aus den verschiedensten Gegenden Uebersetzer um schweres Geld herkommen; so wurden sie als Wunder der Gelehrsamkeit angesehen. Sie verlegten sich hauptsächlich auf Geometrie, Mechanik und Musik, weniger auf Astrologie.[114] Muḥammed ben Mûsâ starb im ersten Rebîʿ des Jahres 259 d. H. (873). Aḥmed hatte einen Sohn, Namens Muṭahhar,[115] von geringer Bildung, er (wahrscheinlich Aḥmed) gehörte zu den Genossen al-Muʿtaḍids. Die Schriften der Söhne Mûsâs sind: Das Buch über die Waage.[116] Die Mechanik (eigentlich die Kraft) von Aḥmed ben Mûsâ. Ueber die länglich-runde Figur von Ḥasan ben Mûsâ.[117] Ein Buch über die Bewegung der ersten Sphäre von Muḥammed. Das Buch der Kegelschnitte.[118] Das Buch (der) Drei (?) von Muḥammed.[119] Von der geometrischen Figur, deren Eigenschaften Galenos erklärt hat, von Muḥammed.[120] Ueber den Theil, von Muḥammed.[121] Das Buch, in welchem auf erklärendem[122] (auch belehrend, oder auch zeichnend) und geometrischem Wege dargethan wird, dass ausserhalb der Fixsternsphäre keine neunte Sphäre existiert, von Aḥmed ben Mûsâ. Ueber die Priorität der Welt (vielleicht auch „Anfang“), von Muḥammed. Ueber die Frage, welche Aḥmed ben Mûsâ dem Sind ben ʿAlî vorlegte. Ein Buch über das Wesen der Rede (Rhetorik, Metaphysik),[123] von Muḥammed. Ueber die Fragen, um

welche es sich ebenfalls zwischen Sind und Aḥmed handelte. Das Buch über die Ausmessung der Kugel, die Dreitheilung des Winkels und die Auffindung einer Grösse (sollte heissen „zweier Grössen") zwischen zwei (gegebenen) Grössen, so dass sie stetig aufeinanderfolgen nach einem und demselben Verhältniss.[124]

Al-Mâhânî.[125]

Abû ʿAbdallâh Muḥammed ben ʿÎsâ gehörte zu den in Arithmetik und Geometrie Gelehrten und verfasste: Eine Abhandlung über die Throne (?) der Gestirne.[126] Ueber das Verhältniss. Ueber 26 Sätze des ersten Buches des Eukleides, welche keinen Widerspruch herausfordern (d. h. Axiome und Definitionen?).[127]

Al-ʿAbbâs.[128]

Ibn Saʿîd al-Dschauharî gehörte zu den (astronomischen) Beobachtern, doch widmete er sich hauptsächlich der Geometrie. Er schrieb: Einen Commentar zu dem Buche des Eukleides. Das Buch der Sätze, die er zum ersten Buche des Eukleides hinzugefügt hat.

Ṯâbit ben Ḳurra und seine Nachkommen.

Abû'l-Ḥasan Ṯâbit ben Ḳurra ben Merwân ben Ṯâbit ben Karâjâ ben Ibrâhîm ben Karâjâ ben Marînos ben Salamujos (?) wurde geboren im Jahre 211 und starb im Jahre 288 d. H. und wurde also 77 Sonnenjahre alt.[129] Er war Wechsler in Ḥarân, dann nahm ihn Muḥammed ben Mûsâ, als er aus den griechischen Ländern zurückgekehrt war, zum Genossen (Mitarbeiter und Freund) an, weil er ihn als sprachgewandt erkannt hatte; und es wird erzählt, dass er im Hause Muḥammed ben Mûsâs von diesem in den Wissenschaften unterrichtet wurde, und dass dieser, da er ihn hiefür würdig erfunden hatte, ihn in Freundschaft mit (dem Chalifen) al-Muʿtaḍid verband und in den Kreis der Astronomen einführte. Ṯâbit begründete die Herrschaft der Ṣabier in diesen Gegenden und in der Residenz der Chalifen, ihre Macht befestigte sich immer mehr, ihr Ansehen hob sich und sie ragten (an Tugend und Wissen) hervor. — Ṯâbit schrieb: Ueber die (Zeit-) Rechnung nach den Neumonden. Ueber das Sonnenjahr. Ueber die Auflösung der geometrischen Aufgaben (Fragen). Ueber die Zahlen.*) Ueber die Figur (Satz) al-Ḳaṭṭâʿ (d. h. die Schneidende, Sekante).[130] Ueber den dem Sokrates zugeschriebenen Beweis. Ueber die Aufhebung der Bewegung im Thierkreis.[c] Ueber die in der Blase entstehenden Steine. Ueber Gelenkschmerz (Gicht) und Podagra. Ueber die Ursache, welche das Salzigsein des Meerwassers bewirkt. Ueber den Aus-

---

*) Vergl. Cantor, Vorlesungen I. p. 631.

satz, welcher am Leibe sich zeigt. Eine Abhandlung an Dânik (auch Zânik). Ein Auszug aus dem Buche des Galenos „über die einfachen Heilmittel." Ueber die Blattern und Masern (?)[131] Zu seinen Schülern gehört:

ʿÎsâ.

Ibn Usajjid an-Nasrânî, wurde von Tâbit hochgestellt und gelobt. Er machte Uebersetzungen aus dem Syrischen ins Arabische unter Leitung von Tâbit und schrieb (ausserdem): Die Antworten Tâbits auf die Fragen ʿÎsâ ben Usajjids.*)

Sinân ben Tâbit.

Er starb als Muslim (Gläubiger: hier im Gegensatz zu Sabier). Man wird seiner Erwähnung unter den Medicinern wiederbegegnen;[132] ebenso wird dort erwähnt werden sein Sohn Abû'l-Hasan.[133]

Abû'l-Hasan al-Harrânî.

Man findet ihn ebenfalls unter den Medicinern erwähnt.[134]

Ibrâhîm ben Sinân ben Tâbit.

Sein Beiname war Abû Ishâk; er starb schon früh und war ein vortrefflicher, hervorragender Geometer, so dass zu seiner Zeit Keiner gefunden wurde, der ihn an Scharfsinn übertroffen hätte; er starb im Jahre .... (Lücke).[135] Er schrieb: Einen Commentar zum ersten Buche der Kegelschnitte, der aber nicht vollständig ist. Ueber die Zwecke des Almagestes.[136]

Abû'l-Husain ben Karnîb und Abû'l-ʿAlâ, sein Sohn.[137]

Beide wurden schon unter den Naturphilosophen erwähnt im Artikel über Abû Ahmed ben Abî'l-Husain. Abû'l-Husain und Abû'l-ʿAlâ gehörten zu den Mathematikern (Zeichnern?) und Geometern, der erstere verfasste die Schrift: Wie erkennt man, wie viel Stunden des Tages vorüber sind mit Hülfe der bestimmten Höhe (der Sonne).

Abû Muhammed al-Hasan.[138]

Ibn ʿUbaidallâh ben Sulaimân ben Wahb. Er schrieb: Einen Commentar in einem Buche zu den schwierigen Partien des Eukleidischen Buches über das Verhältniss.[139]

---

*) Sollte wohl unter den Personen eine Umstellung stattfinden

Eine andere Klasse und zwar die Neueren.*)

Al-Fazârî.[140]

Abû Isḥâḳ Ibrâhîm ben Ḥabîb al-Fazârî gehörte zu den Nachkommen Samara ben Dschindabs; er war der erste Muslim, welcher ein Astrolabium verfertigte, ebenso construierte er ein Mubaṭṭaḥ[141] und ein Planisphaerium. Er schrieb: Ein Gedicht über die Astronomie. Ueber das Messinstrument für den wahren Mittag. Astronomische Tabellen nach den Jahren der Araber. Ueber den Gebrauch des Astrolabiums und zwar desjenigen mit Ringen (Armillarsphäre). Ueber den Gebrauch des Planisphaeriums.

ʿOmar ben al-Farruchân.**)[142]

Abû Ḥafṣ ʿOmar ben Ḥafṣ ist der Commentator des Quadripartitum des Ptolemaios, es übersetzte es für ihn der Patriarch Abû Jaḥjâ ben al-Baṭrîḳ. Er verfasste ferner: Das Buch der Vortheile (Vorzüge).[143] Ueber die Uebereinstimmung und die Uneinigkeit der Philosophen in Bezug auf die Bahnen der Planeten.[144]

Sein Sohn Abû Bekr.

Muḥammed ben ʿOmar ben Ḥafṣ ben al-Farruchân aṭ-Ṭabarî war ein vortrefflicher Astronom. Er schrieb: Ueber den Gnomon (Zeiger der Sonnenuhr).[145] Ueber die Geburten. Ueber den Gebrauch des Astrolabiums. Das Buch der Fragen (astrolog.). Das Buch der Einleitung (in?)[146] Ueber die Tagewählerei.[147] Das kleine Buch der Fragen. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Ueber die directiones.[148] Ueber die Neigungen(?)[149] Ueber den Umlauf der Jahre der Welt. Das Buch der directiones bei den Geburten.

Mâ-schâ-allâh.***)[150]

Ibn Aṯarî. Sein eigentlicher Name ist Mîschâ, welches „er wird sich vermehren“ bedeutet.[151] Er war ein Jude und lebte zur Zeit al-Manṣûrs bis auf die Tage al-Mâmûns. Er war unübertroffen zu seiner Zeit in der Astrologie und schrieb: Das grosse Buch über die Geburten, es enthält 14 Abschnitte. Das Buch der 21 (Abschnitte?) über die Conjunctionen, die Secten und Religionen.[152] Ueber die Projection der

---

*) d. h. die muslimitischen Mathematiker; die vorangehenden (von den Söhnen Mûsâs an) waren Ungläubige (Ṣabier, Christen etc.).

**) Nach Flügel (Z. D. M. G. 13. Bd. p. 630); Casiri und Andere schreiben Ferchân.

***) d. h. „Was Gott will.“

Strahlen. Das Buch der Bedeutungen (significationes in der Astrologie des Mittelalters). Ueber die Zusammensetzung der Astrolabien und den Gebrauch derselben. Ueber die Armillarsphären. Ueber Regen und Winde. Ueber die beiden Loose (das günstige und ungünstige). Das Buch, bekannt unter dem Namen „das siebenundzwanzigste“: der erste Abschnitt handelt über den Beginn der Handlungen, der zweite über die Zurückweisung (Zerstörung) der Ordnung (?),[153] der dritte über die Fragen, der vierte über die Zeugnisse der Gestirne, der fünfte über die Ereignisse (Erscheinungen),[154] der sechste über die Bahnen von Sonne und Mond und das, was sie beweisen (was sich dabei zeigt). Ueber die Buchstaben.[155] Ueber die Herrschaft (Herrscher, Sultan). Ueber die Reisen.[156] Ueber die Preise. Ueber die Geburten. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Ueber das Schicksal und den Glauben. Ueber das Urtheilen nach den Conjunctionen und Oppositionen. Ueber die Kranken. Ueber die Sternbilder und das Urtheilen nach ihnen.

Abû Sahl al-Faḍl ben Nûbacht.[157]

War seiner Abstammung nach ein Perser; ich habe die Genealogie der Familie Nûbacht in dem Abschnitt über die Theologen (Metaphysiker) schon erwähnt und gründlich durchgeführt. Er war (angestellt) in der Chalifenbibliothek unter Hârûn ar-Raschîd und übersetzte für diesen Werke aus dem Persischen ins Arabische; er vertraute in seiner Wissenschaft auf die Bücher der Perser. Er schrieb: Das Buch an-Nahmaṭân:*) über die Geburten. Ueber das astrologische Weissagen.[158] Das Buch der Geburten: einzig in seiner Art (oder auch „selten“). Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Das Buch der Einleitung (in?). Ueber die Vergleichung und die Allegorie (?).[159] Das Buch der Citate aus den Sentenzen der Astrologen über die Prophezeiungen, Fragen, Geburten und Anderes.[160]

Sahl ben Bischr.[161]

Abû ʿOṯmân Sahl ben Bischr ben Hânî, wurde als Jude Hâjâ genannt; er diente zuerst dem Ṭâhir ben al-Ḥusain al-Aʿwar, hierauf dem al-Ḥasan ben Sahl; er war ein scharfsinniger und vortrefflicher Mann und schrieb: Die Schlüssel der Urtheile, oder das kleine Fragenbuch. Ueber die beiden Loose. Das grosse Buch der Geburten. Ueber den Umlauf der Jahre der Welt. Das kleine Buch der Einleitung. Das grosse Buch der Einleitung. Das Buch der Astronomie und des Rechnens. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Das kleine Buch der Geburten. Das grosse Fragenbuch. Ueber die Tagewählerei. Ueber die Jahreszeiten (auch Zeitperioden). Ueber den

*) Sollte wohl heissen: an-Nimûdâr. Vergl. Anmerkung 111 zu Kankah.

Schlüssel.[162] Ueber Regen und Winde. Ueber die Bedeutungen. Ueber den Regenten der Geburtsstunde und denjenigen der Lebenszeit. Ueber die Erwägungen (oder das Relative?)[163] Ueber die Verfinsterungen. Das Buch der Synthesis. Er verfasste auch ein grosses Buch, welches 13 Abschnitte enthält und das Wesentliche aus seinen Schriften in sich vereinigt, er nannte es „das zehnte“;[164] er verfasste es in Chorâsân und es wurde mir gesagt, dass die Rumäer es sehr schätzen. Er schrieb auch ein Buch über Algebra, welches sie ebenfalls loben.

Al-Chuwârazmî (oder Chowârezmî).

Muhammed ben Mûsâ, gebürtig aus Chowârezm, arbeitete auf der Chalifenbibliothek unter Mâmûn und gehörte zu den Astronomen.[165] Vor und nach der Zeit, wo Beobachtungen gemacht wurden, pflegten die Leute sich zu verlassen auf seine zwei Tafeln, die unter dem Namen Sind-Hind bekannt sind. Er verfasste: Das Buch der astronomischen Tafeln, in zwei Ausgaben: die erste und die zweite. Ueber die Sonnenuhr. Ueber den Gebrauch des Astrolabiums. Ueber die Construction des Astrolabiums. Das Buch der Zeitrechnung (auch Chronik).[166]

Sind ben ʿAlî, der Jude.

Sein Beiname war Abû'ṭ-Ṭajjib, er war zuerst Jude und ging dann unter Mâmûn zum Islam über und wurde unter seine Astronomen aufgenommen; er ist derjenige, welcher den Tempel (Observatorium) baute, der hinter dem Thor asch-Schamâsijja in der Residenz Bagdad steht; er arbeitete mit den astronomischen Beobachtern, ja war sogar ihr Vorstand. Er schrieb: Ueber die Apotomeen und die Medialen.[167] Ueber die Schneidenden (Sekanten?), in zwei Ausgaben.[168] Ueber die indische Rechnungsweise. Ueber die Vermehrung und die Verminderung. Das Buch der Algebra.[169]

Jaḥjâ ben Abî Manṣûr.[170]

Es wurde seiner schon eingehend an einer andern Stelle Erwähnung gethan; er war einer der Beobachter unter Mâmûn und starb im Lande der Rumäer. Er schrieb: Das Buch der erprobten Tafeln, in zwei Ausgaben, eine erste und eine zweite. Ueber die Bestimmung der Höhe des Sechstels einer Stunde für die Breite von Bagdad. Ein Buch, welches seine Beobachtungen enthält und Abhandlungen über eine Menge anderer Beobachtungen.

Ḥabasch ben ʿAbdallâh.

Al-Merwazî, der Rechner, war ebenfalls einer der Beobachter und wurde über 100 Jahre alt. Er schrieb: Das Buch der damascenischen Tafeln. Das Buch der mâmûnischen Tafeln.[171] Ueber die Entfernungen

und die Körper (Himmelskörper?). Ueber die Construction des Astrolabiums. Ueber die Sonnenuhren und die Gnomone. Ueber die drei sich berührenden Kreise und die Art und Weise der Verbindungen (unter sich). Ueber die Construction der horizontalen, senkrechten, geneigten und schiefen (?) Flächen.[172]

Ibn Ḥabasch.[173]

Abû Dschaʿfar ben Aḥmed ben ʿAbdallâh ben Ḥabasch verfasste ein Buch über das Planisphaerium.*)

Al-Abaḥḥ.

Al-Ḥasan ben Ibrâhîm lebte unter al-Mâmûn und schrieb: Ueber die Tagewählerei, für al-Mâmûn. Ueber den Regen. Ueber die Geburten.

Die Erzählung des Ibn al-Muktafî.[174]

Er sagt: Ich habe in einem Buche von Ibn al-Dschahm folgendes gelesen: Sind ben ʿAlî hatte ein Buch „Einleitung" geschrieben und schenkte es dem Abû Maʿschar, da schrieb sich dieser das Buch selbst zu; nun hat aber Abû Maʿschar die Astronomie erst im vorgerückten Alter studiert und sein Verstand reichte nicht aus für die Abfassung dieses Buches, ebenso wenig wie für die neun Abhandlungen über die Geburten und das Buch über die Conjunctionen, welches an Ibn-al-Bâzjâr gerichtet ist, alle diese sind von Sind ben ʿAlî verfasst.

Al-Ḥasan ben Sahl ben Nûbacht.[175]

Er schrieb: Ueber den helischen Untergang der Mondstationen.[d]

Ibn-al-Bâzjâr.[176]

Muḥammed ben ʿAbdallâh ben ʿOmar ben al-Bâzjâr, ein Schüler von Ḥabasch ben ʿAbdallâh und ein vorzüglicher Astronom, schrieb: Ueber die Atmosphäre, in 19 Theilen (nach anderen Codices auch nur sieben). Das Buch der astronomischen Tafeln. Ueber die Conjunctionen und den Umlauf der Jahre der Welt. Ueber die Geburten und den Umlauf der Geburtsjahre.

Churzâd ben Dârschâd.[177]

Der Rechner, ein Diener des Juden Sahl ben Bischr, schrieb: Ueber die Geburten. Ueber die Tagewählerei.

---

*) Befindet sich im Ms. 952. 2 (Suppl. arabe) Paris; vergl. Woepke, Essai d'une restitution etc. in Mém. prés. par div. Sav. à l'acad. Tom. XIV. 1856. p. 668.

Die Söhne aṣ-Ṣabbâḥs.[178]

Muḥammed, Ibrâhîm und al-Ḥasan, alle drei waren scharfsinnige Astronomen, besonders auf dem Gebiete der beobachtenden Astronomie und Astrologie bewandert. Sie schrieben: Das Buch der Beweise zu den Operationen mit dem Astrolabium, es wurde verfasst von Muḥammed, dieser vollendete es aber nicht, sondern Ibrâhîm. Ueber das Verfahren zur Bestimmung des Mittags mittelst einer einzigen geometrischen Messung, von Muḥammed begonnen und von al-Ḥasan beendigt. Die Abhandlung Muhammeds über die Construction der Sonnenuhren.

Al-Ḥasan ben al-Chaṣîb.[179]

Er war sehr geschickt in der Kunst der Astrologie und schrieb: Das Buch, betitelt al-Kârimihtar,[180] es enthält vier Abschnitte, nämlich: Einleitung in die Astrologie, über den Umlauf der Jahre der Welt, über die Geburten, über den Umlauf der Geburtsjahre.

Al-Chajjâṭ.

Abû ʿAlî Jaḥjâ ben Ġâlib, er wird auch genannt Ismâʿîl ben Muḥammed, war ein Schüler von Mâ-schâ-allâh und ein vorzüglicher Astronom, er schrieb: Das Buch der Einleitung. Ueber die Fragen. Ueber die Bedeutungen. Ueber die Geschicke (oder die Dynastien). Ueber die Geburten. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre. Das Buch des Zerstreuten (oder der Blumenlese?),[181] welches er für Jaḥjâ ben Châlid verfasste. Das Buch der goldenen Ruthe. Ueber den Umlauf der Jahre der Welt. Das Buch von den Anekdoten (treffende, oder auch vieldeutige Antworten: vielleicht ist letztere Bedeutung die passendste).

ʿOmar ben Muḥammed al-Marwarûḏî.[182]

Er gehörte zu den Beobachtern und war ein vortrefflicher Gelehrter. Er schrieb: Ueber die Gleichung der Planeten. Ueber die Construction des Planisphaeriums.

Al-Ḥasan ben aṣ-Ṣabbâḥ.[183]

Er gehörte zu den Astronomen, beschäftigte sich aber auch mit Geometrie und schrieb: Das Buch der Lehrsätze (Figuren) und der Ausmessungen. Ueber die Kugel. Ueber den Gebrauch der Armillarsphäre.

Abû Maʿschar.[184]

Abû Maʿschar Dschaʿfar ben Muḥammed al-Balchî, gehörte anfänglich zu den Historikern und wohnte im westlichen Theil (von Bagdad), beim Thore Chorâsân. Er hasste den al-Kindî und stachelte das Volk gegen ihn auf und schmähte ihn wegen seiner Philosophie; da schickte al-Kindî heimlich solche Leute hinter ihn, welche ihm das Studium der Arithmetik

und Geometrie angenehm zu machen wussten, und in Folge dessen wandte er sich diesen Gebieten zu, beendete aber die Studien hierin nicht, sondern ging zur Astrologie über. Jetzt beim Einblick in diese Wissenschaft hörten die Bosheiten gegen al-Kindî auf, denn er gehörte nun zu derselben Gelehrtenklasse. Es wird erzählt, dass er mit dem Studium der Astronomie erst nach seinem 47. Lebensjahre begonnen habe; er war von scharfer, treffender Urtheilskraft. Einst liess ihn al-Mustaʿîn peitschen, weil er in einer Prophezeiung das Richtige getroffen hatte, da sprach er: ich habe die Wahrheit gesagt und bin doch gestraft worden. Abû Maʿschar starb, als er schon über 100 Jahre alt war, in Wâsiṭ, am Mittwoch, zwei Nächte vor Schluss des Ramaḍân, im Jahre 272 d. H. (886). Er schrieb: Das grosse Buch der Einleitung: acht Abschnitte. Das kleine Buch der Einleitung. Das Buch der Tafeln al-Hazârât mit über 60 Capiteln.[185] Das grosse Buch der Geburten, unvollendet, aus welchem vielfach Auszüge gemacht wurden. Ueber die äussere Erscheinung der Himmelssphäre und die Verschiedenheit ihres Aufganges: fünf Abschnitte. Ueber den Regenten der Lebenszeit. Ueber den Regenten der Geburtsstunde. Ueber die Conjunctionen, an Ibn al-Bâzjâr gerichtet. Das Buch über den Umlauf der Jahre der Welt, betitelt „die treffenden Antworten".[186] Ueber die Tagewählerei nach den Mondstationen. Das Buch der Tausende: acht Abschnitte.[187] Das grosse Buch der Temperamente: fünf Theile, nach der Eintheilung von Abû Maʿschar. Ueber die beiden Loose, die Lebenszeiten der Könige und die Regierungen (Dynastien). Das Buch Zâïrdschât,[188] und über die Grenzen und die Horizontalkreise.[189] Ueber die Conjunction der beiden Unglückssterne (Saturn und Mars) im Hause des Krebses. Ueber die Sternbilder und das Weissagen nach ihnen. Ueber die Sternbilder und die Grade[190] und das Weissagen nach ihnen. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre: acht Abschnitte. Das Buch über die Temperamente, das selten (kostbar) war, später aber häufiger vorkam (gefunden wurde)(?). Ueber die helischen Untergänge der Mondstationen. Eine Sammlung von Fragen. Ueber die Sicherheit (Wahrheit) des astrologischen Wissens. Ein Buch, dessen Zusammenstellung er begann, aber nicht vollendete, er wollte ihm den Namen geben „das Vollständige oder die Fragen". Das Buch der Sammlung, in welchem er die Aussprüche der Menschen über die Geburten zusammenstellte. Das Buch der Elemente, welches Abû'l-ʿAnbas für sich in Anspruch nahm. Ueber die Auslegung der Träume aus den Gestirnen. Ueber die Urtheile nach den Regenten der Geburtsstunde. Das kleine Buch der Geburten: 2 Theile mit 13 Abschnitten. Tafeln der Conjunctionen und der Abweichungen(?).[191] Ueber die Jahreszeiten. Ueber die Jahreszeiten, nach den 12 Zeichen des Thierkreises. Ueber die Loose,

und zwar über die Loose der Lebensmittel, der Kleider, des Riechbaren (der duftenden Dinge), der Wohlfeilheit und der Theuerung und des Weissagens nach ihnen. Ueber Regen und Winde und die Veränderungen der Atmosphäre. Ueber die Natur der Länder und die Entstehung der Winde. Ueber die Schiefe (Neigung) (?)[192] im Umlauf der Geburtsjahre. Abû Maʿschar pflegte (in wissenschaftlichen Dingen) der Autorität der Barmakiden ʿAbdallâh ben Jaḥjâ und Muḥammed ben al-Dschahm zu folgen, und doch übertraf er sie im Wissen.

ʿAbdallâh ben Masrûr an-Naṣrânî (d. h. der Christ).[193]

War der Diener von Abû Maʿschar und schrieb: Ueber die Projection der Strahlen. Ueber den Umlauf der Jahre der Welt und das Weissagen nach diesem. Ueber den Umlauf der Geburtsjahre.

ʿUṭârid ben Muḥammed.[194]

Der Rechner und Astronom, war ein vortrefflicher und gelehrter Mann und schrieb: Ueber die indische Wahrsagekunst (aus Kameelmembranen) und ihre Erklärung. Ueber den Gebrauch des Astrolabiums. Ueber den Gebrauch der Armillarsphäre. Ueber die Zusammensetzung der himmlischen Sphären. Ueber die Brennspiegel.

Jaʿḳûb ben Ṭâriḳ.[195]

Er gehörte zu den ausgezeichneten Astronomen und schrieb: Ueber die Theilung des Sinus.[196] Ueber das, was sich vom halben Tagebogen in die Höhe erhebt. Das Buch der Tafeln, dem Sind-Hind entnommen, von Grad zu Grad, in zwei Theilen: der erste für die Sphärik, der zweite für die Wissenschaft der Zeitperioden (Chronologie?)[197]

Abû'l-ʿAnbas.[198]

As-Ṣaimarî, wurde schon früher als eifriger Astrolog erwähnt, er schrieb: Ueber die Geburten. Einleitung in die Astrologie.

Ibn Sîmawaih.[199]

Ein Jude, sein Name war ..... Er schrieb: Einleitung in die Astrologie. Ueber den Regen.

ʿAlî ben Dâûd.*)[200]

Er war ein vortrefflicher Mann und hervorragender Astrolog und schrieb: Ueber den Regen.

---

*) Auch Dâwud = David.

Ibn al-Aʿrâbî.

Abû'l-Ḥasan ʿAlî ben al-Aʿrâbî aus Kûfa war ebenfalls ein trefflicher Mann und hervorragend in seiner Kunst (Astrologie), und bekannt unter dem Namen asch-Schaibânî, weil er zu den Nachkommen (zum Stamme) Schaibâns gehörte. Er schrieb: Das Buch der Fragen und der Tagewählerei.

Ḥâriṯ, der Astrolog.[201]

War eng befreundet mit al-Ḥasan ben Sahl und ein vorzüglicher Gelehrter, den auch Abû Maʿschar als Autorität anführt. Er schrieb: Das Buch der Tafeln.

Al-Miṣṣîṣî.*)

Abû'l-Ḥasan ʿAlî ben al-Miṣṣîṣî schrieb: Ueber die Conjunctionen.

Ibn Abî Ḳurra.[202]

Sein Beiname war Abû ʿAlî, er war der Astrolog von al-ʿAlawî, (des Fürsten) von Baṣrâ, er schrieb: Ueber die Ursache der Verfinsterung von Sonne und Mond, für al-Muwaffaḳ verfasst.

Ibn Samʿân.

Muḥammed ben ʿAbdallâh, Diener des Abû Maʿschar, schrieb: Einleitung in die Astrologie.

Al-Farġânî.[203]

Muḥammed ben Kaṯîr, war ein vorzüglicher Mann und hervorragender Astronom, er verfasste: Das Buch der Elemente[204], Auszug aus dem Almagest. Ueber die Construction der Sonnenuhren.[205]

Ibn Abî Râfiʿ.

Sein Beiname war Abû'l-Ḥasan, ein vorzüglicher Gelehrter, er schrieb: Ueber die Verschiedenheit des Aufgangs (der Gestirne).

Sein Sohn Abû Muḥammed.

ʿAbdallâh ben Abî'l-Ḥasan ben Abî Râfiʿ, verfasste: Eine Abhandlung über die Geometrie.

Ibn Abî ʿAbbâd (oder ʿUbbâd).[206]

Muḥammed ben ʿÎsâ, mit dem Beinamen Abû'l-Ḥasan, nur unter diesem Namen bekannt, er schrieb: Ueber den Gebrauch des Astrolabiums mit den zwei Ringen[207] und anderer.

---

*) Sollte nach dem folgenden vollen Namen wohl Ibn al-Miṣṣîṣî heissen, oder dann ist das folgende ben überflüssig. Flügel macht hiezu keine Bemerkung.

An-Nairîzî.[208]

Abû'l-ʿAbbâs al-Fadl ben Ḥâtim an-Nairîzî, gehörte zu denen, auf deren Autorität man sich gerne bezog in der Astronomie, namentlich in der beobachtenden. Er schrieb: Das grosse Buch der Tafeln. Das kleine Buch der Tafeln. Ueber die Gebetsrichtung (nach Mekka).*) Einen Commentar zum Quadripartitum des Ptolemaios.[209] Ueber die atmosphärischen Erscheinungen, für al-Muʿtaḍid verfasst. Das Buch der Beweise und der Herstellung von Instrumenten, mit welchen entfernte Gegenstände deutlich gemacht werden.

Al-Battânî.[210]

Abû ʿAbdallâh Muḥammed ben Dschâbir ben Sinân ar-Raḳḳî, stammte aus Ḥarrân und war (ursprünglich) Ṣabier. Der Anfang seiner astronomischen Beobachtungen fiel nach Dschaʿfar ben al-Muktafî, der ihn hierüber selbst befragt hatte, ins Jahr 264 und sie dauerten bis zum Jahre 306. Er gab in seinen Tafeln die Oerter der Fixsterne für das Jahr 299 an. Er kam mit den Söhnen az-Zajjâts aus Raḳka nach Bagdad wegen der Unterdrückungen, die ihnen dort zu Theil wurden, und starb auf der Rückkehr auf der Feste al-Dschaṣṣ im Jahre 317. Er schrieb: Das Buch der Tafeln, in zwei Ausgaben, die zweite ist ausgezeichneter als die erste. Ueber die Kenntniss der Aufgänge der Häuser nach den vier Quadranten des Thierkreises, auch bekannt als seine Abhandlung über die Verificierung der Wirkungen der Conjunctionen, die er für Abû'l-Ḥasan ben al-Farât verfasste.[211]

Ibn Amâdschûr.[212]

Abû'l-Ḳâsim ʿAbdallâh ben Amâdschûr war ein Nachkomme der Pharaonen und ein vorzüglicher Gelehrter. Er schrieb: Das Buch des Fragens?[213] Das Buch der Tafeln, bekannt unter dem Namen „die Reinen" (Besten, Fehlerfreien). Das Buch, genannt der Reiseproviant. Das Buch der Tafeln, bekannt unter dem Namen „die Gegürteten". Das Buch der Tafeln, genannt „die Wundervollen". Das Buch der Tafeln des Sind-Hind. Das Buch der Tafeln der Zeitläufe. (?)[214]

Sein Sohn Abû'l-Ḥasan ʿAlî ben Abî'l-Ḳâsim[215]

schrieb ..... (Lücke).

Al-Harûnî (auch al-Harawî).[216]

Jûsuf ben ..... schrieb: Ueber astrologische Betrügerei (Heuchelei), in circa 300 Blättern.[217]

---

*) Befindet sich in dem Ms. 952. 2 (Suppl. arabe) in Paris, vergl. Woepke, Essai d'une restitution, etc. in Mém. prés. à l'acad. par div. Sav. Tom XIV. Paris, 1856. p. 666.

Abû Zakarijjâ.

Dschannûn (auch Dschanûb) ben ʿAmr ben Jûḥannâ ben aṣ-Ṣalt schrieb: Das Buch des Beweises der Richtigkeit (Sicherheit) der Sterne (Astrologie) und der mit Hülfe derselben gemachten Prophezeiungen.

Aṣ-Ṣaidanânî.

ʿAbdallâh ben al-Ḥasan, der Rechner und Astronom, schrieb: Einen Commentar zur Algebra des Muḥammed ben Mûsâ al-Chowârezmî.[218] Einen Commentar zu seinem Buche über die Vermehrung und die Verminderung.[218] Ueber die verschiedenen Arten des Multiplicierens und Dividierens.

Ad-Dandânî (And. Ar-Randânî).

ʿAbdallâh ben ʿAlî an Naṣrânî, mit dem Beinamen Abû ʿAlî, schrieb: Das Buch der Sterndeutungskunst, dasselbe war schon alt, als ich es sah.

Eine andere Classe von neueren Astronomen und Geometern, deren Wohnorte (Heimath) unbekannt sind.

Al-Adamî.[219]

Abû ʿAlî al-Ḥusain ben Muḥammed schrieb: Ueber al-Harâfât[220] und die Fäden (am Astrolabium)?[221] und die Verfertigung der Uhren.

Al-Ḥajjânî (And. al-Dschanâbî, oder al-Ḥanâî).

Sein Beiname war Abû'l-Faḍl, und sein Name ...... er schrieb: Das Buch der geometrischen Tafeln.

Ibn Bâġân (And. Ibn Nâġâr).

Al-ʿAbbâs ben Bâġân ben ar-Rabîʿ, mit dem Beinamen Abû Rabîʿ, war Astronom und schrieb: Das Buch der Eintheilung der bewohnten Gegenden der Erde und der äussern Erscheinung (Form) der Welt.

Ibn Nâdschija (And. Nâḥija und Nâdschîm).[222]

Muḥammed ben ......, der Schreiber, verfasste ein Buch über die Feldmessung.

Abû ʿAbdallâh.

Muḥammed ben al-Ḥasan ben Achî Hischâm asch-Schaṭawî; er schrieb: Ueber die Construction der geneigten Sonnenuhr. Ueber die Construction der trommelförmigen Sonnenuhr[223], über die Verfertigung von Schleudermaschinen[224] und über die Bestimmung der Höhen und der Azimuthe.

Die neueren Rechner und Arithmetiker.[225]

ʿAbdalḥamîd.

Abû'l-Faḍl ʿAbdalḥamîd ben Wâsiʿ ben Turk al-Chuttalî (auch Dschabalî), der Rechner, — als sein Beiname wird auch Abû Muḥammed genannt — schrieb: Das Ganze der Rechenkunst in sechs Büchern. Das Buch über den Geschäftsverkehr (polit. Arithmetik).[226]

Abû Barza.

Al-Faḍl ben Muḥammed ben ʿAbdalḥamîd ben Turk ben Wâsiʿ[227] al-Chuttalî, schrieb: Das Buch über den Geschäftsverkehr. Das Buch über die Feldmessung.

Abû Kâmil.[228]

Abû Kâmil Schudschâʿ ben Aslam ben Muḥammed ben Schudschâʿ, der Rechner, aus Aegypten, war ein trefflicher und gelehrter Arithmetiker und schrieb: Das Buch des Glückes.[e] Das Buch des Schlüssels des Glückes.[e] Das Buch über die Algebra.[229] Das Buch des Ausgepressten (vielleicht Auszug?). Das Buch der Vorbedeutungen (aus dem Vogelflug). Ueber die Vermehrung und die Verminderung. Das Buch der beiden Fehler.[230] Das Buch der Feldmessung und der Geometrie. Das Buch des Genügenden.[231]

Sinân ben al-Fatḥ.[232]

Er war aus Ḥarrân gebürtig, ein hervorragender Rechner und Arithmetiker, und schrieb: Das Buch at-Taḥt, in der (über die) indischen Rechnungsweise.[233] Ueber die Vermehrung und die Verminderung. Einen Commentar zum Buche „über die Vermehrung und die Verminderung" (wahrscheinl. eines andern Autors). Ueber die Erbtheilungen. Ueber die Kubenrechnung (Kubikwurzelausziehung?).[234] Einen Commentar zur Algebra des Chowârezmî.

Abû Jûsuf al-Miṣṣîṣî.[235]

Jaʿkûb ben Muḥammed, der Rechner, schrieb: Eine Algebra. Ueber die Erbtheilungen. Ueber die Verdoppelungen der Häuser (Felder) des Schachspiels. Das Universalbuch. Ueber das Verhältniss der Jahre. Das allumfassende Buch. Das Buch der beiden Fehler. Ueber die Testamentsrechnung.[236]

Ar-Râzî.[237]

Jaʿkûb ben Muḥammed, mit dem Beinamen Abû Jûsuf, schrieb: Das Buch über das gesammte Rechnen. Das Buch at-Taḥt. Ueber die Rechnung mit den beiden Fehlern. Das Buch der dreissig seltenen (ungewöhnlichen, fremdartigen) Fragen (Probleme).

Muḥammed.[238]

Ibn Jaḥjâ ben Akṯam, der Richter, schrieb: Ueber Zahlenprobleme.

Al-Karâbîsî.[239]

Aḥmed ben ʿOmar gehörte zu den vorzüglichsten Geometern und Arithmetikern und schrieb: Einen Commentar zum Eukleides. Ueber die Testamentsrechnung. Ueber die Erbtheilungen. Ueber das Planisphaerium.[240] Das Buch des Indischen (Rechnens?).

Aḥmed ben Muḥammed.

Der Rechner — über seine Lebensverhältnisse ist nichts weiteres bekannt — schrieb: Das Buch an Muḥammed ben Mûsâ über das Erreichen (Vortheil?).[241] Eine Einleitung in die Astrologie. Ueber die Vermehrung und die Verminderung.

Al-Makkî.

Dschaʿfar ben ʿAlî ben Muḥammed al-Makkî, der Geometer, schrieb: Das Buch über die Geometrie. Abhandlung über den Kubus (die Kubikzahl).[242]

Al-Iṣṭachrî.[243]

Der Rechner, sein Name ..... schrieb: Das Buch über das gesammte Rechnen. Einen Commentar zur Algebra des Abû Kâmil.

Ein Mann, bekannt unter dem Namen Muḥammed ben Lurra (And. Ludda) der Rechner, aus Iṣfahân (Ispahan) schrieb: Ein Buch über das gesammte Rechnen.

Die neueren Geometer, Arithmetiker und Astronomen, deren Lebens- oder Sterbezeit nicht weit entfernt ist (d. h. von derjenigen des Verfassers des Fihrist, also kurz die Zeitgenossen).

Jûḥannâ al-Ḳass.

Jûḥannâ ben Jûsuf ben al-Ḥâriṯ ben al-Baṭrîḳ al-Ḳass (d. h. der Priester) gehörte zu denen, welche Vorlesungen hielten über die Elemente des Eukleides und andere geometrische Bücher; er machte auch Uebersetzungen aus dem Griechischen und war ein vorzüglicher Gelehrter, er starb im Jahr[244] ..... er schrieb: Einen Auszug aus (in) zwei Tafeln für Geometrie. Eine Abhandlung über den Beweis, dass, wenn eine gerade Linie zwei andere in einer Ebene gelegene Gerade schneidet, die beiden innern Winkel, welche auf der einen Seite liegen, weniger als zwei Rechte sind.

Ibn Rauḥ, der Ṣabier.[245]

Abû Dscha'far al-Châzin (d. h. der Schatzmeister oder Bibliothekar).[246]

Sein Name ..... Er schrieb: Ueber die Scheiben (des Astrolabiums).[247] Ueber die Zahlenprobleme.

'Alî ben Ahmed al-'Imrânî.[248]

War aus Moṣul gebürtig und ein vorzüglicher Büchersammler, es kamen zu ihm Leute aus den entferntesten Gegenden, um seine Vorlesungen zu hören, er starb im Jahre 344 (955). Er verfasste einen Commentar zur Algebra des Abû Kâmil.[249]

Abû'l-Wafâ.

Muhammed ben Muhammed ben Jahjâ ben Ismâ'îl ben al-'Abbâs, wurde geboren zu Bûzdschân im Gebiete von Nîsâbûr im Jahre 328 (940), Mittwochs am Neumond des Monats Ramadân (10. Juni). Er erhielt Unterricht von seinem Oheim (väterl. Seits) Abû 'Amr al-Muġâzilî und seinem Oheim (mütterl. Seits) Abû 'Abdallâh Muhammed ben 'Ambasa — Abû 'Amr selbst studierte die Geometrie unter Abû Jahjâ al-Mâwardî*) und Abû'l-'Alâ ben Karnîb.[250] — Abû'l-Wafâ wanderte im Jahre 348 (959) nach 'Irâk aus. Er schrieb: Das Buch über das, was die Geschäftsleute und die Schreiber (Secretäre) von der Rechenkunst gebrauchen; es enthält sieben Abschnitte, jeder mit sieben Capiteln: Der erste Abschnitt handelt über das Verhältniss, der zweite über Multiplication und Division, der dritte über die Operationen des Messens (der Flächen- und Körperberechnung), der vierte über die Steuerverhältnisse, der fünfte über die Theilungsgeschäfte, der sechste über die Wechselgeschäfte, der siebente über den Geschäftsverkehr der Kaufleute.[251] Einen Commentar zur Algebra des Chowârezmî. Einen Commentar zur Algebra des Diophantos. Einen Commentar zur Algebra des Hipparchos.[252] Ein Buch Einleitung in die Arithmetik. Das Buch über das was gelernt werden muss vor (dem Studium des Buches) der Arithmetik. Das Buch der Beweise zu den Sätzen, welche Diophantos in seinem Buche aufstellt (eig. gebraucht), und zu dem, was er (Abû'l-Wafâ) in seinem Commentar aufstellt. Eine Abhandlung über die Auffindung der Seite des Würfels, des Quadrates des Quadrates[253] und dessen was aus beiden zusammengesetzt ist. Ein Buch über die Kenntniss des Kreises aus der Sphäre.[254] Das vollständige (umfassende) Buch, es enthält drei Abschnitte: der erste handelt über die Dinge, die gelernt werden müssen vor der Bewegung der Himmelskörper (Gestirne); der zweite über die Bewegung der Himmelskörper; der dritte über das was sich bei der

*) Sollte vielleicht heissen Abû Jahjâ al-Merwazî s. p. 15.

Bewegung der Himmelskörper zeigt (ereignet, daraus resultiert). Das Buch der genauen (klaren, zweifellosen) Tafeln, in drei Abschnitten: der erste handelt über die Dinge, die gelernt werden müssen vor der Bewegung der Himmelskörper; der zweite über die Bewegung der Himmelskörper; der dritte über das was sich bei der Bewegung der Himmelskörper zeigt.[255] — Sein Oheim Abû Saʿîd schrieb ein aus ungefähr 600 Blättern bestehendes Buch über das Eindringen in die Wissenschaften (Erkenntnisse) für Schüler.

Al-Kûhî.[256]

Abû Sahl Wîdschan ben Rustam (oder Rustum) aus Kûh, d. h. den Bergen von Tabaristân gebürtig, schrieb: Das Buch über die Mittelpunkte der Kugeln[257], das er aber nicht vollendete. Das Buch der Elemente, nach demjenigen des Eukleides, und den aus ihm gemachten Auszügen.[258] Zwei Bücher über den vollkommenen Zirkel.[259] Zwei Bücher über die Construction (Kunst) des Astrolabiums mit Beweisen. Ueber die Auffindung der Punkte auf den Linien. (?)[260] Das Buch an die Logiker über die Aufeinanderfolge der beiden Bewegungen: zur Vertheidigung Ṯâbit ben Ḳurras.[261] Ueber die Mittelpunkte der Kreise auf den Linien (gegebenen?) nach der Methode der Analysis ohne Synthesis.[262] Das Buch der Zusätze zum zweiten Buche des Archimedes (über die Kugel und den Cylinder?).[263] Abhandlung über die Auffindung der Siebeneckseite im Kreise.[264]

Ġulâm Zuḥal.[265]

Abû'l-Ḳâsim ʿAbdallâh ben al-Ḥasan, aus ...... Er schrieb: Ein Buch über die Profectiones oder Directiones.[266] Ein Buch über die Strahlen.[267] Ueber die Wahrsagung aus den Gestirnen. Ein grosses Buch über die Directiones und die Strahlen. Das Buch der grossen Zusammenstellung (oder das grosse, allumfassende Buch). Das Buch der erprobten[268] Elemente. Ueber die Tagewählerei. Ueber die Trennungen (Zertheilungen). (?)

Aṣ-Ṣûfî.

Abû'l-Ḥusain ʿAbdarraḥmân ben ʿOmar, gehörte zu den vortrefflichsten Astronomen; er war Diener des ʿAḍudaddaula[269] und lebte in Schâḏikûh (?), sein Geburtsort war ..... er starb im Jahr[270] ..... Er schrieb: Ueber die Gestirne, mit Figuren.

Al-Anṭâkî

mit dem Ehrennamen al-Mudschtabâ (der Auserwählte). Sein Name war[271] .... Er starb kurz vor Beginn des Jahres 376 (986—87).[272] Er schrieb: Das grosse Buch at-Taḫt über die indische Rechnungsweise.[273] Ueber das Rechnen nach (der Methode) at-Taḫt ohne Ausstreichen (der Ziffern). Einen Commentar zu

der Arithmetik (wessen?).[274] Ueber die Auffindung der Uebersetzer. (?)[275] Einen Commentar zum Eukleides. Ueber die Kuben.[276]

Al-Kalwaḏânî.[277]

Abû Naṣr Muḥammed ben ʿAbdallâh al-Kalwaḏânî gehört zu den vortrefflichsten Rechnern und lebt zu unserer Zeit (d. h. gegenwärtig noch).[278] Er schrieb: Das Buch at-Taḥt über die indische Rechnungsweise.

Al-Ḳaṣrânî,

sein Name war .....[279]

Abhandlung über die Instrumente (astronomische) und ihre Verfertiger.

Es waren die Astrolabien in der frühern Zeit eben (Planisphärien) und der Erste, der solche verfertigte, war Ptolemaios; es wird aber auch gesagt, dass vor ihm schon solche gemacht worden seien, aber dies lässt sich nicht mit Sicherheit behaupten; als der erste Verfertiger ebener Astrolabien (in neuerer Zeit) wird genannt Apion (?) der Patriarch. Diese Instrumente wurden (zuerst nur) in der Stadt Ḥarrân gemacht, später wurden sie (d. h. ihre Verfertigung) weiter verbreitet und mehr bekannt; jedoch vermehrten sie sich und erweiterte sich für die Künstler die Arbeit (erst recht) unter der Herrschaft der Abbasiden von den Tagen al-Mâmûns an bis auf unsere Zeit; denn als al-Mâmûn die Beobachtung zu unterstützen sich vornahm, wandte er sich an Ibn Chalaf al-Marwarûḏî und dieser verfertigte für ihn die Armillarsphäre, und solche befinden sich nun im Besitze von einigen Gelehrten unseres Landes; auch hatte Marwarûḏî früher schon Astrolabien construiert.

Die Namen der Künstler.

Ibn Chalaf al-Marwarûḏî; al-Fazârî, dessen schon Erwähnung gethan wurde;[280] ʿAlî ben ʿÎsâ, Schüler*) von al-Marwarûḏî;[281] Chafîf, Schüler von ʿAlî ben ʿÎsâ, ein geschickter und vortrefflicher Mann; Aḥmed ben Chalaf, Schüler von ʿAlî ben ʿÎsâ; Muḥammed ben Chalaf, ebenfalls Schüler von ʿAlî; Aḥmed ben Isḥâḳ al-Ḥarrânî; ar-Rabîʿ ben Farrâs al-Ḥarrânî; Ḳaṭasṭûlus (?)[282], Schüler von Chafîf; ʿAlî ben Aḥmed, der Geometer, Schüler von Chafîf; Muḥammed ben Schaddâd al-Baladî; ʿAlî ben Ṣurad al-Ḥarrânî; Schudschâʿ ben .... war mit Saif ad-Daula Schüler von Batûlus (?);[283] Ibn Salâm, Schüler von Batûlus; al-ʿAdschlâ, der Astrolabien-Verfertiger, Schüler von Ba-

*) Eigentlich Diener, hier wohl Lehrjunge, ich gebe es überall durch „Schüler" wieder.

tûlus; al-ʿAdschlajja, seine Tochter, mit Saif ad-Daula Schülerin von Batûlus.

Zu den Schülern Aḥmeds und Muḥammeds, den Söhnen Chalafs gehörten:

Dschâbir ben Sinân al-Ḥarrânî;[284] Dschâbir ben Ḳurra al-Ḥarrânî;[285] Sinân ben Dschâbir al-Ḥarrânî;[285] Farrâs ben al-Ḥasan al-Ḥarrânî; Abû'r-Rabîʿ Ḥâmid ben ʿAlî, Schüler von ʿAlî ben Aḥmed, dem Geometer.

Zu den Schülern Ḥâmid ben ʿAlîs gehörten:

Ibn Nadschijja, sein Name war .....; al-Bûḳî, sein Name war al-Ḥusain, statt seiner wird auch ʿAbdaṣṣamad genannt.

Zu den (unmittelbar) vorangehenden*) Instrumentenkünstlern gehören:

ʿAlî ben Jaʿḳûb ar-Raṣṣâṣ; ʿAlî ben Saʿîd, der Eukleidier; Aḥmed ben ʿAlî ben ʿÎsâ, aus der jüngsten Zeit.

Ḳurra ben Ḳamîṭâ al-Ḥarrânî.[286]

Dieser verfertigte einen Globus (wörtlich eine Darstellung der Welt), welchen Ṯâbit ben Ḳurra für sich in Anspruch nahm; ich habe diesen Globus gesehen, aus rohem (ungebleichtem) Stoff aus Dabîḳ verfertigt, mit Farben (bemalt), doch waren dieselben schon verwischt.

Die Titel der Bücher, die über die Mechanik (eig. Bewegungen) geschrieben worden sind.

Ueber die Einrichtung des Instrumentes von Archimedes, mit welchem die Schleudersteine geworfen wurden.[287] Ueber die Kreise (runde Scheiben?) und die Wasserräder von Herḳal, dem Zimmermann.[288] Ueber die Dinge, die sich von selbst bewegen, von Heron.[289] Ueber die trompetenartige Pfeife. Ueber die blähende(?) Pfeife. Ueber die Wasserräder, von Mûritos.[290] Ueber die Orgel. Das Buch der Mechanik von den Söhnen Mûsâs, den Astronomen (wörtlich des Astronomen), es enthält eine grosse Zahl von mechanischen Kräften (wörtlich Bewegungen).[291]

[Der am Ende dieses Abschnittes stehende Abû Jaʿḳûb Isḥâḳ gehört zu den Aerzten und sollte also in der folgenden dritten Unterabtheilung stehen, wohin ihn auch einige Codices gesetzt haben.]

---

*) Kann auch heissen „hervorragenden".

III. Unterabtheilung.

Sie enthält die Geschichten der älteren und neueren Aerzte und die Titel der Bücher, die sie verfasst haben.

Galenos.

Er schrieb [unter Anderem: es werden von ihm 72 medicinische Schriften angeführt]: Das Buch darüber, dass das erste Bewegende (primus motor) selbst unbeweglich sei[292], übersetzt von Ḥunain, ʿÎsâ ben Jaḥjâ und Isḥâḳ (ben Ḥunain).

Ḥunain.[293]

Ḥunain ben Isḥâḳ al-ʿIbâdî, mit dem Beinamen Abû Zaid, war ein vortrefflicher Arzt, bewandert in der griechischen, arabischen und syrischen Sprache, und belesen in den Schriften der Alten. Er schrieb [unter Anderem]: Ueber Fluth und Ebbe. Ueber die Ursachen, warum das Meerwasser salzig wird. Ueber die Entstehung des Feuers zwischen (mit Hülfe von) zwei Steinen.[294]

Ḳusṭâ.[295]

Ḳusṭâ ben Lûḳâ aus Baʿalbek, hat eine grosse Zahl alter Werke ins Arabische übersetzt, und war sehr bewandert in vielen Wissenschaften, so in der Medicin, Philosophie, Geometrie, Arithmetik und Musik, gewandt in der griechischen Sprache und zeichnete sich durch vortrefflichen arabischen Styl aus; er starb am Hofe eines armenischen Königs.[296] Er schrieb [unter Anderem]: Ueber die Brennspiegel. Ueber die Gewichte und Masse. Ueber den Wind und seine Ursachen. Ueber die Waage. Ueber den Gebrauch des Himmelsglobus.[297] Einleitung in die Geometrie. Ueber die schwierigen Stellen des Eukleidischen Buches. Einleitung in die Astrologie. Abhandlung über die Auflösung von Zahlenaufgaben aus dem dritten Buche des Eukleides. Einen Commentar zu dreieinhalb Büchern des Diophantischen Werkes über arithmetische Aufgaben.

Ar-Râzî.[298]

Abû Bekr Muḥammed ben Zakarijjâ ar-Râzî, aus Raj in Chorasan gebürtig, einzig dastehend zu seiner Zeit als Kenner der Wissenschaften der Alten und besonders als Mediciner; er war sehr hochherzig und wohlthätig gegen die Armen, so dass er ihnen neben der Verpflegung noch Geld zu überreichen pflegte. Er wurde gegen das Ende seines Lebens blind;[299] er war ein Schüler Balchîs in der Philosophie. Nach seinem eigenen Bücherverzeichniss schrieb er [unter Anderem]: Zwei Bücher Beweise, das erste 17, das zweite 12 Capitel enthaltend. Das Buch von der

äussern Erscheinung der Welt. Das Buch der Widerlegung Derjenigen, welche die Bücher der Geometrie geringschätzen. Ueber das Leere und das Volle, oder über Zeit und Raum (Ort). Ueber die Ursache, wesshalb die Erde in der Mitte des Weltalls in Ruhe ist. Ueber die Ursache der Rotationsbewegung der Himmelssphäre. Das Buch darüber, dass die Bewegung nicht zweifelhaft, sondern gewiss ist. Das Buch darüber, dass der Körper (die Masse?) sich von selbst bewege, oder dass die Bewegung ursprünglich in seiner Natur begründet sei. Ueber die Diagonale des Quadrates. Ueber die Ursache der Anziehung des Magnetsteins. Ueber die Abkühlung des Wassers durch Schnee. Abhandlung über den Untergang der Sonne und der Sterne, und dass dieser nicht eine Folge der Bewegung der Erde, sondern derjenigen des Himmels sei. Abhandlung darüber, dass Derjenige, welcher nicht im Beweisen (logischen Schliessen) gewandt ist, sich nicht vorstellen kann, dass die Erde kugelförmig sei und rings herum auf derselben sich Menschen befinden. Ueber die Widerlegung der Meinung Derjenigen, welche glauben, dass die Sterne nicht an der äussersten Grenze der rotierenden Sphäre (der Rotationsbewegung) seien.[300] Abhandlung über die Streitfrage über die natürliche Beschaffenheit der Erde, ob diese nämlich aus Lehm oder Stein bestehe. Abhandlung über das Mass dessen, was durch die Weissagung aus den Sternen zu erkennen möglich ist, nach der Ansicht der Naturphilosophen und nach der Ansicht Derjenigen, welche verneinen, dass die Gestirne lebende Wesen seien.

Anmerkungen.

Aristoteles.

1) Andere mathematisch-physikalische Schriften, wie die mechanischen Probleme und über die untheilbaren Linien, die bei Ibn al-K. und H. Ch. angeführt sind, fehlen im Fihrist. H. Ch. führt überdies noch an: Ueber die Geheimnisse der Gestirne V. 40, über die Zahlen V. 46, über die fallenden Sterne (Meteore, Sternschnuppen) V. 166, 1000 Worte (Sätze, Aphorismen) über die Astrologie I. 407.

Proklos Diadochos.

2) Eines von den beiden Werken ist wahrscheinlich der Commentar zum ersten Buche der Elemente des Eukleides. Flügel, A., p. 116 hält das Letztere für die στοιχείωσις φυσική, als die kleinere im Gegensatz zur στοιχείωσις θεολογική als der grösseren; was ist dann aber das erste Werk? — 3) Also über die Atome? Wahrscheinlich steht dieser Titel in Verbindung mit einem Abschnitte aus irgend einem seiner philosophischen Werke; oder ist es etwa jene Definition des Punktes, mit der nach dem Prolog der Commentar zum ersten Buch der Elemente des Eukleides beginnt?

Alexander von Aphrodisias.

4) H. Ch. III. 619 schreibt ihm auch eine physica auscultatio zu, meint aber damit wahrscheinlich einen Commentar zum gleichnamigen Werke des Aristoteles.

Porphyrios.

5) Was dies für Elemente sind, ist unsicher. Nach Proklos' Commentar zu I. Eukl. scheint es allerdings wahrscheinlich, dass Porph. entweder Elemente der Geometrie verfasst, oder ebenfalls einen Commentar zu Eukl. geschrieben hat. Wenrich p. 281 hält sie für die von Suidas und Proklos (Theolog. Platon.) erwähnte Schrift des Porphyrios περὶ ἀρχῶν libri II.

Theophroditos.

6) In den arabischen Codices sind die Namen der Autoren, besonders der alten, oft so entstellt, dass die richtige Schreibweise nur schwer, oft gar nicht festzustellen ist; zu dieser Gattung gehört auch dieser Name, wir werden später noch andern solchen begegnen.

Theon (v. Smyrna).

7) Da auch die Titel der Werke oft entstellt sind, so könnte dies vielleicht die theilweise noch vorhandene Schrift Theons sein: Ueber das Mathematische, was zum Lesen der platonischen Schriften nützlich ist.

Al-Kindî.

8) Von den Schriften dieses berühmten Mannes, des „Philosophen der Araber“, habe ich nur die auf die mathematischen Wissenschaften sich beziehenden angeführt, für das Uebrige verweise ich auf Flügels Abhandlung: Al-Kindî, genannt der Philosoph der Araber etc. Abhandlgn. f. d. Kunde des Morgenlandes. Bd. 1. Heft 2. 54 S. Ich hätte al-Kindî in Rücksicht auf diese umfassende Arbeit ganz auslassen können, allein ich wollte ein womöglich vollständiges Mathematikerverzeichniss aus dem Fihrist hier wiedergeben. Die Lebenszeit al-Kindîs fällt ungefähr in die Jahre 184—257 d. H. (800—870 p. Ch.). — 9) So übersetzt Flügel in der eben citierten Abhandlung p. 22 الفأل; es ist dies eine besondere Art des Weissagens, H. Ch. sagt IV. 346: Haec est ea doctrina, qua eventum aliquod futurum interposito orationis ex alio auditae genere aut Corano aut libris Sheikhorum aperiendis, cuiusmodi sunt Háfitzi Diwan, carmen Methnewi et alia, cognoscitur. Vergl. auch Anmerkg. 158. — 10) Flügel (ibid. p. 22) übersetzt „relative“. — 11) Flügel (ibid. p. 23) übersetzt nach einer andern Lesart: „Ueber die äussern Erscheinungen der Proportionen und Zeiten“ und vermuthet (wohl nicht unbegründet), es sollte statt خلاف (äussere Erscheinungen, eig. Eigenschaften) خلاف (Verschiedenheiten) stehen. — 12) Flügel (ibid.) übersetzt علم اضمارها mit: „Anweisung Andern das Geheime dieser Kunststücke nicht sichtbar werden zu lassen“. — 13) Flügel (ibid. p. 24) übersetzt رؤية durch „Wandlungen“, und denkt wohl damit an die Phasen, es könnten damit aber auch die Erscheinungen der verschiedenen Anomalien der Mondbewegung gemeint sein. — 14) مطرح الشعاع ist ein astrologischer Kunstausdruck, wörtlich: Ort der Strahlenwerfung (lat. projectio radiorum); es sind dies nach Woepke (über ein in der k. Bibliothek zu Berlin befindl. arab. Astrolab. in Abhandlg. der k. Akad. d. Wiss. z. Berlin, Jahrg. 1858, math. Theil p. 1—31) die Projectionen der sog. Positionskreise auf dem Astrolabium, d. h. derjenigen grössten Kreise der Sphäre, die durch den Nord- und Südpunkt des Horizontes gehen und deren Pole auf dem ersten Vertikal liegen; sie dienen zur Bestimmung der sog. Radiationen, d. h. derjenigen Punkte des Himmels, welche zu einem gegebenen Punkte (besonders dem Ascendens, d. h. dem aufgehenden Punkt der Ekliptik) im Gedritt-, Geviert- oder Gesechstschein stehen. — 15) Flügel (p. 24) übersetzt نمودارات المواليد mit „Modelle der Horoskope“, Dorn (p. 97) النمودارات einfach mit „Horoskope“; es ist dies das persische Wort für diesen astrologischen Begriff (vergl. Vullers, Lexicon pers.-latin.). Wir geben, Flügel folgend, هيلاج durch „Regenten der Geburtsstunde“ كدخداه (auch كدخوداه) durch „Regenten der ganzen Lebensdauer“ wieder. Diese Ausdrücke kommen in den ins Lateinische übersetzten astrologischen Werken

meistens unübersetzt vor, z. B. Alchabitius, astronomiae iudic. principia, Lugduni s. a. fol. 55 steht: De significatione vitae. Hylech: id est locus vitae in nativitatibus. fol. 56: hylech, id est significator vitae in nativitatibus. fol. 57: alcochoden, qui est significator vitae, id est dominus annorum vel dans annos .... ibid. alcochoden, qui est dator annorum vitae. — 16) شعاعات kann nicht wohl „Strahlenbrechungen“ heissen, wie es Flügel übersetzt, sondern einfach „Strahlen“. — 17) Flügel p. 26 übersetzt في تقريب قول ارشميدس في قدر قطر الدائرة من محيطها mit: über das nähere Verständniss des Ausspruchs des Archimedes über die Bestimmung der den Kreis in zwei gleiche Hälften theilenden geraden Linie (Diameter) von seiner Peripherie aus?! — 18) Flügel (ibid.) übersetzt: Ueber die Beschreibung der Figur der Mediallinien (شكل المتوسطين). — 19) Flügel (ibid.) gibt تقريب hier und bei der folgenden Abhandlung durch „näheres Verständniss“ wieder? — 20) Flügel (ibid.) schreibt „Eintheilung“. — 21) Flügel (ibid.) übersetzt في قسمة الدائرة ثلاثة اقسام mit: Theilung des Kreises in drei Theile. Darüber hat wohl al-Kindî keine Abhandlung geschrieben, ich bin daher der Ansicht, dass meine Uebersetzung zutreffender sei, zumal قسم pl. اقسام für Theile eines Buches (statt مقالة oder باب) im Fihrist wiederholt vorkommt, so in der dritten Unterabtheilung (Aerzte), im Artikel über Galenos (Fihrist p. 289. Z. 3 v. u.) und im Artikel über ar-Râzî (ibid. p. 300. Z. 5 v. o.). Eine andere Möglichkeit wäre auch die, dass es statt دائرة = Kreis heissen sollte زاوية = Winkel, dann wäre die Flügel'sche Uebersetzung „in drei Theile“ wohl richtig. — 22) Flügel (ibid.) übersetzt: Ueber die Parallaxen des Spiegels. — 23) Dieses fünfte Element wurde dann durch das Dodekaeder repräsentiert, während die vier andern, Erde, Wasser, Feuer, Luft, durch Hexaeder, Ikosaeder, Tetraeder und Oktaeder versinnlicht wurden. — 24) Flügel (p. 27) übersetzt صور durch „Gestalten (der Himmel)“; es bedeutet aber nichts anderes als „Sternbilder“, vergl. Dorn, p. 144. — 25) So übersetzt Flügel; ich würde aber statt „gekrümmt sei“ vorziehen zu übersetzen „einer Veränderung unterworfen sei“ (استحالة), und unter dem entferntesten Körper die äusserste Sphäre verstehen. — 26) Flügel (ibid.) hat: Ueber des Ptolemaios künstliche Construction des Himmels (d. h. über seinen Almagest); ich bin der Ansicht, dass es sich hier um die Armillar- und Planisphärien handelt. — 27) Flügel (p. 32) übersetzt (was man aus dem Texte nicht herauslesen kann): Ueber die (nach den verschiedenen Jahreszeiten verschiedenen) Proportionen der Zeit. — 28) So übersetzt Flügel (ibid.) كوكب الذوابة, sonst heisst der Komet كوكب مذنب (geschwänzter Stern). — 29) So übersetzt Flügel (ibid.), weil عجوز = altes Weib. Wahrmund (arab. Wörterb.) hat: ايام العجوز = 5 Tage des Wintersolstitiums. — 30) Flügel (p. 33) schreibt in Klammern „Höhenmessung“; ابعاد heisst aber eben nur „Entfernungen“ und würde besser für die gegenseitige Entfernung der Berggipfel als für ihre Höhe passen. — 31) Dies ist vielleicht nur eine durch Abschreiber hineingekommene Wiederholung der vorhergehenden Abhandlung, zu welcher ursprünglich als nähere Bezeichnung die beiden Worte „Ebbe und Fluth“

hinzugefügt waren, die später irrthümlich als eigene Abhandlung hingestellt wurden. — 32) Flügel übersetzt هابطة mit „untersinkend", es heisst aber ganz allgemein „herabfallend". — 33) Flügel hat (p. 34) nach einer andern Lesart „Furcht" (خوف) statt „Einstürze" (خسوف). — Noch andere Schriften al-Kindîs siehe bei H. Ch. I. 389, II. 296, III. 372, V. 152 und 274.

Ahmed ben at-Tajjib.

34) Starb nach Casiri (I. 407) im Jahre 286 (899). — 35) Was الاعشاش = die Nester bedeutet, habe ich nicht feststellen können; die beiden Bücher sind bei H. Ch. getrennt aufgeführt, das erstere V. 46, das letztere III. 66. — 36) Casiri (I. 407) hat: غش الصناعة statt غش الصناعات und übersetzt: Commentarius in artem sophisticam? — 37) Das Wort „Algebra" fehlt bei H. Ch. V. 38, die Algebra dieses Autors findet sich dann aber V. 67. — H. Ch. führt noch andere Schriften von Ahmed ben at-Tajjib an, die ich nicht alle citieren kann, ich verweise auf die Stellen: III. 385, V. 33, 58, 104, 128.

Ibn Karnîb.

38) Ueber dessen Lebenszeit habe ich keine directen Angaben gefunden, doch berichtet Casiri (I. 433) nach der Bibl. philos. arab., dass sein Bruder Abû'l-ʿAlâ ums Jahr 348 (959) der Lehrer Abû'l-Wafâs in ʿIrâk war. — 39) Andere Codices haben „gleichen" statt „entgegengesetzten". Wüstenfeld (p. 38) hat nach Casiri (I. 387): De quiete inter utrumque arteriae motum. Ibn al-K. führt von ihm noch an: Wie man mittelst der Höhe erkennen kann, wie viel Stunden des Tages verflossen sind (Fihrist. A. 263. 3).

Abû Jahjâ al-Merwazî.

40) Lebte nach Ibn al-K. und Ibn Abî Usaibiʿa in Bagdad (Fihrist. A. 263. 6); die Lebenszeit ist unbestimmt, wahrscheinlich Ende des 9. und Anfang des 10. Jahrhunderts.

Mattâ ben Jûnus.

41) War ein berühmter Arzt und Philosoph zu Bagdad zwischen 320 und 330 (932—942) (Abulph. 304). Nach Wüstenfeld (p. 53) starb er im Jahre 329 (941).

Ibn Zurʿa.

42) Er starb nach Abulph. (p. 338) im Jahre 398 (1008) in Bagdad.

Ibn al-Chammâr.

43) Er starb nach Wüstenfeld (p. 58) im Jahre 381 (991).

Eukleides.

44) Flügels Ausgabe des Fihrist hat اسطروشيا (Istrûschijâ), andere Autoren haben besser اسطوخيا (Istûchijâ) oder اسطقسات (Istukisât) für *στοιχεῖα*. — 45) Die Worte وقد خرج sind unklar, vielleicht ist darunter

verstanden, „welcher (der Commentar) soeben veröffentlicht worden ist". Steinschneider (Eukl. bei d. Arab. Z. f. M. Ph. 31. Jahrg. p. 90) hat nur: „der veröffentlicht worden ist"; ich glaube aber, قد habe hier die Bedeutung von „soeben, vor Kurzem"; in der That starb al-Anṭâkî, der später (p. 40) als selbstständiger Autor genannt wird, im Jahre 376, also kurz vor der Abfassung des Fihrist. — 46) Der arabische Name ist kaum anders zu lesen, wird aber wohl anfänglich anders gelautet haben, wenigstens wird im Artikel über Apollonios seiner Abfassung der Elemente nicht Erwähnung gethan. Wir führen hier schon anticipierend an, dass verschiedene Autoren, wie H. Ch. (V. 148), Ibn al-K. und nach ihm Casiri (I. 384), Abulph. (p. 64) den Apollonios, den Verfasser der Kegelschnitte, der Zeit nach vor Eukleides setzen; die älteste Quelle, der Fihrist, thut dies nicht, sagt, wie schon erwähnt, unter „Apollonios" nichts von Eukleides und seinen Elementen und bringt die drei grossen Mathematiker Eukleides, Archimedes, Apollonios in richtiger chronologischer Reihenfolge. Ferner ist die Schreibweise, worauf wir freilich kein zu grosses Gewicht legen wollen, nicht ganz dieselbe: Apollonios der Zimmermann, im Artikel „Eukleides" ist geschrieben ابلنيوس, und der Verfasser der Kegelschnitte im Artikel „Apollonios" ابلونيوس; der erstere hat den Zunamen النجّار = der Zimmermann, der zweite nicht — alles dies rechtfertigt doch wohl die Vermuthung, der Verfasser des Fihrist habe die Beiden, wenn ihm auch, was gar nicht sicher ist, derselbe Name vorgelegen haben sollte, nicht für eine und dieselbe Persönlichkeit gehalten. Vergl. hierüber auch Wenrich (p. 198) und Gartz (de interpretibus et explan. Euclid. arab. Halae 1823, p. 7). Dass übrigens schon al-Kindî durch Stellen des Proklos und die bekannte Vorrede des Hypsikles zum 14. Buche in seinem Bericht über die Elemente irregeleitet worden sein mag, wollen wir nicht bestreiten. — 47) Im Fihrist und bei Casiri (I. 340) fehlt الفلكى, das bei anderen Autoren sich vorfindet, nach ظاهرات; doch ist hier kein anderes Werk als die φαινόμενα gemeint, und nicht wohl zu begreifen, wie Casiri übersetzen konnte: Loca ad superficiem. — 48) Sehr wahrscheinlich das in griechischer Sprache verloren gegangene Werk Euklids de divisionibus superficierum, das arabisch als Bruchstück von Woepke aufgefunden und übersetzt worden ist (Journal asiat. 1851), und von dem eine Bearbeitung durch einen gewissen Muhammed Bagdadinus von John Dee schon 1570 in lateinischer Uebersetzung herausgegeben und später verschiedenen Euklidausgaben beigefügt worden ist. Vergl. Cantor, Vorlesg. I. p. 247. — 49) Casiri (I. 430) und Wenrich (p. 184) übersetzen الفوائد mit utilitas (Wenrich fügt unter d. Addenda und Corrig. hinzu: lege „utilia"), und in der That ist die nächste Bedeutung von فائدة pl. فوائد, wie diejenige von πόρισμα = Nutzen, Gewinn; eine weitere Bedeutung beider Wörter, des arabischen wie des griechischen, ist auch Erklärung, Anmerkung, Zusatz (ein Gewinn, eine Nutzanwendung aus etwas Vorhergegangenem). Dass also unzweifelhaft mit diesem Buche die Porismen Eukl. gemeint sind, hätten wohl schon Casiri und Wenrich, noch eher Gartz (der im oben citierten Werke p. 5 übersetzt: de reditibus), gewiss aber Heiberg herausfinden sollen, welch'

letzterer (Literargesch. Stud. über Eukl. p. 7—8), nachdem er aus dem Casirischen Verzeichniss der Eukl. Schriften angeführt hat: liber de utilitate, weiter unten fortfährt: „Es fehlen hier folgende, uns aus griechischen Quellen bekannte Werke: *πορίσματα* etc.“ Was soll man aber gar von Steinschneider denken, der in seiner Abhandlung „Euklid bei den Arabern“ (Z. f. M. Ph. 31. Jahrg. p. 81—110.) dieses Werk des Eukl. gar nicht berücksichtigt, obgleich es in dem wesentlich von ihm benutzten Fihrist deutlich steht?! Wir wollen annehmen, dasselbe sei von Herrn Steinschneider übersehen worden. — 50) Jedenfalls das musikalische Werk *κατατομὴ κανόνος*, wie auch Casiri und Wenrich (l. c.) richtig vermuthen. — 51) Ein Fragment dieser Schrift ist bekanntlich verschiedenen Euklidausgaben beigefügt, so denen von 1537 und 1546 (Basel) und 1703 (Oxford). — 52) Diese beiden Schriften über die Synthesis und Analysis sind vielleicht Theile der Data oder Porismen oder weitere Ausführungen derselben (vergl. Heiberg, literar. Stud. p. 39), oder beziehen sich auf die wenigen Sätze des 13. Buches der Elemente, deren Beweise in eine Analysis und eine Synthesis zerfallen, die man dem Eudoxos zuschreibt, und die nach Klamroth (Ueber den arab. Euclid, Z. D. M. G. Bd. 35. p. 314 u. 326) ziemlich späte Einschiebungen sein sollen, da sie in den ältesten arabischen Euklidübersetzungen nicht vorkommen.

Archimedes.

53) Damit ist wohl das Buch „de dimensione circuli“ gemeint, welches aber arabisch eher heissen sollte: مساحة الدائرة; und in der That führt Casiri (I. 384) ein solches an, daneben aber auch noch eine „Quadratur (تربيع) des Kreises.“ Auch H. Ch. nennt zwei Werke: V. 60 de quadratura circuli und V. 150 de dimensione circuli ejusque computatione (وتكسيرها). Vergl. Wenrich p. 191. — 54) Casiri (l. c.) und H. Ch. (V. 151) haben: de septangulo (مسبّع) in circulo. — 55) Casiri (l. c.) übersetzt المثلثات mit: de figuris conoidibus, was eine unglaubliche Freiheit der Uebersetzung verräth (dieses Werk fehlt nämlich bei allen arabischen Autoren und sollte nach Casiris Meinung doch da sein!). — 56) Casiri übersetzt wieder sehr kühn: الخطوط المتوازية mit „de lineis spiralibus“; vielleicht ist dieses Werk gemeint, dann ist aber ursprünglich statt المتوازية ein anderes Wort dagestanden: spiralig, schraubenförmig heisst im Arabischen لولبى; Casiri selbst führt (I. 382) ein Werk eines gewissen Simmeadis (er fügt hinzu: id est Samii) an, betitelt فى الخطوط اللولبية = de lineis spiralibus. Es ist dies wahrscheinlich das Archimedische Werk, als dessen Verfasser die Araber Konon, den Samier, gehalten haben mögen. — 57) H. Ch. sagt V. 351: sunt (assumpta sive lemmata) quindecim figurae et recentiores hoc opus numero librorum intermediorum adjecerunt, qui inter Euclidem et Almagestum legendi essent. — 58) Dieses Werk wird von H. Ch. (V. 154) und Casiri (l. c.) auch angeführt und sein Titel ist der Bedeutung nach von dem des vorigen nicht wesentlich verschieden. — 59) Casiri (l. c.) übersetzt falsch: de anguli rectilinei trisectione et

proprietatibus. — 60) Dies ist die wörtliche Uebersetzung von آلة ساعات الماء التي ترمى بالبنادق; Casiri (l. c.) übersetzt falsch und Wenrich (p. 194), welcher einfach sagt „de clepsydris", unvollständig, indem er den Nachsatz weglässt; Flügel übersetzt im H. Ch. (V. 93) den ganz gleichen Text, wie er im Fihrist steht, mit: de clepsydris, ubi aqua per canales tollitur?

Hypsikles.

61) Casiri (I. 346) übersetzt في الاجرام والابعاد mit: de corporum coelestium magnitudine et distantia; es heisst aber wörtlich nichts anderes als „über die Körper und die Entfernungen." — 62) Es heisst im Text das vierte und fünfte Buch; عشر = zehn ist durch die Abschreiber weggelassen worden: Flügel vergisst, dies zu erwähnen.

Apollonios.

63) Es ist wohl gemeint „schwierig zu verstehen." — 64) Es sind dies die zwei Bücher über den Verhältnissschnitt (de sectione rationis), von Bernard und Halley aus dem Arabischen ins Lateinische übertragen 1706. — 65) H. Ch. (V. 164) hat an Stelle von: de ratione determinata, de ratione radicum arithmeticarum (نسبة الجذور statt النسبة المحدودة). Die Lesart des Fihrist deutet auf die verloren gegangene Schrift „de sectione determinata" hin, nur heisst es eben ratio (نسبة) statt sectio (قطع), was aber, nach dem Inhalt der nach Pappos' Angaben wiederhergestellten Schrift zu urtheilen, ganz wohl gestattet und ebenso bezeichnend ist; die Lesart des H. Ch. aber könnte die ebenfalls nicht mehr vorhandene Arbeit des Apollonios über die Irrationalgrössen bedeuten. Vergl. Cantor, Vorlesungen I. p. 299 u. f. und Woepke, Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apoll. (Mém. présent. par div. Sav. à l'Acad. des Sc. Tome XIV. Paris 1856.) — 66) سطوح kann allgemein „Fläche", speciell aber „ebene Fläche", auch „Oberfläche" bedeuten; Wenrich (p. 203) vermuthet hierin das Buch „de locis planis", wir glauben eher, es sei damit „de sectione spatii" gemeint. Casiri (I. 385) übersetzt: de locis planis eorumque sectionibus similibus, was freilich die Stelle im Fihrist niemals heissen kann. — 67) Ist wohl identisch mit „de tactionibus". — 68) Casiri (I. 385) hat diese Schrift auch, sonst findet sie sich nirgends erwähnt.

Hermes.

69) War nach der Tradition der Araber der Hüter des dem Merkur geweihten Tempels zu Babylon; er ist wahrscheinlich identisch mit der ägyptisch-griechischen mythischen Persönlichkeit des Hermes Trismegistos, dem angeblichen Erfinder der Alchymie und Magie, dem (besonders von den Neuplatonikern) eine Reihe alchymistischer und astrologischer Schriften zugeschrieben werden, und der von Jenen als ein ägyptischer König oder Weiser gehalten oder ausgegeben wurde. Vergl. über ihn auch Abulph. p. 9 u. 10, H. Ch. I. 62., Casiri I. 374—376, und Fihrist. A. p. 186 u. f. — 70) تحويل, das in der Folge sehr oft wiederkehrt, ist in den mittelalterlichen lateinischen Büchern über Astrologie durch revolutio (revolutio

annorum nativitatum, revolutio annorum mundi) wiedergegeben, ich übersetze es mit „Umlauf“; man könnte wohl auch mit Flügel (al-Kindî, Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. 1. p. 29) sagen: „Wechsel der Jahre“ (d. i. der Stufenjahre des Menschenalters), oder vielleicht noch besser „Verlauf der Jahre“. Statt „Gradeintheilung des Umlaufes der Jahre“ wäre vielleicht richtiger: Stufen- oder Staffeljahre (anni climacterici): in der Astrologie je das siebente oder neunte Jahr von der Geburt an.

Eutokios.

71) Dieses Buch über „die zwei Linien“ ist nichts anderes als der Commentar zum zweiten Buche des Archimedes über die Kugel und den Cylinder, was weder Casiri noch Wenrich, jedenfalls aus Unkenntniss des Inhaltes dieses Commentars, bemerkt haben. Unter den „zwei Linien“ sind die zwei mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Geraden verstanden, über deren Construction jener Commentar zum grossen Theile handelt und mit den „Aussprüchen der mathematischen Philosophen“ sind die verschiedenen von Eutokios angeführten Auflösungen griechischer Mathematiker gemeint. — 72) H. Ch. (V. 386) hat statt dieses Commentars einen solchen zum 1. Buche des Almagestes.

Menelaos.

73) Casiri (I. 345) übersetzt مختلطة durch „mixtorum“, was allerdings die nächste Bedeutung ist, aber keinen Sinn gibt, es kann wohl auch „verschieden“ heissen; Wenrich (p. 211) hat: de cognitione quantitatis discretae corporum permixtorum? — 74) H. Ch. (III. 471) hat: Observationes astronomicae a Menelao Romae anno octingentesimo quinquagesimo quarto, quingentos quindecim annos ante aeram islamicam factae. Das würde mit der Zeit Trajans, nicht Domitians stimmen, doch könnte wohl Menelaos auch schon einige Jahre vorher in Rom gewesen sein.

Ptolemaios.

75) مواليد übersetze ich in der Folge immer wörtlich mit „Geburten“, es ist natürlich darunter der astrologische Begriff „Nativitäten“ oder „Horoskope“ verstanden. — 76) Ueber den astrologischen Begriff „Loose“ vergl. Flügel, die Loosbücher der Muhammedaner, 1860. — 77) Wenrich (p. 233) hält diese Schrift für das Buch „de hypothesibus planetarum.“ — 78) Es ist wahrscheinlich ebenfalls eine astrologische Schrift; denn in dieser Kunst spielte die „sieben“ eine grosse Rolle; vergl. Flügel, Loosbücher, p. 41, 42 u. 49. — 79) Es ist diese Schrift das sogenannte Centiloquium, griechisch $\varkappa\alpha\varrho\pi\acute{o}\varsigma$ = fructus (librorum suorum), welche gewöhnlich dem Ptolemaios zugeschrieben wird, was, wie man aus diesem Artikel ersieht, von den Arabern in Bezug auf verschiedene astrologische Schriften gethan wurde. — 80) Die Schrift „de planisphaerio“ ist also im Fihrist nicht erwähnt, dagegen bei H. Ch. V. 61.

Autolykos.

81) H. Ch. (V. 140) fügt zu dem Buche de sphaera quae movetur hinzu: quem Thabit recognovit et Nassir Eddin correxit; während er I. 389

sagt: librum tempore Khalifae Mamun arabice verterunt, illumque postea Yacub ben Is'hac Kindi recognovit et emendavit.

Simplikios.

82) Mit الرومي = der Rumäer, Grieche, bezeichnet der Araber den Oströmer, Byzantiner, im Gegensatz zum Westeuropäer, den er الفرنجي = den Franken nennt. — 83) Ist vielleicht in dieser Schrift eine Beziehung zu der in des Simplikios Commentar zur Physik des Aristoteles aufgenommenen Stelle aus der Geschichte der Geometrie des Eudemos zu vermuthen? — 84) Wenrich (p. 209) erwähnt irrthümlich diese beiden Schriften des Simplikios unter Autolykos und unter Simplikios (p. 297) bloss den Commentar zu „de anima" des Aristoteles.

Dorotheos.

85) Der Name ist unsicher, doch stimmen Wenrich (p. 292) und Flügel, A. 123 darin überein, dass hier kein anderer als Dorotheos von Sidon (Sidonius) gemeint sei, welcher Apotelesmata in Versen geschrieben hat. Vergl. Fabricius, Bibl. gr. Lib. III. p. 511 u. f. und Zedler, Gelehrtenlexicon. — 86) Andere, z. B. Ibn al-K. und nach ihm Wenrich (l. c.) haben: Ueber die Epochen und Perioden. — 87) H. Ch. (I. 198) erwähnt, Dorotheos habe auch über electiones = Tagewählerei geschrieben.

Theon von Alexandria.

88) Masîr (مسير) heisst wörtlich „Gang", „Fahrt", „Lauf", also wahrscheinlich: Kanon des Laufes der Gestirne. H. Ch. (III. 470) sagt: Observationes astronomicae Theonis Alexandr. nongentos viginti unum (!) annos ante aeram islam. factae. In tabulis astron. ex illis observationibus enatis et Canun nominatis aera usus est Philippi Rumaei El-Benná, qui Alexandri M. frater (?) fuit. — 89) Es ist dies jedenfalls sein Commentar zum Almagest.

Valens.

90) Der Name ist unsicher, doch wird höchst wahrscheinlich der Astrologe Vettius Valens v. Antiochia gemeint sein, dessen Lebenszeit abweichend angegeben wird: Cantor (Vorlesg. I. p. 300) setzt ihn ins II. Jahrh. n. Chr.; Zedler (Gelehrtenlex.) hält ihn für denjenigen Valens, welchen Constantin d. G. über das zukünftige Schicksal Konstantinopels befragt haben soll; Pauly (Realencyclop. VI. b. p. 2532) kennt nur einen Vettius Valens aus Ariminum, der von Plinius in der Reihe der berühmten Aerzte genannt wird und nach demselben zur Zeit des Kaisers Claudius gelebt hat. Vergl. die Anmerkung zu Pappos.

Theodosios.

91) Der arabische Name ثيودورس, wie er im Fihrist steht, aber in den verschiedenen von Flügel benutzten Codices ganz verschieden geschrieben ist, ist allerdings eher Theodoros zu lesen, aber die citierten Werke lassen keinen Zweifel übrig, dass hier Theodosios gemeint ist.

Pappos.

92) Flügel, A. p. 124 gibt die Schreibarten der einzelnen Codices: drei haben بلس = balos, einer بسس (ohne diakrit. Punkte); Ibn al-K. hat p. 114 بنس = banos (die Araber haben kein P); da n und b sich im Arabischen nur durch die Stellung des diakritischen Punktes (oben oder unten) unterscheiden, so können sie durch die Abschreiber leicht verwechselt worden sein, auch das l kann aus einem ursprünglichen b entstanden sein und so hat Flügel wohl Recht, wenn er behauptet, es könne hier nur Pappos gemeint sein. Woepkes Ansicht (vergl. die oben citierte Abhandlung in den Mém. prés. par div. Sav. à l'acad. Tome XIV. p. 674), dass der Verfasser des Commentars zum 10. Buche des Eukleides nicht Pappos, sondern Valens sei, ist kaum haltbar; sein Hauptbeweis, dass nämlich in einem MS. (952.2 Suppl. arabe) Pappos durch بابوس wiedergegeben sei, ist nicht durchschlagend, ich erinnere nur daran, auf wie viele Arten der Name Apollonios in den arabischen MS. geschrieben wird. Und schliesslich ist noch zu bemerken, dass der Fihrist bestimmt zwischen diesen beiden Persönlichkeiten unterscheidet und sie in getrennten Artikeln behandelt und dem Valens nur astrologische Werke zuweist, wie er in der That auch nur als Astrologe bekannt ist. — 93) Die Collectiones math. des Pappos scheinen also dem Verfasser des Fihrist nicht bekannt gewesen zu sein.

Heron.

94) Soll nach Th. H. Martin in einer Handschrift der Leydener Bibl. existieren; Wenrich (p. 213—214) gibt an im Codex 1061 (399, 1), aber unter dem Titel: Heronis Scholia in elem. Eucl. problemata quaedam. Es wäre an der Zeit, dass diese Frage, ob Heron einen Commentar zu den Elementen geschrieben habe, einmal endgültig erledigt würde. — 95) Wenrich (p. 213) bemerkt hierzu: E Graeco in arab. sermonem a Kosta ben Luca conversus. Exemplum huius versionis habetur in bibl. Lugdun. cod. 1091 (51). — 96) Es sind dies natürlich die Pneumatica Herons. — H. Ch. V. 48 erwähnt auch seinen liber de machinis bellicis (βελοποιϊκά).

Hipparchos.

97) Flügel, A. 124 sagt: „— Es herrscht hier überhaupt eine arge Verwirrung. Unstreitig ist nach ابرخس (Hipparchos) der ganze ihn besprechende Artikel ausgefallen und von dem folgenden das den Anfang eines neuen Artikels bildende Stichwort ارسطبغوس (Aristippos), woran sich الزفني (az-Zafanî) anschliesst". Ibn al-K. hat nämlich einen Artikel über Aristippos von Kyrene, dem er unerklärlicherweise den Beinamen al-Zafanî (nach einem Ort in Syrien, in der Nähe von Emesa) gibt und dem er die hier im Fihrist dem Hipparchos zugetheilten Bücher zuweist. Nun tritt aber die Schwierigkeit hinzu, auf die auch Flügel hinweist, dass Aristippos jedenfalls keine mathematischen Bücher verfasst hat und dass in dem späteren Artikel des Fihrist über Abû'l-Wafâ dieser als der Commentator der Algebra des Hipparchos genannt wird, wie es hier geschieht. (Dies könnte

freilich auch in den Artikel über Abû'l-Wafâ durch spätere Abschreiber hineingefügt worden sein, die sich der Stelle in dem schon verdorbenen Artikel über Hipparchos erinnerten.) Wir wollen übrigens nicht unterlassen zu bemerken, dass Cantor (Vorlesg. I. 313) es nicht für unmöglich hält, dass Hipparch über quadratische Gleichungen geschrieben habe. Ich für meinen Theil halte es für das Wahrscheinlichste, dass hier durch Abschreiber arge Verwechslungen, Auslassungen und Entstellungen stattgefunden haben und dass die dem Hipparch oder dem az-Zafanî zugeschriebenen Bücher ursprünglich unter dem unmittelbar folgenden Diophantos gestanden haben; dann ist vielleicht auch das Buch „über die Theilung der Zahlen“ identisch mit dem Diophantischen Buch „Ueber die Polygonalzahlen“. Dass hier das „Versehen mit geometrischen Beweisen“ durch Abû'l-Wafâ vom Commentar des Hipparchschen Buches und im Artikel über Abû'l-Wafâ vom Commentar des Diophantischen Buches gesagt ist, dürfte auch für meine Ansicht sprechen. Steinschneider (Die mittl. Bücher der Araber in Z. f. M. Ph. 10. 476—78), der die Stelle in Ibn al-K. nicht kennt, ist mit Casiri für Aristarch und macht aus az-Zafanî „der Samier“. Diese Ansicht ist jedenfalls nicht mehr haltbar, um so weniger, als der Fihrist weiter unten den Aristarch mit seinem bekannten Buche über Sonne und Mond anführt.

Thadinos?

98) Flügel, A. 125 bemerkt, dass sich keine geeignete Transscription für irgend einen bestimmten griechischen Namen biete.

Badrogogia?

99) Ein arg verstümmelter Name, woraus sich bis jetzt nichts machen liess.

Tinkalos (oder Tinklos)?

100) Dieser Name, sowie der folgende, Tinkros, treten bisweilen in astrologischen Schriften auf; es sind, wie der oben genannte Hermes, myth.-babylonische Persönlichkeiten, die von den Arabern als die Vorsteher der den sieben Planeten geweihten Tempel zu Babylon gehalten wurden. Vergl. auch Salmasius, de annis climact. Praef. et p. 561 u. f., der an ersterer Stelle beide für die nämliche Persönlichkeit hält und mit dem in griechischen Schriften genannten Teukros identificiert. — 101) Beides sind specifisch astrologische Begriffe: الوجوه sind die facies oder decani, d. h. die Drittel jedes Thierkreiszeichens (also je zehn Grade), oder eigentlich ihre Regenten; الحدود sind die termini, gr. ὅρια, d. h. die Planetenbezirke oder auch Zeichenbezirke, indem die 30 Grade jedes Zeichens auf die fünf Planeten (Sonne und Mond participieren nicht) in bestimmter Weise (nicht gleichmässig) vertheilt werden. Vergl. Salmasius, de annis clim. Praef. etc. und Ptolemaei lib. quadripart. tract. I. cap. XXI.

Muritos (oder Muristos)?

102) Ein nicht festzustellender Name: Ibn al-K. (p. 371) nennt ihn nach Flügel, A. 125 einen griechischen Gelehrten; ebenso Abulfeda (Hist.

asnteilam. p. 157): Myrtos vel Myristos, Doctor graecus, matheseos peritus et inventionis plurimae etc.

Sâʿâtos?

103) Flügel, A. 125 schreibt: Ohne allen Nachweis.

Herkal?

104) Ibn al-K. (p. 464) nennt ihn nach Flügel, A. 125 einen babylonischen Gelehrten und einen der sieben Tempelwächter; in der Ausgabe v. H. Ch. (V. 171) übersetzt Flügel das arabische Wort mit „Heraclius", und daselbst ist ihm ein anderes Buch, nämlich de alchymia, zugeschrieben. — 105) Mit دوائر „Kreise" ist hier höchst wahrscheinlich ein den Wasserrädern verwandtes rundes, oder sich drehendes Instrument gemeint, oder sollte es heissen „Ueber die Umdrehung der Wasserräder"?

Kitwar?

106) In andern Codices liest man auch Kitwan. Casiri (I. 418) übersetzt: Canthon, ein bedeutender babylonischer Musiker, schrieb unter Anderem de tonorum casu.

Aristoxenos.

107) So vermuthet Flügel, A. 125, dass ارسطكس zu übersetzen sei, dieser Grieche schrieb bekanntlich über Musik.

Aristarchos.

108) Nach Wenrich (p. 209) ist bei Ibn al-K. noch hinzugefügt: وبعدهما „und ihrer Entfernungen". Ebenso bei Casiri (I. 346); dieser fügt noch bei: liber de arithmetica (im arabischen Text steht Algebra) und liber de numerorum divisione. Bekanntlich stehen diese beiden Bücher im Fihrist unter Hipparch oder az-Zafanî, und wir kommen hier wieder auf die in Anmerkg. 97 behandelte Verwechslung der Autoren. H. Ch. V. 70 hat unmittelbar nach einander dasselbe Buch „über Sonne und Mond und ihre Entfernungen" das eine Mal dem Aristoteles, das andere Mal dem Aristarchos zugeschrieben. Es ist jedenfalls eine durch Abschreiber hervorgebrachte Wiederholung desselben Werkes.

Apion?

109) Flügel, A. 274 Index II, gibt diese unsichere Transscription von ابيون, das ebenfalls verstümmelt sein kann, wenigstens kennt man keinen Patriarchen dieses Namens, und Apion der Grammatiker aus Aegypten, der zur Zeit des Tiberius lebte, kann gewiss nicht damit gemeint sein. S. 284 wird er im Fihrist nochmals genannt als erster Verfertiger von Planisphärien.

Kankah.

110) Wüstenfeld (p. 3 u. 4) hat Katkah, was auch Flügel, A. 125 für das richtigere hält. Wüstenfeld bemerkt dann im weitern: „Die Araber

haben fast überall Kankah geschrieben; sie haben den Namen des Buches Kuṭṭaka = Algebra für den Namen des Verfassers gehalten, welcher Aryabhaṭṭa heisst". Vergl. v. Bohlen, das alte Indien, II. p. 281 und Cantor Vorlesg. I. p. 533 u. ff. Vergl. auch Reinaud, Mémoire sur l'Inde p. 315, nach welchem Albîrûnî erzählt, dass Kankah in die Dienste Hârûn ar-Raschîds als Astronom getreten sei; es ist dies wahrscheinlich eine Verwechslung mit dem indischen Arzt Mankah. Vergl. ebenfalls Reinaud (l. c.). — 111) Das Wort „Nimûdâr" übersetzen Wüstenfeld (l. c.) und Flügel in H. Ch. (V. 165) mit „specimen"; es ist aber das persische Wort für „Horoskop" (vergl. Vullers, Lexicon persico-latinum und Anmerkg. 15).

Nahak.

112) Dieses Werk schreibt Wüstenfeld (l. c.) dem Sandschahl zu und erwähnt Nahak gar nicht, ebenso H. Ch. VI. 242.

113) Vergl. über die Namen dieser indischen Gelehrten auch Wüstenfeld (l. c.) und Flügel, A. 126.

Die Söhne Mûsâs.

114) Die Stelle .. وكان الغالب ist schwer zu übersetzen, ich konnte keine andere Version als die gegebene herausfinden, die einen Sinn gehabt hätte, und doch halte ich sie nicht für die richtige, ich bin der Meinung, dass hier eine corrupte Stelle vorliege. — 115) Casiri (I. 418) schreibt diesen Sohn dem Muḥammed zu. — 116) Ueber den Streit zwischen Flügel und Steinschneider, ob Farasṭûn oder Ḳarasṭûn die richtige Lesart sei, lasse ich mich hier nicht weiter aus, man vergl. Flügel, A. 127 und des Letzteren Brief an den Fürsten Boncompagni in den Annali di matem. da Tortolini Tom. V. 1862. — 117) Casiri (I. 418) übersetzt الشكل المدوّر المستطيل mit de cylindro, und auch L. Nix (Das fünfte Buch der Conica des Apoll. in der arab. Uebers. des Thabit ben Korrah, Leipzig 1889), sowie Steinschneider (Bibl. math. v. Eneström, 1887, p. 71) glauben, es könnte diese Bedeutung haben, obwohl der Letztere ganz richtig bemerkt, dass „Cylinder" durch die Araber mit اسطوانة wiedergegeben wird. Die Bedeutung „Cylinder" ist auch deshalb noch zu bezweifeln, weil ein Körper kaum jemals durch شكل wiedergegeben wird, dies bedeutet stets „Figur" oder besser „Lehrsatz" (weil zu einem Lehrsatz gewöhnlich eine Figur gehört). — 118) Wahrscheinlich ein Commentar, oder eine Umarbeitung der Apollonischen Kegelschnitte. — 119) Es ist unklar, was unter diesem Buche verstanden ist, vielleicht ein Commentar zu den drei letzten Büchern (V—VII) des Apollonios, oder eine Einleitung hierzu, die über gewisse Dreieckseigenschaften handelt. Vergl. Steinschneider (Bibl. math. 1887 p. 72 u. 73). — 120) „Galenos" hat es jedenfalls ursprünglich nicht geheissen, wahrscheinlich ist die Vermuthung Steinschneiders (l. c.), dass Menelaos zu lesen und die Figur „Sektor oder Sekante", al-Ḳaṭṭâʿ, gemeint sei. Vergl. die Anmerkung zu Ṯâbit. — 121) Die Lesarten für „Theil" variieren sehr bei den verschiedenen Autoren, Steinschneider (l. c. 74) schlägt als „freie Emendation Djîzu, den gewöhnlichen Ausdruck für radix" vor: sollte doch

wohl heissen djidr? Casiri (I. 418) hat جرّ = Zug, Anziehung, statt جذر und übersetzt: de virtute attrahendi. Vergl. Art. Proklos und Anmerkg. 3. — 122) Steinschneider hat statt „erklärendem" „mathematischem" für تعليمى. — 123) Steinschneider (l. c.) liest statt مائية (Wesen) مائة (hundert) und übersetzt demgemäss „über das Centiloquium". Nun ist zu beachten, dass diese Schrift des Ptolemaios arab. allgemein heisst الثمرة = καρπός, (vergl. den Artikel „Ptolemaios" und Anmerkung 79) und dass Ibn al-K. nach Flügel, A. 127 berichtet, dass Muhammed auch in der Logik sehr bewandert war; warum kann er nicht Schriften aus diesem Gebiet verfasst haben? Ich halte vor der Hand meine Uebersetzung aufrecht. — 124) Es ist dies der von M. Curtze (Halle 1885) herausgegeb. Liber trium fratrum de geometria, der sich hauptsächlich mit diesen drei Problemen beschäftigt. Am Schlusse ist jedenfalls zu lesen نسبة (Verhältniss) statt قسمة (Theilung). H. Ch. (II. 213) hat unter den „mittleren Büchern" diese Schrift unter dem Titel: Liber cognitionis dimensionis figurarum, aber ohne Verfasser, die Flügel in Klammern hinzufügt (auctoribus filiis Musae). Vergl. f. weiteres Steinschneider (l. c. p. 44—48).

Al-Mâhânî.

125) Lebte nach Delambre (Hist. de l'astron. du moyen âge, p. 79) um die Mitte des 9. Jahrhunderts. Er verfasste nach dem Fihrist (s. Art. Eukleides) einen Commentar zum 5. Buche des Eukl. Ist dies vielleicht identisch mit seiner Abhandlung über das Verhältniss? — 126) Casiri (I. 431) hat عروض statt عروش und übersetzt: de latitudinibus siderum; allerdings ist auch عروش = Throne ein astronom. Begriff (vergl. Sédillot, Mém. sur les instr. astron. des Arabes in Mém. prés. par div. Sav. à l'Acad. des inscript. Tom. I. 1844. p. 221). — 127) So übersetzt Flügel, A. 128, während Woepke wahrscheinlich mit mehr Recht liest: dans la démonstration desquelles on n'a pas besoin de la supposition du contraire. Er führt dann auch diese 26 Sätze des ersten Buches an (Vergl. L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, p. 2). — Woepke gibt auch aus dem MS. 952. 2 (Suppl. arabe) einen Commentar al-Mâhânîs zum 10. Buche Eukl. an (Mém. prés. par div. Sav. à l'Acad. des Sciences, Tom. XIV. p. 663).

Al-ʿAbbâs.

128) War nach Casiri (I. 431) ein Zeitgenosse al-Mâmûns. — H. Ch. (III. 466) schreibt ihm noch astron. Tafeln zu.

Ṯâbit ben Ḳurra.

129) Diese Altersangabe verstehe ich nicht; 211 und 288 sind doch Jahre d. Hidschra und dies sind Mondjahre, also wurde Ṯâbit 77 Mondjahre = 74,6 Sonnenjahre alt; ich vermisse hierüber jede Anmerkung. — 130) Es ist dies der im Anfang des dritten Buches der Sphaerik des Menelaos stehende Satz über die sechs Abschnitte, die auf den Seiten eines sphärischen Dreieckes durch einen sie schneidenden grössten Kreisbogen entstehen (entsprechend dem Transversalensatz des Menelaos für das ebene

Dreieck), und der mit dem Namen der Regula sex quantitatum, oder Regula intersectionis, oder der arabischen Uebersetzung entsprechend mit Figura sector oder Figura secantis (شكل القطّاع) bezeichnet wird. Vergl. Anmerkung 120 und Cantor (Vorlesg. I. 350 u. 356) und Steinschneider (Die mittleren Bücher der Araber. Z. f. M. Ph. Jahrg. 10 p. 494—496). — Casiri (I. 399) führt den Codex 967 des Escurial an, welcher enthält: Thabeti opusculum de sectionibus conicis, ubi de figura cui nomen secans. Auch der Pariser Codex 952. 2. (Suppl. arabe) enthält ein MS. dieser Schrift. — 131) Es wird von verschiedenen Autoren (u. A. v. H. Ch. V. 154) dem Ṯâbit auch ein Liber datorum (sive definitorum. H. Ch.) zugeschrieben; der Fihrist kennt kein solches unter Ṯâbit, auch erwähnt er unter Eukleides den Ṯâbit nicht als Commentator seiner Data, was H. Ch. (l. c.) thut; es ist noch nicht entschieden, in welcher Beziehung diese Data des Ṯâbit zu denen des Eukleides stehen. Wie wir unter Archimedes gesehen haben, wird auch diesem vom Verf. des Fihrist (ebenso v. H. Ch. l. c.) ein Buch des Bestimmten (Gegebenen, Vorausgesetzten) zugeschrieben. — Casiri (I. 386 u. f.) führt noch eine grosse Zahl medicin., math. und astron. Werke des Ṯâbit an, die ich hier nicht alle anführen kann.

Sinân ben Ṯâbit.

132) Daselbst (Fihrist p. 302) sind aber keine math. Werke von ihm erwähnt, der betreffende Artikel zeigt überhaupt eine Lücke nach den Worten: „An Büchern verfasste er“.. — Casiri (I. 438) führt von ihm eine Reihe von Werken an, von denen ich hier nur folgende erwähne: Commentarius in librum „Acatonis“ (Steinschneider, Eukl. bei d. Arab., Z. f. M. Ph. Jahrg. 31. p. 96 vermuthet „Euklid“) de elementis Geometriae, cui non pauca de suo adjecit. Liber de figuris rectilineis in circulo. Commentarius in librum Archimedis de figuris triangularibus, conoidibus etc. (von conoid. steht nichts im arab. Text), quem Josephus Sacerdos ex Syriaco sermone in Arabicam transtulit: quam versionem Senanus etiam castigavit. — Er starb nach Casiri (I. 437) i. J. 331 (943). — 133) Vergl. Wüstenfeld p. 37. No. 84.

Abû'l-Ḥasan al-Ḥarrânî.

134) Auch von diesem sind daselbst (Fihrist p. 303) keine mathem. Schriften angeführt.

Ibrâhîm ben Sinân ben Ṯâbit.

135) Ueber sein Todesjahr habe ich keine Angaben anderswo gefunden. — 136) Flügel, A. 128 u. f. hat über diesen Autor eine ziemlich umfangreiche Stelle aus Ibn-al-K. (p. 67) abgedruckt, die ich hier in ihren wesentlichen Punkten wiedergebe; nachdem Ibn al-K. die auch von H. Ch. (V. 48, 87 u. 113) angeführten Werke Ibrâhîms: „Ueber die Schatteninstrumente (Sonnenuhren)“, „über die Erklärung der Construction und Anwendung der Sonnenuhren“ und „über den Schatten“ kurz besprochen hat, fährt er fort: „Dann verfasste er auch ein Buch über das, was Ptolemaios

nach der Methode der ebenen (geometrischen?) Darstellung[f] für die Auffindung (Erklärung) der Ungleichheiten des Saturns, Mars' und Jupiters angewandt hatte; er behandelte dies in einer einzelnen Schrift, die er im 24. Lebensjahre vollendete und in der er zeigte, dass, wenn er (Ptolemaios) von dieser Methode abgewichen und zu einer andern übergegangen wäre, er die ebene (geometr.?) Darstellung hätte entbehren können, welche er angewandt hatte; er (Ibrâhîm) schlug aber einen andern Weg als den der Messung (Vergleichung, Analogie?) ein.*) Ueber die Geometrie verfasste er 13 Abhandlungen, 11 derselben handeln über die sich berührenden Kreise, er zeigte darin alle möglichen Arten der Berührung von Kreisen und von Linien, die durch (gegebene) Punkte gehen und And. Dann verfasste er noch eine andere Schrift (hier folgt eine verdorbene Stelle تببة ثلث عشرة (?)), in welcher er 41 schwierige geometrische Probleme behandelte über Kreise und Gerade, über Dreiecke und sich berührende Kreise und And. mehr. Er wandte darin die Methode der Analysis an, ohne sich der Synthesis zu bedienen, ausser bei drei Aufgaben, welche der Synthesis bedürfen. Ebenso schrieb er eine Abhandlung, in welcher er die Art und Weise der Auflösung geometrischer Aufgaben vermittelst der Analysis und Synthesis und anderer Ausführungsarten, die bei geometrischen Aufgaben auftreten, beschreibt und über die Irrthümer handelt, die den Geometern bei der Anwendung der Methode der Analysis begegnen können, wenn sie dieselbe gemäss ihrer Gewohnheit abkürzen wollen.**) Er verfasste auch eine schöne (subtile) Abhandlung über die Construction der drei Kegelschnitte, in welcher er zeigt, wie auf (von) jedem der drei Kegelschnitte eine beliebige Anzahl Punkte gefunden werden können". — Diese letztere Abhandlung wird wohl identisch sein mit dem im Fihrist genannten Commentar zum ersten Buche der Kegelschnitte.

Abû'l-Ḥusain ben Karnîb und Abû'l-ʿAlâ, sein Sohn.

137) Bezüglich ihrer Lebenszeit ist mir nur aus Casiri (I. 433) bekannt, dass Abû'l-ʿAlâ bald nach dem Jahre 348 (959) der Lehrer Abû'l-Wafâs in ʿIrâḳ war.

Abû Muḥammed al-Ḥasan.

138) Ueber seine Lebenszeit habe ich keine Angaben gefunden. — 139) Hiermit ist wahrscheinlich das fünfte Buch der Elemente gemeint. Hammer (Lit. Gesch. d. Araber V. 308) macht aus dieser Abhandlung zwei: „Erklärung dessen, was schwierig ist in dem Buche Euklids" und „über die Proportionen, in einem Tractat". Es wäre auch möglich, dass statt نسبة zu lesen wäre قسمة, dann wäre es das Buch der Theilung (der Figuren).

---

*) Diese Arbeit über Ptolemaios ist wohl das im Fihrist genannte Buch über die Zwecke des Almagestes.

**) Diese Abhandlung befindet sich in dem MS. 952. 2 (Suppl. arabe) fol. 1—18. s. Woepke, Mém. prés. à l'acad. des sc. Tom. XIV. Paris 1856. p. 663.

Al-Fazârî.

140) Ueber seine Lebenszeit finde ich keine Angaben, oder sollte er etwa, wie Flügel, A. 129 zu vermuthen scheint, identisch sein mit dem von Ja'kûbî im Kitâb al-Buldân (p. 13) erwähnten Astronomen und Baumeister al-Mansûrs Ibrâhîm ben Muhammed al-Fazârî? — 141) Ist eine Art von Astrolabien, deren von den Arabern viele unterschieden wurden. Vergl. H. Ch. I. 397 und Dorn, p. 83—87.

'Omar ben al-Farruchân.

142) Lebte nach Casiri (I. 362) und Ibn al-K. (p. 279) zur Zeit al-Mâmûns. — 143) Casiri (I. 362) übersetzt المحاسن mit „de viris bene meritis“(?) — 144) Casiri (l. c.) lässt الكواكب weg und übersetzt فى خطوط mit „cum notis interlinearibus“. Der Codex Escurial. 917 enthält von ihm: Elementa astrologica (Casiri l. c.). Vergl. auch den Art. „Dorotheos“.

Abû Bekr.

145) مقياس kann nach Dorn (p. 88) auch die Sonnenuhr selbst bedeuten. Casiri (I. 431) übersetzt: de instrumento mensorio (seu de nilometro). — 146) Casiri (l. c.) schreibt: ad astronomiam, was nicht im arabischen Text steht. — 147) اختيارات = electiones = Tagewählerei (Flügel), in der Astrologie die Auswahl der nach den Constellationen günstigen Zeit (Tage, Stunden) zur Vornahme irgend einer Handlung (vergl. H. Ch. I. 198); der heute noch gebräuchliche Ausdruck „Loostage“ wäre wohl hier der bezeichnendste. — 148) تسييرات = profectiones oder directiones. Es ist dies ein astrologischer Begriff, für den ich kein passendes deutsches Wort gefunden habe. Derselbe befindet sich u. A. in den Prolegom. des Ibn Chaldûn (Uebers. v. de Slane in den Notices et extr. des Ms. de la bibl. impér. Tom. XX. 1865, p. 219), wo vom Uebersetzer in einer Note eine Stelle aus der Astrolog. gallica v. Morin angeführt wird, worin es heisst: Directio nihil aliud est quam movere sphaeram, donec locus secundus, hoc est promissor, traducatur ad situm primi, sive significatoris (d. i. des Regenten). Vergl. auch Delambre, Hist. de l'astron. du moyen âge, p. 489, und Sédillot, Prolégom. aux tables d'Oloug Beg. p. 211. Ich glaube daher, dass Flügel im H. Ch. II. 296 dieses Wort unrichtig durch „cursus et motus“ wiedergibt. — 149) Die Codices haben statt ميالات verschiedene andere Lesarten, so Casiri nach Ibn al-K. مثالات und übersetzt (I. 431) de parabolis (?); vielleicht könnte es aus einem Pural von ميل verdorben sein. Die arabische Astronomie unterschied nämlich verschiedene Neigungen (Schiefen), so die erste, zweite, grösste und totale (vergl. Dorn, p. 112 u. 149 und Sédillot, Mém. prés. à l'acad. des inscript. Tom. I. p. 227); oder es könnte auch ein astrolog. Begriff sein; vergl. die letzte Schrift im Art. Abû Ma'schar.

Mâ-schâ-allâh.

150) In den mittelalt.-lat. Schriften über Astrologie wird er gewöhnlich Messalah oder Messahalach genannt; vergl. Casiri I. 435, Abulphar.

p. 248 (Uebers. 161). — 151) Vergl. Fihrist, A. 129. — 152) Casiri (l. c.) macht aus diesem Werke zwei: de planetarum conjunctionibus, et de gentium sectis, was vielleicht das richtige sein wird. — 153) Casiri (l. c.) übersetzt: de expellendo reipublicae regimine. — 154) Casiri (l. c.) hat statt حدوث (Ereignisse) حدود und übersetzt: de rerum definitionibus (was er an andern Orten mit „Horoskope" übersetzt). — 155) d. h. über die magischen Eigenschaften der Buchstaben علم خواص الحروف, dies war ebenfalls ein wesentliches Capitel der Astrologie und Magie (vergl. Flügel, Loosbücher d. Muh.). — 156) Wahrscheinlich astrologisch: über die Auswahl der Reisetage.

Abû Sahl al-Fadl ben Nûbacht.

157) Vergl. Casiri (I. 421) und Abulphar. p. 224 (Uebers. 145). — 158) Eigentlich das Buch des astrologischen oder mit Hülfe der Gestirne gewonnenen Fâls (s. Flügel, Loosbücher, p. 15—16 und Anmerkung 9). Flügel in H. Ch. (VI. 6) übersetzt: claves decreti divini. — 159) Könnte auch heissen: über die Aehnlichkeit und die Abbildung; es ist aber sehr wahrscheinlich keine geometrische, sondern eine astrologische Schrift. — 160) Hier übersetzt Casiri (l. c.) sehr einfach: Excerpta varia astrologica.

Sahl ben Bischr.

161) Ueber Lebenszeit und Wohnsitz habe ich keine weiteren Angaben gefunden als diejenigen Casiris (I. 439), die er seiner Uebersetzung des arabischen Textes in Klammern beifügt: Hispanus tertio Egirae seculo jam ineunte nobilis, was ziemlich unwahrscheinlich ist. Vergl. auch die Bemerkung zum zweitletzten Werke Sahl ben Bischrs, dass er es in Chorasan verfasst habe. — 162) Hier fehlt wahrscheinlich eine nähere Bestimmung. — 163) الاعتبارات = die Erwägungen; اعتباري = relativ, im Gegensatz zu مطلقة = absolut; sollte es vielleicht heissen اجتماعات = Conjunctionen (des Mondes)? — 164) Vergl. Fihrist, A. 130 (274. 5).

Al-Chowârezmî.

165) Genaueres über seine Lebenszeit findet man nirgends. — 166) Leider ist dieser Artikel über einen der bedeutendsten arabischen Mathematiker unzweifelhaft verdorben, denn seine beiden bis auf unsere Zeit erhaltenen Hauptwerke, die Algebra und die indische Rechnungsweise (der sog. Algorithmus) fehlen. Casiri hat keinen eigenen Artikel über Muhammed ben Mûsâ, sondern nur zerstreute Stellen (so I. 371, wo er ihn nach Cardanus als den „algebrae instaurator" bezeichnet), H. Ch. erwähnt (V. 67) seine Algebra unter anderen Werken gleichen Inhaltes und fügt hinzu: Hic est primus, qui de Algebra scripsit, und Ibn al-K. (p. 326) schreibt nach Flügel, A. 130 einfach den Fihrist ab. Es ist also möglich, dass diese Stelle des Fihrist schon vor Ibn al-K. verdorben gewesen ist. Wahrscheinlich liegt nun hier eine Verschiebung vor; man beachte nämlich, dass diese beiden Schriften nebst derjenigen „über die Vermehrung und die Verminderung" dem folgenden Autor, dem Sind ben ʿAlî, am Schlusse des Artikels zugeschrieben sind; es ist nun möglich, dass dieselben urspünglich

unter al-Chowârezmî gestanden und durch Abschreiber an den Schluss des nächsten Artikels über Sind ben ʿAlî verschoben worden sind; umgekehrt könnten auch die letzten Schriften Sind ben ʿAlîs dem Chowârezmier zugeschoben worden sein, so dass also eine Vertauschung der drei letzten Schriften unter diesen beiden stattgefunden hätte. Diese Verwechslungen waren um so eher möglich, als hier vier Mathematiker aufeinander folgen, die alle am Hofe al-Mâmûns zu gleicher Zeit als astronomische Beobachter lebten; man beachte noch, dass allen vieren, ausser Sind ben ʿAlî, astronomische Tafeln zugeschrieben sind und zwar bei zweien „in zwei Ausgaben", und dass bei Sind ben ʿAlî eine Abhandlung „über die Schneidenden", „in zwei Ausgaben" vorkommt — vielleicht sollte es hier statt „über die Schneidenden" heissen „astronomische Tafeln", oder dieses ist nach „Schneidenden" ausgefallen? — Dass der Verfasser des Fihrist die oben genannten Werke ursprünglich dem al-Chowârezmî beigelegt hat, wird auch noch sehr wahrscheinlich dadurch, dass in der Folge Commentatoren der Algebra (Abû'l-Wafâ) und der „Vermehrung und Verminderung" (ʿAbdallâh ben al-Ḥasan) des Chowârezmiers genannt werden. Ich muss hier noch bemerken, dass es mir aufgefallen ist, dass Woepcke, wo er über das Buch „de l'augmentation et de la diminution" spricht (Journ. asiat. 6. Série, Tom. I. 1863), die Lücke im Artikel des Fihrist über al-Chowârezmî nicht erwähnt.

Sind ben ʿAlî.

167) So ist wohl المنفصلات والمتوسطات zu übersetzen, obwohl statt des zweiten Wortes eher الموسّطات stehen sollte; es wird dies also eine Abhandlung über das 10. Buch Eukl. sein (vergl. Art. Eukleides), oder wenigstens über die Irrationalitäten. — 168) Casiri (I. 440) erwähnt, dass Sind auch astronomische Tafeln verfasst habe und so ist wohl die oben (Anmerkg. 166) ausgesprochene Vermuthung berechtigt, dass die Worte „in zwei Ausgaben" nicht zu „Schneidenden", sondern zu ausgefallenen „astronomischen Tafeln" gehören. — 169) In Bezug auf die drei letzten Werke siehe Anmerkg. 166; über das zweite vergl. noch Cantor, Vorlesg. I. 627 u. f.

Jaḥjâ ben Abî Manṣûr.

170) Vergl. Casiri I. 425 und Abulphar. p. 248 (Uebers. 161).

Ḥabasch ben ʿAbdallâh.

171) Ibn al-K. (p. 199) und Abulphar. (p. 247. Uebers. 161) zählen drei Arten von Tafeln auf: die Sindhindischen, die erprobten (d. h. durch eigene Beobachtung) und die kleineren, betitelt al-Schâh (des Königs); Reinaud (Mém. sur l'Inde, p. 319) nennt die letzteren die persischen. Eigenthümlicherweise zählt Ibn al-K., nachdem er von diesen drei Tafeln gesprochen hat, unter den nach dem Fihrist angeführten Schriften al-Merwazîs nur zwei Tafeln (die damascenischen und die mâmûnischen) auf. — 172) Obgleich im Text السطوح = Fläche, ebene Fläche steht, so bin ich doch der Ansicht, dass es sich hier um Astrolabien, oder vielleicht noch besser um Sonnenuhren und Astrolabien handelt; die ersten drei Adjective,

„horizontal“, „senkrecht“, „geneigt“, entsprechen in ihrer arabischen Form genau den drei Arten von Sonnenuhren, welche die Araber unterschieden (vergl. Dorn, p. 86), und das letzte Adjectiv „schief“ (منحرفة) bezeichnet eine besondere Art von Astrolabium, das den Namen nach der eigenthümlich geformten Alhidade (العضادة المنحرفة) erhalten hat (vergl. Woepke, über ein in d. kgl. Bibl. zu Berlin befindl. arab. Astrolab. Abhdlg. der k. Acad. zu Berlin, Jahrg. 1858, math. Thl. p. 3).

Ibn Ḥabasch.

173) Er ist der Sohn des vorigen, der bei Ibn al-K. auch Aḥmed ben ʿAbdallâh heisst. Näheres über sein Leben habe ich nicht gefunden.

Die Erzählung des Ibn al-Muktafî.

174) Dieser starb nach Abulphar. (p. 329. Uebers. 216) im Jahre 377 (987). Wie aber seine Erzählung an diese Stelle kommt, ist nur wieder durch Verschiebungen der Abschreiber zu erklären, sie stand jedenfalls ursprünglich nach dem Art. über Abû Maʿschar, oder demjenigen über Sind ben ʿAlî.

Al-Ḥasan ben Sahl ben Nûbacht.

175) Er lebte nach Abulphar. (p. 258. Uebers. 168) unter den Chalifen al-Wâṯiḳ und al-Mutawakkil (842—861).

Ibn al-Bâzjâr.

176) Lebte nach Casiri (I. 432) als Astrologe unter al-Mâmûn.

Churzâḏ ben Dârschâd.

177) Ibn Challikân (No. 849) schreibt nach Flügel, A. 131 Churrazâḏ. Ich habe keine weiteren Angaben über ihn gefunden.

Die Söhne aṣ-Ṣabbâḥs.

178) Ueber ihre Lebenszeit habe ich keine Angaben gefunden. Vergl. Ibn al-K. p. 69.

Al-Ḥasan ben al-Chaṣîb.

179) Casiri (I. 413—14) nennt ihn einen Perser und sagt, er habe sein Buch, Florilegium betitelt, dem Jaḥjâ ben Châlid, der zur Zeit Hârûn ar-Raschîds lebte, gewidmet; der Fihrist aber schreibt dieses Buch dem folgenden Autor al-Chajjâṭ mit derselben Bemerkung zu; es scheinen hier wieder Verwechslungen oder Verschiebungen stattgefunden zu haben. — 180) Kârimihtar ist persisch und bedeutet „das grössere Werk“.

Al-Chajjâṭ.

181) Vergl. Anmerkg. 179; ich halte Casiris Uebersetzung „Florilegium“ für die treffendste. Vergl. auch Steinschneider, die mittleren Bücher der Araber (Z. f. M. Ph. Jahrg. 10. p. 463).

ʿOmar ben Muḥammed al-Marwarûḏî.

182) Andere Codices haben al-Merwazî, Casiri (I. 435) al-Merw al-Ruzi (in urbe Merw in Persia natus); nach ihm war er der Enkel Châlid ben ʿAbdulmaliks, und gab nach dessen und Sind ben ʿAlîs und Anderer System und Berechnung verfertigte astronomische Tafeln heraus.

Al-Ḥasan ben aṣ-Ṣabbâḥ.

183) Ist wahrscheinlich identisch mit dem dritten der oben genannten Söhne aṣ-Ṣabbâḥs.

Abû Maʿschar.

184) Ist der im Mittelalter unter dem Namen Albumasar berühmte Astrolog. — 185) Casiri (I. 351) übersetzt: Tabulae de annonae inopia et fraudibus? Es ist aber hazârât ein persisches Wort, welches „Tausende" bezeichnet und von Abû Maʿschar in der Bedeutung von „Perioden von 1000 Jahren" gebraucht wurde. (Vergl. auch Reinaud, p. 329.) — 186) النكت bezeichnet: Anecdoten, witzige, treffende Reden, vieldeutige Antworten; Casiri (l. c.) übersetzt: de astrorum signis et vestigiis?! — 187) d. h. der Jahrtausende (hier braucht Abû Maʿschar nicht den pers. Ausdruck hazârât für „Tausende", sondern den arab. الوف; diese Schrift handelt von den Tempeln und andern monumentalen Gebäuden, die in jedem Jahrtausend auf der Erde errichtet worden sind. Vergl. Flügel, A. 131 und H. Ch. V. 50. — 188) In den Prolegom. des Ibn Chaldûn (Trad. par De Slane, Notices et extraits des MS. de la bibl. impér. Tom. XIX. Paris, 1862 p. 245) liest man: al-zaïrdja, une figure, sur la quelle ils (les astrologues) opèrent, elle a la forme d'un grand cercle, qui renferme d'autres cercles concentriques, dont les uns se rapportent aux sphères célestes, et les autres aux éléments, aux choses sublunaires, etc. — On y remarque aussi des chiffres appartenant au caractère nommé ghobar. — In denselben Prolegom. III. Theil (Notices et extraits, Tom. XXI. p. 199 u. ff.) liest man: nous indiquerons ensuite le caractère de cette opération (avec la zaïrdja), la quelle n'a aucun rapport réel avec le monde invisible et consiste uniquement à trouver une réponse qui soit d'accord avec une question, et qui, étant prononcée, offre un sens raisonnable. — H. Ch. (III. 530) sagt: الزائرجة = ars ex literis continua mixtione extractis verba eliciendi, quibus quae in futurum nobis vel accident vel non accident, significantur. — Ich vermuthe, dass das unter Valens angeführte Buch az-Zabradsch heissen sollte az-Zâïrdscha. — 189) al-intihâ'ât und al-mamarrât sind zwei astrologische Kunstausdrücke: der erstere bedeutet nach Sédillot (Prolégom. aux tables d'Oloug-Beg, p. 215—218) les termes (Grenzen?) und ist verwandt mit demjenigen der profectiones; derselbe ist aber mit wenigen Worten schwer klar zu legen, ich muss daher den Leser auf das genannte Werk Sédillots verweisen; der letztere (nach Dorn, p. 78) ist identisch mit ḏawât al-afâḳ, und dies sind die Kreise (der Astrolab.), auf denen die Himmelsgegenden verzeichnet sind: die Horizontkreise. — 190) درج bedeutet wohl hier nicht „Grade" im Sinne der Geometrie oder Astronomie, sondern vielmehr die Stufenjahre des Lebens, die anni climacterici (vergl. Salmasius,

de annis climact.). — **191)** احترافات gibt keinen Sinn, es sollte vielleicht heissen انحرافات d. h. die Abweichungen, nämlich der Gebetsrichtung (Ḳibla) vom Meridian eines Ortes (vergl. Dorn p. 33, und Sédillot, Mémoire p. 101). Oder hängt es etwa mit den magischen Eigenschaften der Buchstaben (حرف pl. حروف) zusammen? Ich finde freilich diese Form in Flügels „Loosbücher der Muhammed." nicht. Casiri (l. c.) hat احترامات und übersetzt: rerum evitandarum. — **192)** Vergl. Anmerkg. 149 (Abû Bekr).

ʿAbdallâh ben Masrûr an-Naṣrânî.

193) Vergl. Casiri I. 403. Näheres über sein Leben fand ich nicht.

ʿUṭârid ben Muḥammed.

194) Ich habe über seine Lebenszeit keine Angaben gefunden. H. Ch. (IV. 113) hat von ihm: constellationes astrorum und fügt hinzu: minime tamen veritati et rectae rationi respondet.

Jaʿḳûb ben Ṭâriḳ.

195) Casiri (I. 425) macht ihn zum Spanier, aber fügt nichts Weiteres über sein Leben hinzu. — Reinaud (Mém. sur l'Inde, p. 313—14) bemerkt, Albîrûnî berichte, Jaʿḳûb ben Ṭâriḳ habe seinen Traité de la sphère im Jahre 161 (777) verfasst, und fügt hinzu: Il paraît avoir écrit dans Bagdad même, et sous la même inspiration que Muḥammed al-Fazary. — **196)** Kardadschât al-Dschaib. Dschaib ist bekanntlich das arabische Wort für Sinus, und Kardadschât soll nach Reinaud (l. c.) corrumpiert sein aus dem indischen „cramadjya", welches sinus rectus bedeutet (d. h. der Sinus von 225′, der von den Indiern nicht mehr vom Bogen unterschieden werden konnte; vergl. Cantor, Vorlesg. I. p. 560). Nach dem Titel dieser Schrift scheint nun Jaʿḳûb diesen Sinus rectus noch weiter getheilt, d. h. die Sinus der Winkel unter 225′ berechnet zu haben, wie er auch die Tafeln „Sindhind" vervollkommnet (d. h. von Grad zu Grad berechnet) hat. — **197)** دول kann auch heissen Geschicke, Schicksalswechsel, und dann würde علم الدول die Astrologie, oder ein bestimmtes Gebiet derselben bedeuten.

Abû'l-ʿAnbas.

198) Casiri (I. 409) sagt von ihm: Traditur gloria stimulis exagitatus aliorum scripta sibi arrogasse, sonst nichts über sein Leben. Flügel, A. 64 sagt, aṣ-Ṣaimarî sei der im Jahre 243 (857) gestorbene Tischgenosse des Chalifen Mutawakkil gewesen.

Ibn Sîmawaih.

199) Casiri (I. 416) hat über ihn nicht mehr als was im Fihrist steht.

ʿAlî ben Dâûd.

200) Casiri (I. 408) erwähnt einen Abû Dâûd, genere Judaeus, Iracensis, Bagdadi floruit ante seculum Egirae tertium, professione astrologus. Vielleicht sind diese Beiden identisch.

Hârit̲, der Astrolog.

201) Lebte also, da er mit al-Hasan ben Sahl befreundet war, zur Zeit der Chalifen al-Wâtik̲ und al-Mutawakkil; vergl. Anmerkg. 175.

Ibn Abî Kurra.

202) Lebte nach Casiri (I. 409) ums Jahr 267 (880), denn er fügt zu Muwaffak hinzu: Is anno Egirae 267 Caliphatum usurpavit.

Al-Fargânî.

203) Seine Blüthezeit fällt in die Regierung al-Mâmûns (813—833), doch habe ich keine genaueren Notizen über seine Lebenszeit gefunden. — 204) Es sind dies seine Elemente der Astronomie, 1590 von Jakob Christmann, Frankfurt, und 1669 von Golius, Amsterdam, arabisch und lateinisch herausgegeben. Casiri (I. 432) macht aus dem Zusatz „Auszug aus dem Almagest“ ein eigenes Werk: de Almagesti electionibus. H. Ch. (IV. 438—39) hat: Liber triginta sectionum statt liber elementorum; allerdings haben die Codices الفصول statt الأصول, wie es eigentlich heissen sollte, und wie auch der innere Titel der Goliusausgabe wirklich lautet: في اصول علم النجوم; die Schreibweise der Codices kommt von den 30 Abschnitten (فصول) her, in welche das Buch getheilt ist. — 205) H. Ch. (II. 288) erwähnt von ihm noch ein Planisphaerium, und V. 419: explanator perfectus de doctrina sphaeram in planitiem redigendi, auctore el-Fergani.

Ibn Abî ʿAbbâd.

206) Ueber seine Lebenszeit fand ich keine Angaben. — 207) So übersetzt Dorn p. 85, die nächste Bedeutung von شعبة ist Zweig, Ast, dann auch Rinne, Rinnsal.

An-Nairîzî.

208) In verschiedenen Codices und auch bei H. Ch. (V. 386) steht Tebrîzî statt Nairîzî, letzteres ist aber nach Flügel u. And. das richtige (Nairîz oppidum Persiae, quod simile est Tabrizo: Wenrich p. 186 nach Ibn al-K.). Weitere Angaben über sein Leben habe ich nicht gefunden, da er aber für al-Muʿtadid ein Werk verfasst hat, so muss er ums Jahr 900 zur Zeit T̲âbits gelebt haben. — 209) Casiri (I. 348) und H. Ch. (V. 386) haben einen Commentar zum Almagest (nicht Quadripartitum). Im Text des Fihrist soll im Titel dieses Werkes jedenfalls der Strich über dem zweiten كتاب weggelassen werden.

Al-Battânî.

210) Der im Mittelalter unter dem Namen Albategnius bekannte, berühmte Astronom. Vergl. über sein Leben und seine Schriften auch Casiri I. 343—344, Abulphar. (p. 291, Uebers. 191), Vite di matematici arabi di Bernard. Baldi, con note di Steinschneider, Roma 1873, p. 21—32. — 211) Steinschneider (l. c.) ist der Ansicht, dass ein in verschiedenen Ausgaben vorkommender lateinischer Tractat, betitelt: de ortu triplicitatum, der gewöhnlich im Verein mit andern Schriften Bethens, d. i. Albattânîs,

gedruckt vorkommt, mit dieser Abhandlung über den Aufgang der Häuser etc. identisch sei; in der That heissen in der Astrologie je drei Zeichen des Thierkreises, also ein Viertel desselben, eine Triplicitas. Allein dieser Tractat ist so unbedeutend (gewöhnlich erscheint er nur als Anhängsel zu den ebenfalls sehr geringfügigen „horae planetarum") und sein Inhalt hat so wenig mit Conjunctionen zu thun, dass wir der Ansicht sind, der Schlusssatz „auch bekannt als seine Abhandlung über" etc. müsse ursprünglich anders gelautet haben, d. h. mit andern Worten, es solle damit ein selbstständiges Werk gemeint sein.

Ibn Amâdschûr.

212) Casiri (I. 403) nennt ihn einen Perser, aus Herat gebürtig, ex regia Pharaonum stirpe. Lebenszeit unbestimmt. — **213**) القرن kann ich hier nicht anders als durch „Frage" übersetzen. — **214**) Es ist kaum anzunehmen, dass hier ممرات die Horizontkreise bedeute. Vergl. Anmerkg. 189. Casiri (l. c.) hat statt diesem مريخ (Mars) und übersetzt: Liber tabularum martis secundum Persarum computum conditarum.

Sein Sohn Abû'l-Ḥasan ʿAlî.

215) H. Ch. erwähnt an mehrern Stellen (IV. 141. VI. 243. 436) einen Abû'l-Ḥasan ʿAlî ben Abî'l-Ḳâsim el-Beihaḳi, vulgo Funduḳ dictus, der aber kein Mathematiker war.

Al-Harûnî.

216) Nach Casiri (I. 426) ist Harawî, d. h. aus Herat, das richtige. — H. Ch. (II. 121) nennt einen Yusuf ben Gorion Israili al-Harûnî, der aber Historiker war und eine Geschichte der Israeliten geschrieben hat. — **217**) Casiri (l. c.) übersetzt الزرق النجومى mit Caerulea Sidera, de futurorum praedictionibus (?).

Aṣ-Ṣaidanânî.

218) Siehe Anmerkung 166.

Al-Adamî.

219) Casiri (I. 430) und Reinaud (Mém. sur l'Inde, 320) berichten nach Ibn al-K. von seinem Sohne Muḥammed ben al-Ḥusain (vielleicht liegt eine Umstellung der Namen vor, so dass beide identisch wären), er habe astronomische Tafeln nach dem Sindhind verfasst, die eine grosse Berühmtheit erlangt hätten; er habe sie aber nicht vollenden können, sie seien dann nach seinem Tode im Jahre 308 (920) von seinem Schüler al-Ḳâsim ben Muḥammed herausgegeben worden. Hieraus würde sich eine obere Grenze für die Lebenszeit al-Adamîs ergeben. — **220**) al-harâfât gibt keinen Sinn, wahrscheinlich soll es heissen al-inḥirâfât = die Abweichungen (Azimuthe d. Ḳibla). — **221**) Vergl. Dorn p. 77.

Ibn Nâdschija.

222) Casiri (I. 433) nennt ihn einen Spanier.

Abû ʿAbdallâh.

223) Flügel sagt im Fihrist, A. 132 zu الرخامة المطبلة: Unstreitig eine Sonnenuhr, die die Mittagsstunde durch Beckenschall andeutete. Vergl. dagegen Dorn, p. 87. رخامة = Marmorplatte, bedeutet übrigens nicht bloss Sonnenuhr, sondern nach Tschaghminy (vergl. Dorn, p. 86) ein Instrument von Stein, Messing oder Anderem, für eine bestimmte Breite, länglich oder rund, mit Linien versehen, z. B. der Linie der Neige und der Gleiche, durch welches man viele Operationen ausführen könne, z. B. die Bestimmung der Höhen, der Zeiten, der Schatten u. s. w. — Die Bedeutung „trommelförmig" würde dann allerdings eher die Form طبلية oder vielleicht auch مطبلية voraussetzen, aus welch' letzterer leicht diejenige des Fihrist entstehen konnte. — **224**) Es sollte im Texte wohl heissen بناديق, denn بنادق bedeutet „Schleudersteine".

Die neueren Rechner und Arithmetiker.

225) Damit meint jedenfalls der Verfasser des Fihrist, aus den Werken der aufgeführten Autoren zu schliessen, diejenigen Mathematiker, die sich hauptsächlich mit praktischer Mathematik, d. h. mit der indischen Rechnungsweise, der sog. bürgerlichen Arithmetik, und der praktischen Geometrie (Flächen- und Körperberechnung) beschäftigt haben.

ʿAbdalḥamîd.

226) Casiri (I. 405) hat an Stelle des letzteren Werkes zwei: De ingeniosis arithmeticis inventis und de numerorum proprietatibus.

Abû Barza.

227) Er ist der Enkel des vorigen und deshalb sollte es hier wohl heissen: ben Wâsiʿ ben Turk. Casiri (I. 408) berichtet von ihm, dass er in Bagdad lebte, sich in der Wissenschaft der Zahlen ausgezeichnet habe und daselbst im Jahre 298 (911) gestorben sei. I. 421 nennt er ihn „Persa".

Abû Kâmil.

228) Ueber seine Lebenszeit habe ich keine Angaben gefunden. — **229**) Die Algebra wird von H. Ch. mehrmals erwähnt, so II. 585: كتاب الشامل = das Umfassende, quod in optimis huius generis (er spricht nämlich hier von Büchern über Algebra) operibus numeratur, et optimus eius commentarius Coreshi (?) auctorem habet; IV. 10, wo er zu dem شامل noch في الجبر والمقابلة = „über die Algebra" hinzufügt; V. 27, wo er كامل statt شامل hat, was aber dasselbe bedeutet. — H. Ch. (V. 68) heisst es bei Besprechung der Algebra des Muḥammed ben Mûsâ: Abû Kâmil etc. in libro el-waṣâjâ bi'l-jebr we'l-mocabelet: Composui, inquit, librum titulo Kemâl el-jebr notum, qui perfectam Algebrae doctrinam et additamenta ad eius principia continet; et argumentis in libro meo secundo confirmavi, libro Mohammedis ben Musa de reductione per aequationem primas partes

et palmam dandas esse etc. Nach H. Ch. hat also Abû Kâmil auch ein Buch betitelt: el-waṣâjâ bi'l-jebr we'l-mocabelet, d. h. über die Erbtheilungen (Testamente) mit Hülfe der Algebra (berechnet, gelöst), verfasst, über welches Gebiet bekanntlich auch Muḥammed ben Mûsâ in seiner Algebra handelt. H. Ch. führt V. 168 noch ein Buch von Abû Kâmil an, betitelt: Buch der Testamente mit Hülfe der Wurzeln (Wurzelrechnung) gelöst; es ist dies aber mit dem eben genannten identisch, denn hier wird aus demselben wieder dieselbe Stelle über Muḥammed ben Mûsâs Algebra angeführt wie V. 68; wahrscheinlich sollte statt جذر = Wurzel, جبر = Algebra stehen; Flügel übersetzt übrigens: liber institutionum radicum arithmeticarum. — 230) Es ist dies die sog. Regula al-chatain (eig. chatâ'ain) d. h. der beiden Fehler, die heutige regula falsi; nach dem von Libri (hist. des scienc. math. Bd. I. 304—368) veröffentlichten Liber augmenti et diminutionis und den Bemerkungen von Woepke über diesen Gegenstand (vergl. Journ. asiat. 6. Série, Tom I. p. 513—514) wäre also der Inhalt dieses Buches identisch mit dem des vorhergehenden „Ueber die Vermehrung und die Verminderung" — vielleicht ist ursprünglich im Texte zwischen beiden ويقال له (es wird auch genannt) oder etwas ähnliches gestanden. — 231) Man vergl. damit den Titel des Werkes von al-Karchî: Kâfî fî'l-ḥisâb = Genügendes über das Rechnen.

Sinân ben al-Fath.

232) Ueber seine Lebenszeit habe ich nichts gefunden. — 233) التحت (at-taḥt) bedeutet „der untere Theil", „was unten ist"; dies gibt keinen Sinn; Woepke (Journal asiat. 6. Série, Tom. I. p. 490 u. 493) liest التخت (at-tacht) und übersetzt: Traité de la table relatif au calcul indien, oder Le traité du calcul effectué sur la table. Diese Uebersetzung wäre wohl annehmbar, besonders wenn man damit den Titel eines Werkes von al-Anṭâkî vergleicht, das Ibn al-K., nicht aber der Fihrist anführt: Das Buch über die Rechnungsweise mit der Hand (den Fingern) ohne Tafel. Aber nun kommt hinzu, dass H. Ch. III. 61 über „Ilm ḥisâb el-taḥt we el-meil" = die Kunst (Wissenschaft) des Rechnens el-taḥt und el-meil (Neigung, Schiefe) folgendes sagt: quae ea ars est, qua ratio cognoscitur, operationes arithmeticas signis tractandi, quae numeros ab uno usque ad decem exprimunt et omnes alios, qui hos excedunt, ope ordinum quo ponuntur excludunt. Haec signa ab Indis originem duxisse dicuntur. — — Eadem doctrina nobis el-taḥt we el-taráb (Erde, Staub = ġobâr) dicitur. Hiernach wäre ḥisâb at-taḥt nichts anderes als das Rechnen mit den indischen Ziffern mit Stellenwerth, die Bedeutung von taḥt und von meil (oder mail) ist aber damit noch keineswegs festgestellt. Ich wage nun die Vermuthung auszusprechen, das Wort „taḥt" bedeute das indische „tatstha", welches die sog. symmetrische oder kreuzweise Multiplicationsmethode bezeichnet, und das Wort „mail" bedeute die schiefe oder Diagonalmethode (vergl. Cantor, Vorlesg. I. p. 519 u. 520). Ich will aber nicht unterlassen, noch durch eine andere Conjectur auch der Woepkeschen Lesart zu ihrem Rechte zu verhelfen: Liest man mit Woepke „tacht" und übersetzt „Tafel", so wäre dann vielleicht das „mail" in H. Ch. = mîl

(welches arabisch gleich geschrieben wird) zu lesen, und „Griffel“ oder „Stift“ zu übersetzen; dann würde also ḥisâb at-tacht wa'l-mîl das indische Rechnen mit dem Griffel auf der Sandtafel, im Gegensatz zum Fingerrechnen bedeuten. Gewissheit wird man über diese Fragen aber erst erhalten, wenn eine dieser Abhandlungen mit dem Titel at-taḥt oder at-tacht näher untersucht sein wird, was bis jetzt meines Wissens nicht geschehen ist (Woepke gibt l. c. nicht eine Analyse des Inhaltes eines der Werke von Anṭâkî, sondern eines Buches von an-Nasawî, betitelt: le satisfaisant).[g] — 234) Es kann auch über die Summation von Kuben handeln; vergl. Woepke: Passages relatifs à des sommations de séries de cubes etc. (Journal de mathém. par Liouville, 1864 u. 1865).

Abû Jûsuf al-Miṣṣîṣî.

235) Ueber sein Leben fand ich keine Angaben. — 236) Ḥisâb addaur ist nach H. Ch. III. 62 ein besonderer Fall der Erbtheilungs- oder Testamentsrechnung, er sagt daselbst: Ilm ḥisâb el-dewr we el wesâya, ars legata computandi in orbem circumlata. Haec est ea doctrina, qua quantitas cognoscitur testamento mandata, quando, ut primo adspectu intelligitur, ad ea pertinet, quae in orbem circumferenda sunt. Dann folgt ein längeres Beispiel und am Schlusse: Itaque hac doctrina quantitas partis donatione in alium transeuntis terminatur, et apparet, eius utilitatem magnam esse, quamquam raro tantum necessaria sit. Diese Definitionen sind nicht klar; man vergl. die Algebra von Muḥammed ben Mûsâ, wo Rosen (p. 133) ḥisâb ad-daur mit Computation of returns übersetzt; aus den Beispielen ersieht man, dass es sich hauptsächlich um das Zurückgehen eines Vermächtnisses auf die Hinterlassenen des Testators handelt, wenn der im Testament Bedachte vorzeitig stirbt. Z. B.: Ein Mann auf dem Todtbette emancipiert einen Sklaven, dessen Kaufpreis 300 Dirhem war, und hat sonst kein Vermögen, der Sklave stirbt und hinterlässt 300 Dirhem und eine Tochter, was erhält die Tochter und was muss sie den Erben des Mannes zurückbezahlen.

Ar-Râzî.

237) Lebenszeit unbekannt. Vergl. den Art. Eukleides.

Muḥammed.

238) Casiri (I. 433) fügt zum Namen hinzu: Praetor (Hispalensis), hat aber weiter nichts über die Lebenszeit. Woher Casiri das „Hispalensis“ hat, weiss ich nicht, es steht nicht im arabischen Text.

Al-Karâbîsî.

239) Lebenszeit unbestimmt. Vergl. Art. Eukleides. — 240) So übersetzen sowohl Casiri I. 410, als auch Wahrmund (arabisches Wörterbuch) misâḥat al-ḥalka, was wörtlich „die Ausmessung des Ringes“ heisst; das Planisphaerium heisst sonst: Tasṭîḥ al-Kura.

Aḥmed ben Muḥammed.

241) So muss man wohl نيل übersetzen, was allerdings auch Indigo und den Fluss Nil bedeuten kann; sollte es vielleicht ميل = mîl oder mail heissen und demgemäss eine Abhandlung über die indische Rechnungsweise, oder über die Schiefe der Ekliptik sein? vergl. Anmerkg. 233.

Al-Makkî.

242) Vergl. Anmerkg. 234.

Al-Iṣṭachrî.

243) Flügel, A. 133 vermuthet, dieser Rechner könnte identisch sein mit dem 244 (858) geborenen und 328 (939) gestorbenen Richter Abû Saʿîd al-Ḥasan ben Aḥmed ben Jazîd al-Iṣṭachrî, der als Marktaufseher in Bagdad fungierte.

Jûḥannâ al-Ḳass.

244) Er wird ums Jahr 970 geschrieben haben (vergl. Woepke, Essai d'une restitution etc. in Mémoires prés. par div. Savants, Tom. XIV. Paris 1856 p. 665, und Steinschneider, Euklid b. d Arabern, Z. f. M. Ph. Jahrg. 31. p. 88—89) und ist wahrscheinlich vor 987 gestorben, in welchem Jahre der Verfasser des Fihrist den Haupttheil seines Werkes geschrieben hat. Vergl. auch den Art. Eukleides.

Ibn Rauḥ, der Ṣabier.

245) Der Verfasser gibt ausser diesem Namen gar nichts weiteres von ihm an, doch ist er nach Flügel, A. 133 deswegen nicht mit dem folgenden Autor Abû Dschaʿfar al-Châzin zu identificieren, wie Chwolsohn (Ṣabier, I. 615) thut; der Verfasser des Fihrist wusste einfach nichts weiteres über sein Leben und seine Werke.

Abû Dschaʿfar al-Châzin.

246) Seine Lebenszeit ist nicht genauer zu fixieren, als dass er noch Zeitgenosse des Verfassers des Fihrist war (vergl. Anmerkg. 244). Casiri (I. 408) nennt ihn „Persa", vergl. Art. Eukleides, wo er al-Chorâzânî genannt wird. Vergl. ferner noch: Steinschneider, Euklid bei den Arabern (l. c. p. 89). — **247)** Unter صفيحة pl. صفائح (Ṣafîḥa pl. Ṣafâ'iḥ) versteht man einerseits die sog. Scheiben, tabulae regionum (s. Dorn p. 27 u. 144), die je nach der Breite des Beobachtungsortes verschieden gezeichnet waren und zur Beobachtung jeweilen in das Astrolabium gelegt wurden; zu einem vollständigen und überall brauchbaren Astrolabium gehörten also eine Reihe solcher Scheiben, wenigstens für die wichtigsten Orte des Reiches construiert; andrerseits verstand man darunter ein besonderes Astrolabium, das nach seinem berühmtesten Constructeur und Beschreiber das Zarkâlische Astrolabium: aṣ-Ṣafîḥat az-Zarkâlijja genannt wurde. Vergl. Sédillot, Mém. sur les instr. astron. des Arabes (in Mém. prés. par div. Sav. Tom. I. 1844. p. 182 u. ff.) und Steinschneider, Études sur Zarkali (Bullet. di Bibl. e di Stor. d. Sc. Mat. e Fis. Tom. XIV.).

ʿAlî ben Aḥmed al-ʿImrânî.

248) Vergl. Art. Eukleides. — 249) Casiri (I. 411) hat ausser diesem Werke noch: Liber de electionibus cum aliis plurimis ad astrologiam pertinentibus.

Abû'l-Wafâ.

250) Diese Unterrichtsgeschichte wird von Ibn al-K. (und nach ihm von Casiri I. 433 und Woepke: Journ. asiat. 1855, p. 244 f.) anders erzählt: hiernach studierte er die Arithmetik und die Geometrie unter Abû Jaḥjâ al-Bâwardî (statt Mâwardî) und Abû'l-ʿAlâ ben Karnîb, und später hörten unter ihm selbst seine beiden Oheime theoretische und praktische Arithmetik. Nach demselben Autor starb Abû'l-Wafâ am dritten Tag des Radschab des Jahres 388 (1. Juli 998); nach Ibn-Challikân im Jahre 387. — 251) Woepke (l. c. p. 247—250) gibt auch die Titel der 49 Capitel dieses Buches nach einem Leydener Ms. — 252) Vergl. hierüber Woepke (l. c. p. 251—253) und Anmerkg. 97. — 253) Der Text des Fihrist und fast alle Codices haben hier بمال مال = mit dem Quadrat des Quadrates, was keinen Sinn geben würde; Woepke (l. c. 254) liest mit Recht ومال مال = und des Quadrates des Quadrates, und bemerkt, dass es sich jedenfalls um die geometrische Auflösung der Gleichungen: $x^3 = a$, $x^4 = a$, $x^4 + ax^3 = b$ handle. — 254) Woepke (l. c. 254) übersetzt: De la manière de distinguer le cercle de la sphère (Sphère = Kugel wird aber arabisch gewöhnlich nicht durch فلك sondern durch كرة wiedergegeben). Uebrigens ist aus beiden Lesarten nichts zu machen, Woepke übergeht auch dieses Werk stillschweigend. — 255) كواكب, das ich durch Himmelskörper oder Gestirne wiedergebe, übersetzt Woepke mit „Planètes"; bekanntlich kann es beides bedeuten. — Das letztgenannte Werk der Tafeln wird von Ibn al-K. nicht erwähnt, dagegen hat dieser zwei Werke, die der Fihrist nicht anführt, nämlich den Almagest, und eine Abhandlung über das Operieren mit den Sexagesimaltafeln. Dass er das erstere Werk nicht citieren kann, ergibt sich sehr natürlich aus dem Umstand, dass dasselbe (nach Delambre, hist. de l'astr. du moyen âge, p. 156) astronomische Angaben enthält, die aus der Zeit nach 987 (Abfassungszeit des Fihrist) datieren, also später erschienen sein muss. — Ibn Challikân citiert ein Werk Abû'l-Wafâs „über die Bestimmung (der Länge) der Sehnen" (vergl. Woepke, l. c. 256); wahrscheinlich sind hiemit seine trigonometrischen Arbeiten gemeint (vergl. Woepke, Journ. asiat. 1860, p. 281 ff. und Cantor, Vorlesg. I. p. 641 f.). — H. Ch. (I. 382) schreibt Abû'l-Wafâ einen Commentar zu den Elementen des Eukleides zu; V. 172 hat er: librum scripsit de operationibus geometricis, cui tredecim capita dedit, quae de operatione cum canone geometrico, norma, circino et figuris agunt. Es ist dies jedenfalls die Sammlung geometrischer Constructionen nach Abû'l-Wafâ, die sich in einem persischen Manuscript (Nr. 169, anc. fonds.) vorfinden, und die wahrscheinlich von einem seiner Schüler zusammengestellt worden sind. (Vergl. Woepke, l. c. 218 ff. und Cantor, Vorlesg. I. p. 638—640.)

Al-Kûhî.

256) Er beobachtete nach Casiri (I. 441) im Jahre 378 (988) in Bagdad unter den Buiden. — **257**) Andere Codices haben „der Instrumente„ (vergl. L'algèbre d'Alkhayyâmî, par Woepke, p. 55), wieder andere „der Erde" (vergl. Fihrist. I. Lesarten p. 26). — **258**) والذى خرج منه übersetzt Steinschneider (Euklid. b. d. Arabern, Z. f. M. Ph. Jahrg. 31. p. 94) durch „was er veröffentlicht hat" (dies soll sich nämlich auf die folgenden Werke beziehen).[h] — **259**) Vergl. die Veröffentlichung dieser Abhandlung aus dem Nachlasse Woepkes in den Notices et extr. des Ms. de la bibl. impér. Tom. XXII. 1. — **260**) Woepke (L'algèbre d'Alkhayyâmî, p. 55 u. 56) vermuthet, dies sei die Abhandlung al-Kûhîs, betitelt: Traité du problème de mener d'un point donné deux lignes renfermant un angle donné, welche sich im Ms. 952. 2 (Suppl. arabe de la bibl. impér.) befindet (vergl. Woepke, Essai d'une restit. de trav. perdus d'Apoll. in Mém. prés. par div. sav. à l'acad. des sc. Tom. XIV. Paris 1856, p. 664). — **261**) Diese Abhandlung steht wahrscheinlich im Zusammenhang mit derjenigen Ṯâbits über die Verzögerung und Beschleunigung der Bewegung im Thierkreis, also handelt es sich hier um die bekannte Theorie der Trepidation der Fixsterne. — **262**) Vergl. Woepke, L'algèbre d'Alkhayyâmî p. 55. — **263**) Vergl. Woepke (Ibid. p. 55 u. 103 ff.). — **264**) Im Text des Fihrist fehlen die zwei Abhandlungen, die Woepke (l. c.) als 8) und 9) anführt: Traité de la construction des deux lignes en proportion, und Traité des cercles qui se touchent suivant la méthode de l'analyse; dagegen finden sie sich in den Lesarten, p. 26; warum sie Flügel nicht in den Text aufgenommen hat, wissen wir nicht, zumal die Existenz der zweiten neben der hier angeführten Abhandlung „über die Mittelpunkte der Kreise auf gegebenen Linien" nachgewiesen ist (vergl. Woepke, l. c. p. 55). — H. Ch. III. 449 hat von al-Kûhî die Abhandlung: de ratione eius, quod de linea una inter tres lineas cadit; ist wahrscheinlich die oben genannte Schrift des Ms. 952. 2. — Steinschneider (Die mittleren Bücher der Araber, Z. f. M. Ph. Jahrg. 10. p. 480) führt von al-Kûhî einen Commentar zu den Lemmata des Archimedes an.

Ġulâm Zuḥal.

265) d. h. der Knabe (Diener) Saturns. Er lebte nach Casiri (I. 404) und Abulphar. (p. 327. Uebers. 315) in Bagdad als Astrolog unter den Buiden, und starb im Jahre 376 (986—987). — **266**) Vergl. Anmerkg. 148. — **267**) Vergl. Anmerkg. 14 und 16. — **268**) مجرّدة kann auch heissen „der ausgezogenen" (d. h. aus grösseren Büchern).

Aṣ-Ṣûfî.

269) Einer der Herrscher aus dem Geschlecht der Buiden. — **270**) Nach Casiri (I. 361) im Jahre 376 (986—987). Dieser führt von ihm ausser dem im Fihrist genannten Werke noch an: Ueber die Projection der Strahlen. H. Ch. (III. 366) schreibt ihm einen „Tractatus de astrolabio eiusque usu" zu.

Al-Anṭâkî.

271) Nach Ibn al-K. war sein Name: ʿAlî ben Aḥmed Abû'l-Ḳâsim (vergl. Woepke, Propag. des chiffres ind. in Journ. asiat. Six. Sér. Tom. I. 1863. p. 493). — **272)** Genauer am 15. April 987 in Bagdad (s. Woepke, l. c.). — **273)** Siehe Anmerkg. 233. — **274)** Woepke (l. c.) fügt in Klammern hinzu: probablement celle de Nicomaque. — **275)** Woepke (l. c.) übersetzt: de la manière de choisir parmi les traducteurs; تراجم kann übrigens auch heissen „Uebersetzungen". — **276)** Diese Abhandlung fehlt bei Woepke (l. c.), dafür stehen die zwei im Fihrist fehlenden: Le traité des preuves numériques (telles que la preuve par neuf etc.), und le traité du calcul manuel (باليد) sans table. Es ist dies meines Wissens die einzige Abhandlung mit diesem Titel, die in arabischen bibliographischen Werken vorkommt, und daher könnte es leicht möglich sein, dass der Titel verdorben wäre. (Vergl. Anmerkg. 233.)

Al-Kalwaḏânî.

277) Woepke (l. c. p. 494) sagt: Kalwaḏâ, son lieu de naissance, est un village près de Bagdad. — **278)** Woepke (l. c.) fügt nach Ibn al-K. bei, dass al-Kalwaḏânî unter der Regierung ʿAḍudaddaulas und noch einige Zeit nachher gelebt habe.

Al-Ḳaṣrânî.

279) Casiri (I. 419) gibt auch keinen andern Namen an, bemerkt aber im Weitern, dass er aus Ḳaṣrân, einem Städtchen im Gebiet von Raj in Chorasan gebürtig und ein berühmter Astrolog gewesen sei; er führt von ihm ein Buch über die Fragen (astrolog.) an.

Die Namen der Künstler.

280) Vergl. den Art. al-Fazârî. — **281)** H. Ch. (III. 366) gibt ihm den Zunamen al-Asṭurlâbî, d. h. der Verfertiger von Astrolabien. — **282)** Eine nicht festzustellende Persönlichkeit, die nach Flügels Vermuthung mit dem folgenden Batûlus zu identificieren ist. — **283)** Vergl. die vorige Anmerkg. Flügel, A. 135 bemerkt, dass der Name *Βαθύλος* nicht unbekannt sei. — **284)** Kann nach Flügels Vermuthung der Vater al-Battânîs sein; vergl. diesen Art. — **285)** Waren nach Flügel, A. 135 Oberhäupter der Ṣabier. — **286)** Vergl. Chwolsohn I. p. 620. Dieses Werk war mir nicht zugänglich.

Die Titel der Bücher, die über die Mechanik geschrieben worden sind.

287) Vergl. den Art. Archimedes. — **288)** Vergl. den Art. Herkal (Herakles?). — **289)** Sind jedenfalls die durch Luft bewegten Maschinen Herons; vergl. diesen Art. — **290)** Dieses Werk findet sich unter Artikel Muritos nicht, dagegen die beiden vorhergehenden. — **291)** Vergl. den Art. Die Söhne Mûsâs.

Galenos.

292) Galenos erwähnt selbst diese seine Abhandlung im Verzeichniss seiner Schriften cap. 15, unter dem Titel: *εἰς τὸ πρῶτον κινοῦν ἀκίνητον*; sie ist verloren gegangen (vergl. Wenrich, p. 258).

Ḥunain.

293) Dies ist der bekannte Uebersetzer griechischer Werke (vergl. Art. Ptolemaios) ins Arabische. Er war aus dem christlichen Stamme ʿIbâd, aus Ḥîra gebürtig, lebte die grösste Zeit seines Lebens in Bagdad und starb im Jahre 260 (873—74). Vergl. Casiri I. 286. — **294**) H. Ch. V. 166 erwähnt Aristotelis librum de stellis cadentibus, quem Ḥunain ben Isḥâḳ commentario instruxit et emendavit.

Ḳusṭâ.

295) Ebenfalls bekannter Uebersetzer (vergl. Art. Aristoteles), so unter Anderem der Schriften des Theodosios, Aristarchos, Hypsikles und Autolykos (vergl. Wüstenfeld, p. 50). — **296**) Wüstenfeld (l. c.) gibt seine Lebenszeit zwischen 864 und 923 an. — **297**) H. Ch. (III. 399) hat eine Abhandlung über das Sternbild Cassiopeia, diese ist aber wahrscheinlich mit der unsrigen über den Himmelsglobus identisch, denn ذات الكرسي bedeutet sowohl den Himmelsglobus als die Cassiopeia, letzteres aber gewöhnlich nur mit vorgesetztem صورة (Sternbild). Vergl. Dorn, p. 31 u. 46.

Ar-Râzî.

298) Als Todesjahr dieses berühmten Arztes hat Casiri (I. 262) 320 (932) nach Ibn al-K., Wüstenfeld (p. 41) 311 oder 320, hält aber das letztere für das richtige. — **299**) Nach Casiri (l. c.) wegen des zu häufigen Genusses aegyptischer Bohnen, nach Wüstenfeld (l. c.) in Folge eines Peitschenschlages, den er von dem Emir al-Manṣûr (dem Fatimiden?) erhalten hatte. — **300**) Wüstenfeld (p. 47) übersetzt ذي نهاية الاستدارة mit „in summa rotatione".

Nachträge zu den Anmerkungen.

Zu Aristoteles: a) d. h. die vier ersten Bücher gehören zu den *λόγοι διδασκαλικοί* oder *ἀκροαματικοί*, daher *φυσικὴ ἀκρόασις*, die vier letzteren wahrscheinlich zu den *πραγματικοί*. Vergl. Ueberweg, Grundriss der Gesch. d. Philosophie. 7. Aufl. 1886. Bd. 1. p. 192. Casiri (I. 244) übersetzt تعاليم mit „in modum dialogi", mir scheint „in unterrichtender Form (Vorlesungsform)" darunter verstanden zu sein.

Zu Valens: b) Flügel, A. p. 149 verweist in Betreff des Namens Buzurdschmihr auf Ibn Badrûn p. 44 u. ff., der mir nicht zugänglich war. Es ist dies jedenfalls kein Anderer, als der Wezîr Nûschirwâns des Gerechten, von dem Salemann und Schukowski in ihrer persischen Grammatik (Chrestomathie) eine Erzählung veröffentlichen, die einem Petersburger Codex des Buches „Târîch i Guzîda" oder „Pendnâme i Buzurdschmihr" von Ḥamdullâh i Ḳazwînî entnommen ist. Dieser Buzurdschmihr, der den Beinamen „Ḥakîm", d. h. der Gelehrte, Weise, hatte, wird vom Verfasser des Fihrist neben

Andern auch als der Autor des Buches „Kalîla wa Dimna“ genannt (Fihrist, 8. Buch. p. 305).

Zu Tâbit ben Kurra: c) Der Text des Fihrist hat ابطال und das heisst „Aufhebung, Abschaffung“; das schon mehrmals genannte MS. 952. 2 (Suppl. arabe), das diese Abhandlung Tâbits (No. 13, fol. 56—59) enthält, hat ابطاء = Verzögerung und unmittelbar nachher als Gegensatz dazu سرعة = Beschleunigung; man sieht hieraus sofort, dass es sich um die bekannte Tâbitsche (resp. Theonsche) Theorie von der Trepidation der Fixsterne handelt, der Titel dieser Abhandlung im Fihrist ist also verdorben und unvollständig, im genannten MS. lautet er nach der Uebersetzung Woepkes: Sur la retardation du mouvement dans la sphère des signes et sur son accélération suivant les points de l'excentrique où se trouve le (corps en) mouvement. (Woepke, Essai d'une restitution etc. in Mém. prés. par div. Sav. à l'acad. Tom. XIV. 1856. p. 665.)

Zu Al-Hasan ben Sahl ben Nûbacht: d) Weder Wüstenfeld (Die Uebersetzungen arabischer Werke in das Lateinische seit dem XI. Jahrh. 1877. p. 76) noch Libri (Hist. des Sc. math. en Italie, Tome I. Deux. Édit. p. 454) kennen die richtige Bedeutung von نوء pl. انواء = helischer Untergang der Mondstationen (in den lateinischen Uebersetzungen aus Unkenntniss der Bedeutung einfach in anoe oder anohe transscribiert). Der Letztere schreibt (l. c. wo er einige Bemerkungen zu seiner Veröffentlichung des Liber anoe, eines arabischen Kalenders, hinzufügt): Liber anoe signifie „Livre du temps et de ses divisions“. Telle est, comme on le sait, la signification du mot arabe anu s. anoe. Und doch hätte er nur p. 391 seiner Veröffentlichung dieses „liber anoe“ aufmerksam lesen dürfen, so hätte er die richtige Bedeutung dieses Wortes gefunden! (Man lese l. c. Zeile 10—12 v. o. und Zeile 1—2 v. u.) — Auch Steinschneider kommt in seiner Abhandlung „Ueber die Mondstationen (Naxatra) und das Buch Arcandam“ (Z. D. M. G. Bd. 18. p. 118 u. ff.) und in einer späteren „Zur Geschichte der Uebersetzungen aus dem Indischen ins Arabische“ (Z. D. M. G. Bd. 24. p. 387) nicht auf die richtige Bedeutung und doch ist er in der erstgenannten Abhandlung, wo er auch Libris Veröffentlichung des „Liber anoe“ citiert, derselben so nahe gewesen! In der zweiten Abhandlung gibt er (l. c.) zuerst انواء durch „Meteore“ und drei Zeilen nachher durch „Witterung“ wieder. Allerdings setzten die Araber die Witterung zu den verschiedenen Zeiten des Jahres in enge Verbindung mit den helischen Untergängen der Mondstationen — man lese nur auch einmal etwas genauer den von Libri veröffentlichten Kalender, genannt „Liber anoe“! — (Im 25. Bd. der Z. D. M. G. p. 382 citiert dann Steinschneider eine Stelle aus der Uebersetzung eines arabischen Werkes durch Schemtob ben Isak aus Tortosa, in welcher die richtige Bedeutung von „anoe“ ziemlich klar ausgesprochen ist.)

Zu Abû Kâmil: e) Falâh habe ich wie Flügel in H. Ch. (IV. 461) wörtlich mit „Glück“ übersetzt; ob es mit ʿilm al-falâha (Ackerbaukunde, s. H. Ch. l c.) zusammenhänge, oder ein astrologisches Werk sei (vielleicht über die Auswahl der Zeit zur Vornahme der Arbeiten des Landbaus), ist natürlich aus dem Titel allein nicht zu entscheiden.

Zu Anmerkung 136: f) Eine nachträgliche Einsicht in den Theil des Almagestes, der über die Darstellung der Bewegung der obern Planeten handelt, brachte mich auf den Gedanken, es könnte das Wort tasâhul (sahula = eben, gleichmässig, leicht sein), das ich nicht anders als durch „ebene (geometrische?) Darstellung" zu übersetzen wusste, den sogenannten Aequanten bedeuten, d. h. den excentrischen Kreis, von dessen Mittelpunkt aus die Bewegung des Planeten gleichförmig erscheinen soll (vergl. auch Wolf, Gesch. d. Astronomie, p. 57—58). Es wäre interessant gewesen, zu vernehmen, was für eine Methode Ibrâhîm an Stelle der Ptolemäischen zu setzen versucht hat, das Citat aus Ibn al-K. sagt uns nur verneinend, er habe nicht den Weg al-ḳijâs (das kann heissen: Messung, Vergleichung, Analogie, log. Schluss, Hypothese, vielleicht auch Rechnung, im Gegensatz zur geometrischen Darstellung) eingeschlagen.

Zu Anmerkung 233: g) Weiteres Nachdenken über diese Sache und auch die Anmerkg. 2 auf p. 411 von Steinschneiders Arbeit: Zur Gesch. der Uebers. aus d. Ind. ins Arab. (Z. D. M. G. Bd. 25) haben die von mir ausgesprochene Vermuthung etwas zweifelhaft erscheinen lassen; immerhin ziehe ich dieselbe nicht ganz zurück, es bleiben immer noch zwei Punkte übrig, die für sie sprechen könnten: Erstens ist (wie ich schon in Anmerkung 276 angedeutet habe) die Richtigkeit des Titels der von Ibn al-K. angeführten Abhandlung al-Anṭâkîs „über die Rechnungsweise mit der Hand (den Fingern) ohne Tafel" nicht ganz zweifellos, da der Verfasser des Fihrist (ein Zeitgenosse al-Anṭâkîs) dieses Buch nicht kennt und auch sonst meines Wissens in der arab. Literatur keine zweite Schrift über Fingerrechnung vorkommt; zweitens ist überall in denjenigen Stellen arab. Ms., die über die indischen Ziffern handeln und die Woepke veröffentlicht hat (Journ. asiat. 6. Série, Tom. I. p. 58—69), die mit Sand bestreute Tafel, auf der die Inder gerechnet hätten, durch لوح und nie durch تخت wiedergegeben.

Zu Anmerkung 258: h) Ich gebe zu, dass die Uebersetzung Steinschneiders die dem arab. Text entsprechendere ist, und acceptiere sie daher für den Artikel „al-Kûhî", also demgemäss auch für den Artikel „Abû Maʿschar" (an Stelle der Worte: aus welchem vielfach Auszüge gemacht wurden. Z. 14 v. o.), wo sie aber leider nach einigen im Mittelalter sehr bekannten Werken dieses Autors, wie seiner grossen und kleinen Einleitung (in d. Astrol.), steht, die also gerade zu den nicht veröffentlichten gehören sollten! Wie ist dies zu erklären?

Register.

(Der Artikel al und die Wörter ibn, ben = Sohn und abû (Genitiv abî) = Vater wurden bei der alphabetischen Anordnung unberücksichtigt gelassen, und desshalb und der bessern Uebersicht wegen mit kleinen Anfangsbuchstaben gedruckt. Die fett gedruckten Zahlen bezeichnen die Seite, auf welcher dem betreffenden Autor ein eigener Artikel gewidmet ist.)

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

T.

HISTORISCH-ASTRONOMISCHE FRAGMENTE

AUS DER

ORIENTALISCHEN LITERATUR.

VON

ARMIN WITTSTEIN.

آلچق يرده ديه‌جك كندوسن طاغ صانور *
گلی استين ديكنلری دخی استملی گرك *

(Türkische Sprüchwörter.)

Wer fast zwei Jahrzehnte hindurch einer wissenschaftlichen Materie nicht blos ein oberflächliches Interesse bewahrt hat, sondern während eines solchen Zeitraumes bemüht gewesen ist, ihren Entwickelungsphasen im Einzelnen mit Aufmerksamkeit und, soweit es seine sonstige Beschäftigung erlaubte, auch in voller Hingebung zu folgen, dem kann es gar zu leicht begegnen, dass er sich dazu verleiten lässt, die Rolle des Beschauers, vor dessen Augen sich das Werdende allmälig vollzieht, mit der des fördernd in die Gestaltung Eingreifenden vertauschen oder, nach einem alten schönen Gleichnisse, selbst Steine zum Baue herbeitragen zu wollen, die dann, so hofft er zuversichtlich, die Bauleute nicht verwerfen werden. Es ist ein, über wirklich inniges Vertrautsein mit Gegenständen langjährigen Studiums oft täuschendes Gefühl, unter dessen beherrschendem Einflusse der gewagte Schritt geschieht.

Kaum darf ich es erst aussprechen, dass auch ich einige Male der Macht dieses Impulses aus Schwäche nicht widerstehen konnte. Kleine, und wohl auch unbedeutende Arbeiten sind es gewesen, die ich seither auf dem Gebiete historisch-astronomischer Forschung veröffentlicht habe. Wie das gelehrte Publicum darüber geurtheilt hat, muss ich dahingestellt sein lassen; denn aus referirenden, des kritischen Colorits (vielleicht aus Nachsicht?) ermangelnden Anzeigen hält es schwer, Antwort hierauf zu geben.

Was ich zu meiner Entschuldigung sagen kann, dass ich auf's Neue (aber wohl zum letzten Male!) der Stimme des Versuchers nicht mein Ohr verschlossen, das wollte ich durch die erste — „In flacher Gegend dünkt sich schon ein kleiner Hügel als Berg" — der beiden osmanischen Sentenzen an der Spitze der einleitenden Worte zu diesen Mittheilungen ausdrücken; die zweite — „Wer die Rose will, muss auch die Dornen wollen" — wird für alle Diejenigen keines Commentars zu ihrer Anführung bedürfen, die jemals in der Lage waren, über erfreuliche und besonders aufmunternde

Erfolge ihrerseits zu berichten, und zugleich wünschten, sich dieser angenehmen Aufgabe in knappster, jedoch nicht misszuverstehender Form zu entledigen.

Dass ich durch die etwas ungebräuchliche Art der sprachlichen Einkleidung von Rechtfertigungs-Versuch und Resignation zu sehr aus der Gewohnheit trockenem Geleise heraus- und in's Exotische hineingerathen bin, werden wahrscheinlich Manche tadeln. Mögen sie es immerhin thun! — Freilich, Entgegnung auf eine Kritik in diesem Punkte würde man von mir schwerlich erwarten dürfen.

I.

„Der älteste uns bekannte Erdglobus scheint der zu seyn, den Roger II., König von Sicilien, im 12. Jahrhundert verfertigen liess, und der sich vorzüglich durch den Werth des dazu verwandten Metalls auszeichnete, indem er 400 Pfund Silber gewogen haben soll. Das Andenken an diesen Globus würde schwerlich bis auf unsere Zeiten gekommen seyn, hätte nicht Edrisi, der berühmteste Geograph der damahligen Zeit, eine besondere Erklärung desselben unter dem Titel: Nosthatol mostac (Vergnügen des Gemüths) geschrieben."[1]) —

1) Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, herausgegeben vom Freyherrn F. von Zach. Dreyzehnter Band. Gotha, 1806; 8°. S. 157 bis 158. — Aus demselben Bande lasse ich hier noch die Anmerkung auf S. 294, die ich, des dort angeführten Buches wegen, nicht gern unterdrücken möchte, folgen: „Curiositez inouyes sur la sculpture talismanique des Persans. Horoscope des patriarches, et lecture des éstoilles, par J. Gaffard. Rouen, 1631 in 12°. Es sind am Ende zwey chaldäische Planisphäria nach dem Rabiner Chomer angehängt, in welchen die Sternbilder durch Buchstaben, welche er das himmlische hebräische Alphabet nennt, vorgestellt sind. Diese Charaktere sind von jenen etwas verschieden, welche der Schotte Bonaventura Hepburnus in Kupfer stechen liess, und die Duret in seiner Histoire des langues aufgenommen hat. Der Oberst Valancey (erzählt La Lande in seiner Bibliographie) versichert, dass die Irischen Namen der Sternbilder die orientalischen oder hebräischen wären, so behauptet er, dass das hebräische Wort Kesil den nördlichen Drachen bedeute, asch (vielleicht nach Beigel nasch) den kleinen Bär, kimah den Orion u. s. w." — Dagegen wäre zu erinnern, dass unter עש ʿaś wohl die البنات النعش benât an-nʿaś (Töchter der Bahre, oder die zur Bahre Gehörigen, nach Analogie von بنات الارض Töchter der Erde, für Quellen; امّ النجوم Mutter der Gestirne, für Milchstrasse etc.) der Araber zu verstehen sein werden, womit diese schliesslich die gesammten sieben Hauptsterne im grossen und kleinen Bären be-

Auf Grund übereinstimmender Nachrichten, alten wie neuesten[2]) Datums, die ich bona fide hinnahm, stand früher für mich fest, der älteste Verfertiger eines Erdglobus sei der im 3. Jahrhundert vor Christus lebende Mallote Krates (*Κράτης ὁ Μαλλώτης*) gewesen; stets aber, d. h. so lange, bis leise Zweifel an deren Unanfechtbarkeit in mir rege wurden, hatte ich versäumt, selbst die Quelle, aus der jene Nachrichten alle geschöpft sind, die „Geographie“ des ehrwürdigen Strabo (aus Amasea, wahrscheinlich 66 v. Chr. geb. und 24 n. Chr. gest.), darum zu befragen. Als die einmal erwachte Skepsis jedoch immer dringlicher dazu aufforderte, zog ich die Kramer'sche Ausgabe des Strabo[3]) zu Rath und fand dort endlich, nach langem Suchen, die Stelle, die in der That alles Misstrauen beseitigen muss, da sie u. A. auf's Unzweideutigste besagt, dass man sich nach der, die Erde darstellenden Kugel des Krates richten müsse, wenn man die bewohnte Welt getreu nachbilden wolle. Hier ist sie:

> *Νυνὶ μὲν οὖν ἐπιγεγράφαμεν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ χωρίον, ἐν ᾧ φαμεν ἱδρῦσθαι τὴν οἰκουμένην· καὶ δεῖ τὸν ἐγγυτάτω διὰ τῶν χειροκμήτων οἰκημάτων μιμούμενον τὴν ἀλήθειαν ποιήσαντα σφαῖραν τὴν γῆν, καθάπερ τὴν Κρατήτειον, ἐπὶ ταύτης ἀπολαβόντα τὸ τετράπλευρον ἐντὸς τούτου τιθέναι τὸν πίνακα τῆς γεωγραφίας. ἀλλ' ἐπειδὴ μεγάλης δεῖ σφαίρας*, etc. (I. Band, S. 174.)

Ganz leicht ist mir ihre Entdeckung nicht geworden; denn das Inhaltsverzeichniss enthält keinen Hinweis darauf, und ohne einen solchen ist es, bei Gott!, manchmal kein Spass, sich im Urtext durch „der Väter Weise“ hindurchzuwinden.

---

zeichneten. כסיל kesîl aber ist Canopus (α Argus). Von כימה kîmah vermuthet man, dass damit das Siebengestirn (die Plejaden) gemeint sei.

Vielleicht ist auch eine Mittheilung im 14. Bande der angezogenen Zeitschrift für die Geschichte der morgenländischen Astronomie nicht ganz werthlos. Es heisst dort, dass Seetzen u. A. in Damask für das orientalische Museum zu Gotha ein (handschriftliches) astronomisches Werk in persischer Sprache (198 Seiten in kl. Folio) von محمد بن ابراهيم مثنوى angekauft habe; und dann wörtlich: „Dieses prächtige und ungemein schön auf Seidenpapier geschriebene Exemplar eines seltenen Werkes enthält, ausser 87 Miniaturgemählden, eine Menge auffallender sphärischer Zeichnungen, fremder Charactere und niedlicher Verzierungen von Golde und Lasur. Der Einband besteht aus rothem Korduan.“ — Eine Durchsicht dieses Manuscriptes könnte sich am Ende als lohnend erweisen.

2) Vergl. z. B. Richard Friedrich, Materialien zur Begriffsbestimmung des orbis terrarum. (Abhandlung zu dem Programm des Königl. Gymnasiums zu Leipzig auf das Schuljahr Ostern 1886 bis Ostern 1887. Leipzig, 1887; 4°.)

3) Strabonis Geographica recensuit, commentario critico instruxit Gustavus Kramer. Berolini, MDCCCXLIV—LII. 3 Bände in 8°.

Wer sich näher über des Krates Erdkugel unterrichten will, so namentlich über das darauf zur Anschauung gebrachte, im Alterthum sich häufig wiederholende Bestreben, die Erscheinungen der Ebbe und Fluth durch entgegengesetzte Strömungen (meridionale und äquatoriale) zu erklären, dem möchte ich die vor einigen Jahren erschienene Schrift von R. Friedrich über den „orbis terrarum" (siehe Anm. 2) dazu empfehlen. Der Herr Verfasser bezieht sich darin mehrfach, als Gewährsmann, auf den im 5. Jahrhundert n. Chr. lebenden und als Commentator des Somnium Scipionis von Cicero bekannten Macrobius.

Zuweilen soll an die Stelle des Wortes *οἰκουμένη*, dem wir vorhin bei Strabo begegneten, *κόσμος*, also ganz unserem Sprachgebrauch entsprechend, getreten sein. Mit dieser gelegentlichen Notiz glaube ich eine Bemerkung des Herausgebers der Werke des Plato verbinden zu dürfen, die folgendermaassen lautet: Vides autem mundum vel rerum universitatem promiscue variis appellari nominibus. Vocatur enim *τὸ πᾶν*. Porro dicitur *ὁ οὐρανός*. Denique frequentissimum est nomen *τοῦ κόσμου*, quod Platoni prorsus idem esse evincit locus etc. Quamquam proprie illis temporibus *κόσμος* appellatum est coelum cum sideribus, cuius appellationis auctor fertur Pythagoras fuisse.[4])

Noch eine kleine Abschweifung vom Hauptthema sei mir gestattet! Haben beglaubigte Ueberlieferungen uns gelehrt, dass der Erste, der es unternahm, die bewohnte Erde auf einer Kugel zu entwerfen, im Zeitalter des Aristarch lebte, so besitzen wir in dem Tagebuch Nearch's, des Admirals Alexanders des Grossen (324 v. Chr. gest.), eine ebenso zuverlässige Urkunde, dass das erste Pilotenbuch oder Schiffsjournal schon im 4. Jahrhundert v. Chr. von einem griechischen Seemanne verfasst worden ist. Eine lichtvoll und fesselnd geschriebene Derstellung dieser Fahrt verdanken wir in neuester Zeit einer gelehrten Abhandlung des Herrn Tomaschek[5]), der darin, an der Hand der britischen Admiralitätskarten und, wo nöthig, mit Bezug auf Marco Polo, Ptolemaeus und die arabischen Reisenden und Geographen[6]), tiefe Untersuchungen hierüber, insbesondere über die berüchtigte Ichthyophagenküste, anstellt.

---

4) Platonis Opera Omnia recensuit et commentariis instruxit Godofredus Stallbaum. Vol. VII., continens Timaeum et Critiam. Gothae et Erfordiae, MDCCCXXXVIII; 8°. Seite 107.

5) Wilhelm Tomaschek, Topographische Erläuterung der Küstenfahrt Nearch's vom Indus bis zum Euphrat. (Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Philosophisch-historische Classe. Band CXXI.) Wien, 1890. Gr. 8°.

6) Vergl. Reinaud, Relation des voyages faits par les Arabes et les Persans

Ich nehme nun den entfallenen Faden wieder auf und glaube zunächst getrost behaupten zu können, dass, soweit mein Wissen reicht, von einem arabischen oder anderen Erd- resp. Himmelsglobus sichere Kunde erst wieder aus dem 13. Jahrhundert auf uns gekommen ist. Wie es um eine derartige Kunstfertigkeit über 1400 Jahre lang (nämlich seit Krates) bestellt gewesen sein mag, ist uns nicht bekannt; das Capitel von den Globen anlangend, fliessen eben die Quellen sehr spärlich. Abgesehen von dem attributiven Adjectiv „älteste“, das uns jetzt nicht mehr beschäftigt, ist die vom Herausgeber der „Monatl. Corresp.“ geäusserte, noch heute, nach 86 Jahren, oft genug anzutreffende Meinung — nur dass sich jetzt Einige vorsichtiger ausdrücken und schlechthin von einem „silbernen Globus“ sprechen — auf ein Missverständniss, im doppelten Sinne, zurückzuführen. Nach Aṣ-Ṣafadî[7]), dem hier in Frage kommenden Berichterstatter, handelt es sich nämlich einmal nicht um eine Erd-, sondern um eine Himmelskugel und eine, gleichfalls silberne Darstellung der damals bekannten Erde in Scheibenform, die Edrîsî verfertigt haben soll; die ganze Nachricht, die sich fast nur um das verbrauchte Silber dreht, ist ziemlich werthlos, aber doch so deutlich, dass schliesslich nur eine Armillarsphäre übrig bleibt, von der, meines Erachtens, allein die Rede sein kann. Sodann geschieht einer solchen Erd- oder Himmelskugel in der, Mitte Januar 1154 vollendeten „Geographie“ des Edrîsî[8]), dem Kitâb nuzhat al-muśtâḳ fî iẖtirâḳ al-afâḳ (Belustigung, durch die man sich in dem in der Weltherumreisen ergötzt), die der Herausgeber der „M. C.“ ohne Zweifel im Auge hatte, mit keiner Sylbe Erwähnung. Endlich passt der Titel „Vergnügen des Gemüths“ mehr für ein zweites Werk des Edrîsî, das dieser für Wilhelm I., Nachfolger und Sohn des Roger II., verfasste, nämlich für das روض الانس ونزهة النفس Rawḍ al-uns wa nuzhat an-nafs (Garten des vertraulichen Umganges und Ergötzung der Seele), von dem es nur heisst, dass es ähnlichen Inhaltes, wie das vorherige, sein soll.

---

dans l'Inde et à la Chine dans le IXe siècle de l'ère chrétienne. Paris, 1845. 2 Bände in 12^{0}.

7) Biblioteca arabo-sicula, raccolta da Michele Amari. Versione italiana. Torino e Roma, 1881. Gr. 8^{0}. Volume secondo.

8) Description de l'Afrique et de l'Espagne par Edrîsî. Texte arabe publié pour la première fois d'après les man. de Paris et d'Oxford avec une traduction, des notes et un glossaire par R. Dozy et de Goeje. Leyde, 1866. Gr. 8^{0}. (صفة المغرب وارض السودان ومصر والاندلس ماخوذة من كتاب نزهة المشتاق فى اختراق الافاق تاليف الشريف الادريسي. طبع فى مدينة ليدن المحروسة بمطبع بريل سنة ١٨٦٤ المسيحية.)

Wie ich schon sagte, gehören die ersten arabischen Himmelskugeln, von denen wir genaue Kenntniss besitzen, dem 13. Jahrhundert an. Es sind deren zwei, durchweg mit kufischen Schriftzeichen. Der älteste wurde im Jahre 1225 in Aegypten von Kaiṣar für den Sultan Malek Adel (الملك العادل Al-Malik al-ʿAdil), der andere, entweder 1279 oder 1289, zu Merâgah (مراغة in اذربيجان Aderbeigân, dem Lande der Iranischen Türken) von Muhammed, dem Sohne des Muwajid ad-dîn al-ʿOrdî (مويد الدين العرضي) verfertigt. Beide Globen sind, ebenso wie die, durch die darin erklärten Sternbilder mit ihnen im nahen Zusammenhange stehenden عجايب المخلوقات ʿagaibo'-l mahlûkât (Mirabilia Creaturarum) des Kazwînî (زكريّا بن محمود القزويني), in der Neuzeit von einigen Schriftstellern ausführlich behandelt worden. Der Verfasser der „Wunder der Schöpfung", ein arabisch schreibender Perser, starb 1283.

Mit zwei kurzen Auszügen aus der „Beschreibung" des Edrîsî, die wohl schicklich hier eingereiht werden können, gedenke ich den ersten Abschnitt meiner „Fragmente" zu beschliessen. Dieselben sollen einestheils zu einer Stelle im E. erläuternde Angaben aus der „Geographie" des Ptolemaeus liefern, anderen Theils von einem arabischen Nilpegel im Mittelalter das Nöthige beibringen.

Im Anfange des ersten Clima (الاقليم iklîm, τὸ κλίμα) ist nämlich zu lesen: es gäbe im mare tenebrosum

جزيرتان تسمّيان بالخالدات ومن هذه الجزائر[9] بدا بطلميوس ياخذ الطول والعرض.

zwei Inseln, genannt die glückseligen [die Kanarischen Inseln], und von diesen Inseln habe Ptolemaeus angefangen, die Länge und die Breite zu zählen.

Abgesehen davon, dass Ptolemaeus das Letztere gewiss nicht gethan hat, drückt sich unser arabischer Auctor sehr scharf aus: die Länge und Breite zu erfassen, wie die wörtliche Uebersetzung lauten würde — etwa dem entsprechend, was wir unter Einsetzen einer Zirkelspitze im Nullpunkt verstehen. Den Mittelpunkt der Erdkarte des Ptolemaeus bildete bekanntlich die Insel Tylos (Τύλος, das heutige Bahrein im persischen Meerbusen); in ihm kreuzten sich der mittlere Parallelkreis, nämlich der Wendekreis des Krebses, und der mittlere Meridian, der vom Ersten 90^0 entfernt

9) Wieder die Eigenthümlichkeit der arabischen Sprache, den plur. fr. als Singular generis feminini zu betrachten, die bei astronomischen Bezeichnungen schon Irrthümer veranlasst hat.

ist. Welche Ausdehnung er seiner Karte nach Osten und Westen hin gab, mögen im Folgenden seine eigenen Worte erklären:[10])

Πάλιν δὲ καὶ τὸ μὲν ἀνατολικὸν πέρας τῆς ἐγνωσμένης γῆς ὁρίζει μεσημβρινὸς ὁ γραφόμενος διὰ τὴν τῶν Σινῶν μητροπόλεως, ἀπέχων τοῦ διὰ Ἀλεξανδρείας γραφομένου πρὸς ἀνατολὰς ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ μοίρας ριθϛʹʹ, ὀκτὼ δὲ ὥρας ἔγγιστα ἰσημερινάς.

Τὸ δὲ δυτικὸν πέρας ὁ γραφόμενος διὰ τῶν μακάρων νήσων, ἀπέχων καὶ οὗτος τοῦ μὲν διὰ Ἀλεξανδρείας, μοίρας ξϛʹʹ, τέσσαρας δὲ ὥρας ἰσημερινάς.

„Dahingegen bestimmt die östliche Grenze der bekannten Erde der durch die Hauptstadt der Sinen gelegte Meridian, welcher, auf dem Aequator gezählt, von dem Alexandriner Meridian nach Osten hin $119\frac{1}{2}$ Grade, oder sehr nahe 8 Aequinoctialstunden, entfernt ist.“

„Die Westgrenze bildet der Meridian durch die glückseligen Inseln; sein Abstand von dem durch Alexandria beträgt $60\frac{1}{2}$ Grade oder 4 Aequinoctialstunden.“

In dem Thinae (*Θεῖναι*) der Sinen (*Σίναι*), oder der Hauptstadt des südlichen China (arabisch جين ǵîn, صين ṣîn, persisch چين ćîn oder ماچين mâćîn), glaubt Ideler[11]) das heutige Canton zu erkennen. Nach Cosmas,[12]) dem in der Mitte des 6. Jahrhunderts zu Alexandria als Mönch verstorbenen

10) ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΗΣ ΥΦΗΓΗΣΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΒΔΟΜΟΥ ΕΣΧΑΤΑ.

Traité de Géographie de Claude Ptolemée, d'Alexandrie, traduit pour la première fois, du grec en français, sur les manuscrits de la Bibliothèque du roi. Par l'abbé Halma. Paris, 1828. Gr. 4°.

11) Ludwig Ideler, Ueber die Zeitrechnung der Chinesen. Eine in der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften am 16. Februar 1837 gelesene und nachmals weiter ausgeführte Abhandlung. Berlin, 1839. Gr. 4°.

12) Zu einer, uns durch ihn überlieferten Inschrift vergl.: Paul de Lagarde, Die Inschrift von Aduli. (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. 19. November. No. 13. 1890. Gr. 8°.) Hieraus:

„Südlich des jetzt viel genannten „Massaua“, an der Annesley-Bay — aber jetzt durch eine Stunde Sand von der See getrennt — lag und liegt Aduli, auf italienischem Gebiete. In diesem Aduli fand sich einst eine von Ptolemaeus Euergetes und eine andere von einem eingeborenen, aber griechisch redenden Könige gesetzte griechische Inschrift. Beide sind in der Urschrift verloren, aber der Anfang der ersten, das Ende der andern, ist in einem griechischen Werke des sechsten Jahrhunderts erhalten, durch einen Mann erhalten, der gar nicht merkte, dass er die Bruchstücke zweier durch viele Jahre von einander getrennten Titel vereinigte. Dieser Mann heisst *Κοσμᾶς ὁ Ἰνδικοπλεύστης*.“ Nach dem Herrn Verfasser müssten die Griechen *Ἄδουλις* gehört haben.

Man hat zuweilen Cosmas mit einer, im frühen Mittelalter geltenden, aber nichts weniger als erhabenen Weltanschauung in Verbindung gebracht, die u. A.,

„Indienfahrer“, müsste Thinae über 15⁰ nördlicher, etwa unter dem 38. Breitegrade, anzunehmen sein.

Das والعرض in der obigen Textstelle scheint mir entweder Zuthat eines, mit der Sache nicht vertrauten Abschreibers zu sein, oder an Stelle von الأَرْض zu stehen — allerdings gebe ich gerne zu, dass „Länge der Erde“ gerade kein sehr gebräuchlicher Ausdruck sein würde, sondern höchstens im Sinne einer rechteckigen Karte hingehen könnte. —

Indem ich mich jetzt dem bereits angekündigten Nilpegel zuwende, schicke ich vorauf, dass sich das „Haus des Nilmessers“ (دار المقياس dâro'l-meḳîâs) auf einer Insel, in unmittelbarer Nähe der Stadt Fosṭâṭ (مدينة الفسطاط), befand und von Edrîsî folgendermaassen geschildert wird:

„Es ist ein ansehnliches Gebäude, im Innern mit Bogengängen, die von Säulen getragen werden. In seiner Mitte befindet sich ein weites und tiefes Becken, in das man auf einer marmornen Wendeltreppe hinabsteigt und dort, mitten in demselben, eine Marmorsäule erblickt, welche eine Theilung in Vorderarmen [Ellen] und Fingern [Zollen] trägt. Oberhalb der Säule befindet sich ein fester Steinbau, bemalt mit verschiedenen dauerhaften Farben, darunter Gold und Lasurblau. [Mit den dort eingegrabenen Inschriften beschäftigt man sich zur Stunde.] In dieses Becken gelangt das Nilwasser durch einen breiten Kanal, jedoch dringt es nicht vor dem Steigen des Flusses, d. h. nicht vor August, in dasselbe ein. Die zur geeigneten Bewässerung der Ländereien des Sultans erforderliche Wasserhöhe beträgt 16 Ellen, zu je 24 Zollen [والذراع ٢٤ أصبعا]; steigt letztere auf 18 Ellen, so werden beide Flussufer völlig überschwemmt. Eine Wasserhöhe von 20 Ellen endlich wirkt schädlich auf das Land, dagegen reicht eine solche von 12 Ellen zur Noth hin; niedriger darf sie aber nicht sein,

als Erklärung der nächtlichen Dunkelheit, lehrte, die Sonne beschreibe des Nachts ihre Bahn hinter dem grossen Erdberge. Nunmehr finde ich dieses, so einfach gelöste astronomische Problem, und zwar fast im gleichen Wortlaute, in chinesischen Annalen wieder auf. Im ersten, 1590 erschienenen Hefte der ersten Ausgabe des Pèn-zaò-kāng-mŭ ist von dem fabelhaften Berge Yàn-dscheŭ-schān die Rede und von ihm gesagt, er liege im Westen der grossen Wüste und werde auch Berg der Mutter des westlichen Königes genannt. Dort solle sich die Sonne zur Ruhe begeben. (Verzeichniss der Chinesischen und Mandshuischen Bücher und Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Berlin, verfasst von Julius Klaproth. Herausgegeben auf Befehl Seiner Majestät des Königes von Preussen. Paris, 1822. Folio.)

Cosmas kann recht wohl auf seinen Reisen davon gehört und sich beeilt haben, der abendländischen Kosmographie damit ein werthvolles Geschenk zu machen.

sonst tritt Dürre und, als eine Folge davon, Unfruchtbarkeit ein. Steigt der Fluss über 18 Ellen, so richtet er Schaden an, indem er Bäume entwurzelt und Wohnungen zerstört." —

Da es am Ende nicht undenkbar wäre, dass man mir vorwerfen könnte, ich hätte im Voraufgehenden beim Entwurf des Gerippes der Karte des Ptolemaeus stillschweigend Canton, die Insel Bahrein (بحرين) und die Mitte der Kanarengruppe insgesammt auf den nördlichen Wendekreis verlegt und deren Längendifferenz zu je 90° angenommen — so ist es vielleicht besser, zu guter Letzt hier noch zu constatiren, dass, wenn man dabei einen bekannten Erdort als Mittelpunkt festhalten will,[13]) eine solche grobe Annäherung, über die ja jeder Handatlas Auskunft giebt, völlig genügt. Man darf nur nicht vergessen, welch' arge Fehler im Punkte der Längenbestimmungen, namentlich was das Bassin des Mittelmeeres betrifft, bei Ptolemaeus vorkommen!

II.

Im vorigen Jahre erschien ein Aufsatz von Delphin über „Astronomie in Marokko",[14]) der möglicherweise dem Sprachforscher recht willkommen sein mag, für die Geschichte jener Wissenschaft aber, wenn

13) Damit gerathe ich in Widerspruch mit Einigen, so mit dem jüngeren Sédillot: „. . . . . allein, was es auch mit der Etymologie der verschiedenen Namen [für die Anfangspunkte der Längenzählung] auf sich haben mag, und in welcher Beziehung sie zu den kosmographischen Systemen des Alterthumes und Mittelalters stehen mögen, keineswegs darf man glauben, dass darunter wirklich eine Gegend, eine Stadt in Indien, eine Insel, ein Fluss u. s. w., zu verstehen sei. Es sind rein systematische Bezeichnungen. . . . . Das geographische Längen-Verzeichniss des Abû'l Ḥasan ist es, welches zum ersten Mal den Meridian von Ḳobbet Arîn (قبّة أرين) als Ersten gewählt hat; derselbe fällt mit dem 90. Längegrade des Ptolemaeus zusammen. Wollte man nun versuchen, den Abstand dieses 90. Längegrades des Ptolemaeus vom Pariser Meridian dadurch zu eruiren, dass man aus einer Anzahl beliebig gewählter, offenbar durch Fehler sehr entstellter geographischer Längen das Mittel nimmt, so würde sich ein Resultat ergeben, das auf ein wirklich wissenschaftliches Interesse keinen Anspruch machen könnte." Siehe: L.-Am. Sédillot, Mémoire sur les systèmes géographiques des Grecs et des Arabes, et en particulier sur Khobbet Arine قبّة أرين (la coupole d'Arine) et Kankader كنكدر, servant chez les Orientaux à déterminer la position du premier méridien dans l'énonciation des longitudes. Paris, 1842. Gr. 4°.

14) Journal asiatique ou recueil de mémoires, d'extraits et de notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples

überhaupt, von sehr untergeordneter Bedeutung ist, nichtsdestoweniger mich jedoch veranlasst, einige Augenblicke bei ihm zu verweilen. Sollten meine Zeilen dem Herrn Verfasser in die Hand kommen, so möchte ich ihm zunächst rathen, in Zukunft sich nicht zu sehr mit der Erklärung von Sternbildern zu quälen, über die wir — um nur unseren Ideler zu nennen — seit mindestens 83 Jahren auf das Ausgezeichnetste unterrichtet sind; seine Nichtbeachtung der Literatur macht es weiter erklärlich, dass er mit الردف ar-ridf (α Cygni) nichts anzufangen wusste. Ausserdem befindet er sich im Irrthume, wenn er die Breite von Fez zu 33^0 annimmt, obgleich wohl Niemand ihre genaue Grösse anzugeben vermag, da eben keine moderne Bestimmung derselben, die bekannt geworden wäre, vorliegt. Soweit ich mich darüber informiren konnte, hat dieses Element, ebenso wie die geographische Länge, im Laufe der letzten 4 Jahrhunderte Werthe erhalten, wie sie von mir in der nachstehenden kleinen Tabelle vereinigt sind.

Fez (فاس Fâs).

№	Beobachter oder Berechner und Jahr.	Nördl. Breite.	Länge westl. v. Paris.	Länge östl. v. Ferro.	Länge aus
1	الغ بك Ulug Beg, 1437.	32^0	—	18^0	—
2	Méchain, 1804.	—	$0^h 29^m 17^s.0$	—	d. Sonnenfinsterniss vom 10. Febr. 1804.
3	ʿAlî Bej ʿAbdallah, 1804.	$34^0\ 6'\ 3''$	29 13.0	—	d. Mittel aus Mondabständen und Verf. d. Jupitertrabanten.
4	Triesnecker, 1810.	—	29 30.3	—	der Sonnenfinsterniss vom 10. Februar 1804.
5	Wurm, 1812.	34 6 3	29 26.4	$12^0\ 38'\ 24''$	der Sonnenfinsterniss vom 10. Februar 1804.
6	C. des Temps, 1892.[15]	34 6 3	29 26.3	12 38 5	(Als Quelle beider Coordinaten Nr. 3 angegeben.)

Beim Ulug Beg (im heutigen Osmanischen الوغ بك Ulûg Bej lautend) habe ich die Epoche seiner astronomischen Tafeln angesetzt und, wohl ohne zu merklichen Fehler, seine, von den Kanaren gezählte Länge ein-

orientaux; etc. . . . . . publié par la Société asiatique. — Huitième série. Tome XVII. Paris, 1891. Gr. 8°.

15) Connaissance des Temps ou des mouvements célestes, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1892, publiée par le Bureau des Longitudes. Paris, 1890. Lex. 8°.

fach mit der von Ferro identificirt; die Nummern 2, 3, 4, 5 sind aus dem XII., XXII. und XXVI. Bande der „Monatl. Corresp." (folgweise: Gotha, 1805, 1810, 1812) entnommen. Von der Breite wird gesagt, dass sie „ungefähr für den Mittelpunkt der Stadt" gelte.

Gute geographische Ortsbestimmungen aus den Ländern des Islam zu erhalten, dürfte ohne Zweifel noch lange Zeit ein frommer Wunsch bleiben; und so lange kann man sich wirklich nicht danach sehnen, das, was darüber vorhanden ist, oft als Daten bei astronomischen Rechnungen einzuführen. Bei den allermeisten Städten bleibt nur übrig, sich mit, oft recht unzuverlässigen Zahlen zu begnügen; so gilt, beispielsweise, für Merâgah auch jetzt noch einzig und allein die geographische Position, welche einst Prof. Wurm aus der, im Jahre 1801 erschienenen Beauchamp'schen Karte eines Theiles von Persien ableitete und dafür $\varphi = + 37^0\ 15'$, $\lambda = 64^0\ 30'$ (östl. v. Ferro) fand. In dieser Stadt errichtete im Jahre 1259 der Enkel des Ćingiz-Ḫân (چنگيز خان) eine, zu hoher Berühmtheit gelangte Sternwarte, von der zuerst Waṣṣâf in seiner Persischen Geschichte (تاريخ وصّاف), die „ein Meisterwerk orientalischer prosaischer Kunst" genannt wird, gesprochen haben soll; in ihr wurde die Ilḫân'sche Tafel (زيج ايلخانى) verfasst. Ueber einige wenige Orte sind wir ja soweit im Klaren; aus deren Anzahl seien قزوين Ḳazwîn ($\varphi = + 36^0\ 15'\ 2''$, $\lambda = 3^h\ 10^m\ 50^s.1$ östl. v. Paris) und دمشق الشام Dimiśḳ (Damascus: $\varphi = + 33^0\ 30'\ 31''$, $\lambda = 2^h\ 15^m\ 51^s.9$ östl. v. Paris) hervorgehoben. Ferner gilt als sehr sichere Position die von Taschkent ($\varphi = + 41^0\ 19'\ 32''.2$, $\lambda = 3^h\ 43^m\ 35^s.89$ östl. v. Berlin).

Nach dem Geschilderten, und unter der Voraussetzung, dass nicht etwa vorzügliches Material in russischen oder englischen Archiven unveröffentlicht aufbewahrt wird, müssen zwei, mit modernen Hülfsmitteln ausgeführte, deutsche Ortsbestimmungen in Persien wahrhaft freudig begrüsst werden;[16]) es sind die von

Ispahan (اصفهان Iṣfahân): $\varphi = + 32^0\ 38'\ 16''.3$, $\lambda = 3^h\ 26^m\ 40^s.24$ östlich von Greenwich

und

Teheran (طهران Ṭehrân): $\varphi = + 35^0\ 41'\ 6''.8$, $\lambda = 3^h\ 25^m\ 42^s.74$ östlich von Greenwich.

---

16) Die Venus-Durchgänge 1874 und 1882. Bericht über die Deutschen Beobachtungen. Im Auftrage der Commission für die Beobachtung des Venus-Durchganges herausgegeben von A. Auwers, Vorsitzendem der Commission. Zweiter Band. Die Beobachtungen der Expeditionen von 1874. Berlin, 1889. Gr. 4°.

Dabei ist die Breite von Teheran der Connaissance des Temps für 1892 entliehen.

Dass es auch in Marokko gegenwärtig mit der Pflege der Astronomie übel aussieht, wie Herr Delphin mittheilt, liess sich erwarten, obwohl wenigstens der Sultan über Sextanten, Theodolithen und ein parallactisch montirtes Dollond'sches Fernrohr — aber anscheinend, ohne jegliche Nutzniessung — verfügt. Uebersetzungen europäischer astronomischer Werke existiren weder dort, noch in Algier; man gebraucht noch alte Manuscripte, von denen mehrere angeführt werden.[17]) In der europäischen Türkei dagegen wird allmälig wissenschaftlicher Sinn immer reger; so z. B. erschien vor ungefähr $1\frac{1}{2}$ Jahren in Konstantinopel — wohl zu Schulzwecken — ein Lehrbuch der Astronomie (هيئت فلكيه) von Moṣṭafa Ḥilmî Efendi, Schiffslieutenant und Lehrer der Astronomie und Navigation.[18])

Den Hauptinhalt des Delphin'schen Aufsatzes bildet die Beschreibung eines, für die Polhöhe von 33^0 angefertigten und bekannten Zwecken dienenden, marokkanischen Astrolabiums aus dem Jahre 1783 (oder dem Ende von 1782). Es besteht aus einer kupfernen Scheibe, von 22 cm Durchmesser und 3 mm Dicke, um deren Mittelpunkt sich eine Alhidade drehen lässt, welche 2 Diopter mit schwach conischen Löchern trägt. Der Apparat wird frei in der Hand gehalten, und zwar mit Hülfe einer doppelten Aufhängung, eines Ringes und Bügels nämlich; unterhalb des letzteren ist das Metall soweit ausgehöhlt, um eine kleine Bussole aufnehmen zu können. Fast alle Aufschriften sind in kufischen Charakteren und nur drei in sogen. Maġreb-Buchstaben gravirt. —

Derselbe Band des Journal asiatique, aus dem ich das Vorstehende zum Theil ausgehoben habe, enthält eine, für den Historiker ungleich interessantere Publication des Herrn Baron Carra de Vaux, die Derselbe Notice sur deux manuscrits arabes überschrieben hat. Wenn ich mir, ohne Philologe zu sein, erlauben darf, darüber im Allgemeinen zu

17) Sehr nützlich zum Nachschlagen geographischer und historischer Schriften des Morgenlandes überhaupt ist das, 244 Titel enthaltende Buch von Fraehn: Indications bibliographiques relatives pour la plupart à la littérature historico-géographique des Arabes, des Persans et des Turcs, spécialement destinées à nos employés et voyageurs en Asie. St. Pétersbourg, 1845. Gr. 8^0. Französisch und russisch.

18) Vielleicht geschieht es am passenden Orte, wenn ich hier auf eine, kürzlich erschienene, umfangreiche Schrift über Tibet aufmerksam mache; es ist die von W. Woodville Rockhill: Tibet. A Geographical, Ethnographical and Historical Sketch derived from Chinese Sources. (The Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain & Ireland. Published by the society. Band XXIII. London, 1891. Gr. 8^0.)

urtheilen, so muss ich sagen: ein bescheidener Titel für eine höchst mühevolle Arbeit, deren Ergebnisse 35 Seiten füllen!

Zuerst wird eine arabische Behandlung der *σφαιρικά* des Theodosius besprochen, die sich in einem Manuscript vorfindet, dessen anscheinend aus dem 16. Jahrhundert stammende Copie die Nationalbibliothek zu Paris besitzt. Das Original, eine Arbeit des محيى الدين ابى الشكر المغربى Muhyî Eddîn Abû Šukr Almagrebî, gehört dem Jahre 1500 an. Die Copie ist zusammengebunden mit einer Abhandlung über Wasseruhren, die von Archimedes herrühren soll, mit einem Tractat über den „vollkommenen Zirkel", den Woepcke übersetzt,[19]) und der mir selbst vorgelegen hat, sowie mit verschiedenen Bruchstücken von untergeordneter Wichtigkeit. Das Ganze muss böse aussehen, d. h. mit einer unglaublichen Sorglosigkeit geschrieben sein, so dass die Entzifferung des Textes und der beigegebenen Figuren wohl nicht geringe Schwierigkeiten bereitet haben mag.

Hier wird mich das, von den Wasseruhren handelnde Manuscript, dessen Verfasser sich leider nicht genannt hat, allein beschäftigen. Die Zueignung dieser Schrift anlangend, fragt Herr C. de V.: „Beweist dieselbe, dass es eine Ueberlieferung gab, der zu Folge man die Erfindung oder Vervollkommnung der Wasseruhren auf Archimedes zurückführen muss, oder ist sie nichts weiter als die abgedroschene List eines Auctors, der sich Leser verschaffen wollte?" „Ohne Zweifel" — meint Herr C. de V. — „ist die zweite Hypothese die wahrscheinlichere." Freilich citirt das كتاب تواريخ الحكماء (Buch der Geschichten der Weisen), unter den

19) Trois traités arabes sur le compas parfait, publiés et traduits par François Woepcke. (Notices et Extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale et autres bibliothèques, publiés par l'Institut national de France, faisant suite aux Notices et Extraits lus au comité établi dans l'Académie des inscriptions et belles-lettres. Tome vingt-deuxième. Paris, MDCCCLXXIV. Gr. 4°.)

Unter dem „vollkommenen Zirkel" (البركار التامّ) ist ein Instrument zu verstehen, mit Hülfe dessen man alle Kegelschnitte beschreiben kann. — Das erste Manuscript ist von dem, in der 2. Hälfte des 12. Jahrhunderts lebenden Mathematiker محمد بن الحسين verfasst und war für die Bibliothek des Sultan Ṣalâḥ ad-dîn (صلاح الدين) bestimmt. Das zweite ist ein Werk des Abî Sehl Uïġn ben Ustem al-Kûhî (ابى سهل ويجن بن وستم القوهى), der am Ende des 10. Jahrhunderts eine sehr hohe Stelle am Hofe des Adad ad-daula, des Bujiden, eingenommen und im Jahre 378 d. H. zu Bagdad das Sommer- und Winter-Solstitium beobachtet haben soll. Der Verfasser des Dritten endlich lebte gleichfalls in der zweiten Hälfte des 10. Jahrhunderts, gab aber nur einen Auszug aus der Abhandlung eines Anderen über Beschreibung der Kegelschnitte.

Werken des Archimedes (ارشميدس), ein كتاب ساعات آلات الماء التى ترمى بالبنادق مقالة, Buch der Wasseruhren, von denen Kugeln herabfallen.

Nunmehr reproducire ich, nach der Uebersetzung des Herrn Herausgebers, wörtlich die Beschreibung einer Wasseruhr, deren sich vermuthlich die Astronomen bedient haben:

„Der letzte Paragraph endlich ist der Beschreibung eines, تغار tagâr genannten Instrumentes gewidmet, nämlich der einer Wasseruhr, deren Construction eine, von der gewöhnlichen etwas abweichende ist. Bei letzterer entströmt das Wasser mit gleichförmiger Geschwindigkeit einem Gefässe, dessen Inhalt stets auf unveränderlichem Niveau erhalten wird; beim tagâr dagegen findet kein Wasserzufluss statt, sondern eine, zu diesem Zwecke angebrachte Theilung lässt stets erkennen, welches Zeitmoment der augenblicklichen Wasserhöhe entspricht. Der ganze Apparat besteht im Wesentlichen aus einem Gefässe von Umdrehungsoberfläche, das im Innern ein Ansatzrohr mit engem Mundloch, zum Ablaufen des Wassers, enthält. Auf der Innenwand dieses Gefässes sind, in der Mitte des Rohres zusammenlaufende Linien des stärksten Gefälles gezogen und dazu bestimmt, die Theilung zu tragen. Letztere richtet sich danach, ob man nach gleichen Stunden (die Zeit von einem Sonnenaufgang bis zum andern in 24 Stunden eingetheilt) rechnen will, oder nach den 12 Stunden zwischen Sonnenauf- und -Untergang. Im ersteren Falle bringt man am Rande des tagâr einen kreisförmigen, in 4 gleiche Theile eingetheilten Limbus an. [Man lässt den t. in einen kreisförmigen Rand auslaufen.] Der gemeinsame Schnittpunkt der, von diesen Theilpunkten aus gezogenen Linien [der Meridiancurven, wenn ich richtig verstehe] bestimmt auf dem Grunde des Gefässes das Centrum des Ansatzrohres. Hat man nun auf astronomischem Wege ermittelt, wann eine Stunde abgelaufen ist, so bezeichnet man auf ihnen die entsprechende Wasserhöhe. Die Dimensionen des Mundloches müssen so gewählt sein, dass die Zeit eines totalen Wasserablaufes zum mindesten der des längsten Tages an dem Orte gleichkommt, wo der Apparat aufgestellt ist. Folglich wird das Mundloch immer kleiner, resp. der Inhalt des Gefässes immer grösser werden müssen, je näher der Beobachtungsort dem Erdpol liegt. Sind die nöthigen Versuche beendet, so fixirt man die definitive Theilung durch silberne Sterne.

Weit complicirter wird die Construction, wenn man sich der ungleichen Stunden bedienen will, d. h. wenn man die Zeit von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang in 12 Stunden eintheilt. Dann muss man zunächst einen vollständigen Zodiakus auf dem Rande des tagâr verzeichnen und jeden

der 12 Sectoren in 5 gleiche Theile eintheilen. Von den 12 Haupttheilpunkten ziehe man Linien bis auf den Grund des Gefässes herab. Hier, wie im voraufgehenden Falle, kann der taġâr nur für eine bestimmte Polhöhe eingerichtet werden. Auf jeder der soeben angeführten 12 Linien bemerke man nun die Höhe des Wasserstandes, nachdem eine Stunde des Tages verflossen ist, an dem sich die Sonne in dem betreffenden Zeichen befand und unter der gegebenen Polhöhe beobachtet wurde; die Astronomie liefert dazu das Hülfsmittel. Hierauf zieht man mit dem Zirkel Kreisbögen, welche je zwei aufeinanderfolgende der so erhaltenen Punkte verbinden, so zwar, dass jeder solcher Kreisbogen durch den Theilpunkt (die Marke) des Widders hindurchgeht. Ebenso verfährt man für die übrigen ungleichen Stunden. Auf den Linien des Widders und der Wage wird die Eintheilung in ungleiche Stunden mit der in gleiche zusammenfallen, weil während des Durchganges der Sonne durch diese Zeichen die Stunden des Tages und der Nacht einander gleich sind. Die krummen Linien der ungleichen Stunden, welche die aufeinanderfolgenden Bogen bilden, lasse man nicht in die Zeichen selbst hineinreichen; die silbernen Sterne befestige man auf den, ihnen entsprechenden Theilpunkten, und gebe ihnen, so zu sagen, eine bevorzugte Stellung. Eine, um ihren tiefsten Punkt, als Mittelpunkt, drehbare Art von Alhidade, im Innern des Gefässes und sich dessen Form anschmiegend, kann man, nach Belieben, auf irgend einen Punkt des getheilten Limbus einstellen; ihr Durchschnitt mit den krummen Linien der ungleichen Stunden liefert dann eine genaue Theilung für jeden Tag des Jahres". — Damit endet die Handschrift.

Bei den ungleichen Stunden kommt also die Anleitung darauf hinaus, die einzelnen Niveaucurven (wie man vielleicht nicht unpassend sagen kann) als Einhüllende einer Schaar von Kreisen, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, genauer zu bestimmen. So zu verfahren, mag die Praxis gelehrt haben; wenig bequem war es aber jedenfalls, auf einer Rotationsfläche mit dem Zirkel zu operiren. Denkt man sich, das Gefäss habe die Form eines Rotations-Cylinders besessen, und dessen Mantelfläche sei in eine Ebene aufgerollt, so kann die Theilung etwa so ausgesehen haben, wie ich sie, für 3 Stunden, in der beigehefteten Figurentafel entworfen habe. Die zweite Figur, die Umhüllungscurve eines Kreises darstellend, dient als einfaches und anschauliches Beispiel von graphischer Bestimmung einer Curvenform mit Hülfe von Kreisen, die sich in einem Punkte schneiden.

Wie überall, so heissen auch in dem von Herrn C. de V. untersuchten Manuscript die 24 gleichen Stunden الساعات المستويات, die 12 ungleichen

oder krummen الساعات الزمانيات oder الساعات المعوّجات. Die Alhidade (العِضادة) hat hier die Meridianform des Gefässes; das Ansatzrohr heisst جَرْعَة. Unter den بَنَادِق (Plural von بُنْدُق) sind Kupferkugeln zu verstehen, die, Stunde für Stunde und eine nach der andern, von Wasseruhren herabfallen; wie ich aus dem Wörterbuch ersehe, bezeichnet man jetzt Gewehr- oder Pistolenkugeln damit.

Ganz vortreffliche Nachrichten über mancherlei Astronomisches bei den Muhammedanern ertheilt ein, zwar schon vor vielen Jahren geschriebener, keineswegs aber veralteter Aufsatz von Beigel, dessen öffentlich zu gedenken, ich mir, seit ich ihn kenne, vorgenommen habe. Sein Titel lautet: „Versuch über eine bis jetzt noch nicht erklärte Stelle in Abulfeda's Beschreibung von Aegypten, unter dem Artikel Fostat; nebst Bemerkungen über die Gnomonik der Araber.“[20])

Zur Kenntniss rein mathematischer, sowie astronomischer Bezeichnungen und Kunstausdrücke der Araber liefern die Schriften von Nesselmann, Woepcke, Dorn und Schjellerup gleichfalls sehr schätzenswerthe Beiträge; namentlich dem Ersten kann man für seine Ausgabe der „Essenz der Rechenkunst des Behâ-eddîn“ (خلاصة الحساب تصنيف بهاء الدين محمد بن الحسين العاملي, wahrscheinlich im 17. Jahrhundert lebend), die dieser ausgezeichnete Gelehrte mit einer Menge wichtiger Noten begleitet hat, nur dankbar sein.

Anhang.

Solange telegraphische Bestimmungen der geographischen Länge zweier Punkte auf der Erdoberfläche noch nicht bekannt waren, boten die aus Mondculminationen und Sternbedeckungen das vorzüglichste Mittel hierzu, das auch heute noch in Ländern, wo jene nicht ausführbar sind, zur Anwendung kommt. Ist jedoch die Länge eines Ortes genau festgelegt, so gewähren die Beobachtungen von Sternbedeckungen noch überdiess den grossen Vortheil, dass sie, wenigstens vom theoretischen Gesichtspunkte aus betrachtet, eine sehr geschätzte contrôle der Mondtafeln gestatten; und hierbei sind wieder die Durchgänge des Mondes durch die Gruppe der Plejaden von ganz besonders hervorragender Bedeutung, die noch durch

---

20) Fundgruben des Orients, bearbeitet durch eine Gesellschaft von Liebhabern. Auf Veranstaltung des Herrn Grafen Wenceslaus Rzewusky. Erster Band. Wien, 1809. Folio.

das Hinzutreten des günstigen Umstandes, dass sich die Durchgänge südlich von einigen Sternen und nördlich von den anderen ereignen, und innerhalb deren die Fehler der Mondtafeln fast constant bleiben, erhöht wird.

Diese Vortheile können aber leider dadurch ganz aufgehoben werden — ich selbst weiss es, dass sie einige Male thatsächlich als illusorische angesehen werden mussten — dass, bei dem gegenwärtigen Stande unserer Mondtheorie, ein ganz ausserordentlich hoher Grad von Genauigkeit (der, nach der Sachlage, auch einem geübten Beobachter durchaus nicht immer zu erreichen sein wird) dazu gehört, um aus Beobachtungen von Sternbedeckungen Vertrauen erweckende Aufschlüsse über die Fehler moderner Mondtafeln erwarten zu dürfen. Da ich nun meine Ueberzeugung doch einmal ausgesprochen habe, so sehe ich nicht ein, wesshalb ich sie nicht auch durch Anführung eines Beispieles gewissermaassen erhärten sollte, das ich, zur Vermeidung von Irrthümern, wiederholt durchgerechnet habe. Die Anregung zu diesem Excurs, die ich zur Erklärung seines etwas unmotivirten Erscheinens nicht unterdrücken will, gaben mir mehrere Längenbestimmungen, die seinerzeit Triesnecker aus Sternbedeckungen abgeleitet und l. c. veröffentlicht hat.

Am 7. Januar 1876 wurden zu Strassburg i. E. nachstehende Momente der Bedeckungen einiger Sterne der Plejadengruppe durch den Mond erhalten:

I.

Stern und beobachtetes Moment.	Sternzeit Strassburg i. E. 1876 Januar 7.			Von Winnecke angenommen.
	Winnecke.	Schur.	Hartwig.	
Anonyma 23. Eintritt.	2^h 5^m $39^s.2$	—	—	2^h 5^m $39^s.20$
„ 19. „	8 52.7	—	—	8 52.70
„ 25. „	10 51.2	—	—	10 51.20
„ 22. „	20 54.7	—	$54^s.5$	20 54.60
„ 13. „	31 35.1	—	—	31 35.10
26 S Plejadum. „	54 12.1	—	11.2	54 12.10
Anonyma 30. „	3 2 52.0	—	—	3 2 52.00
27 f Atlas. „	13 29.0	$28^s.1$	29.1	13 29.05
28 h Plejone. „	25 33.4	33.0	33.2	25 33.20
Anonyma 40. „	55 27.7	—	—	55 27.70
28 h Plejone. Austritt.	4 16 34.6	—	—	4 16 34.60
27 f Atlas. „	18 45.6	53.8	—	18 45.60

Die erste Beobachtung ist als „unsicher“ bezeichnet.

II.

Stern.	Grösse.	Ꜳ. med. 1840.	Jährl. Praecession 1840.	Jährl. Praecession Säculare Aenderung.	Eigene Bewegung.	Decl. med. 1840.	Jährl. Praecession 1840.	Jährl. Praecession Säculare Aenderung.	Eigene Bewegung.
Anonyma 23	8.9	54° 29′ 36″.40	53″.046	+ 0″.265	+ 0″.0217	+ 23° 10′ 40″.14	11″.648	— 0″.425	— 0″.0656
,, 19	8	54 28 1.82	53.086	+ 0.266	,,	+ 23 18 9.11	11.656	— 0.426	,,
,, 25	8.9	54 32 5.30	53.027	+ 0.264	,,	+ 23 6 35.59	11.637	— 0.425	,,
,, 22	8	54 28 47.57	53.124	+ 0.267	,,	+ 23 24 50.13	11.652	— 0.426	,,
,, 13	8.9	54 23 41.65	53.144	+ 0.268	,,	+ 23 29 37.12	11.676	— 0.426	,,
26 S Plejadum	7.8	54 51 48.27	53.140	+ 0.265	,,	+ 23 21 43.53	11.543	— 0.428	,,
Anonyma 30	8.9	54 55 39.24	53.156	+ 0.265	,,	+ 23 23 31.50	11.524	— 0.429	,,
27 f Atlas	4.5	54 54 53.68	53.212	+ 0.266	,,	+ 23 33 30.41	11.528	— 0.429	,,
28 h Plejone	5.6	54 55 10.82	53.241	+ 0.267	,,	+ 23 38 30.60	11.527	— 0.429	,,
Anonyma 40	7.8	55 20 31.97	53.220	+ 0.264	,,	+ 23 28 18.94	11.405	— 0.431	,,

III.

Stern.	Sternzeit Strassburg i. E. 1876 Januar 7.	α app. *	δ app. *	α app. ☾	δ app. ☾	r app. ☾
Anonyma 23	2ʰ 5ᵐ 39ˢ.20	55° 1′ 41″.49	+ 23° 17′ 45″.62	54° 43′ 56″.83	+ 23° 15′ 0″.41	16′ 42″.56
,, 19	8 52.70	55 0 8.37	+ 23 25 14.90	54 45 27.81	+ 23 15 38.91	42.61
,, 25	10 51.20	55 4 9.74	+ 23 13 40.66	54 46 23.55	+ 23 16 2.53	42.75
,, 22	20 54.60	55 0 55.50	+ 23 31 55.81	54 51 6.14	+ 23 18 1.28	42.92
,, 13	31 35.10	54 55 50.29	+ 23 36 43.70	54 56 4.55	+ 23 20 5.47	43.18
26 S Plejadum	54 12.10	55 23 56.91	+ 23 28 45.26	55 6 32.26	+ 23 24 21.47	43.65
Anonyma 30	3 2 52.00	55 27 48.47	+ 23 30 32.56	55 10 31.63	+ 23 25 56.90	43.82
27 f Atlas	13 29.05	55 27 4.94	+ 23 40 31.67	55 15 24.33	+ 23 27 51.98	43.90
28 h Plejone	25 33.20	55 27 23.13	+ 23 45 31.84	55 20 56.51	+ 23 30 0.07	44.06
Anonyma 40	55 27.70	55 52 43.66	+ 23 35 15.72	55 34 39.23	+ 23 35 5.14	44.28
28 h Plejone	4 16 34.60	55 27 23.13	+ 23 45 31.85	55 44 22.13	+ 23 38 29.88	44.30
27 f Atlas	18 45.60	55 27 4.93	+ 23 40 31.69	55 45 22.57	+ 23 38 50.00	44.38

Zur II. Tabelle ist zu bemerken, dass die mittleren Sternörter nach Bessel angesetzt sind, und dass die Eigene Bewegung das Mittel aus sämmtlichen, im Bessel'schen Verzeichnisse vorkommenden Angaben, d. h. für jeden Stern in je einer Coordinate eine und dieselbe Zahl ist, somit eine gleichmässige Verschiebung des ganzen Systems zum Ausdrucke gelangt.

Bei der Berechnung habe ich weder, was die vollständigen Beobachtungen von Atlas und Plejone betrifft, verschiedene Gewichte eingeführt, wie sie Hansen den durchlaufenen Sehnen proportional annimmt, noch überhaupt den Einfluss der Strahlenbrechung berücksichtigt, welch' letzterer zwar auch von Hansen nachgewiesen ist, aber, nach Bessel's Untersuchungen, in dem Falle, dass das Gestirn nicht nahe am Horizont steht, unmerklich wird.

Die Auflösung sämmtlicher 12 Bedingungsgleichungen liefert Werthe, denen man augenscheinlich eine reelle Bedeutung nicht beilegen kann, da hierauf die Unsicherheit der Austrittsbeobachtungen zu nachtheilig eingewirkt hat. Werden die Austritte weggelassen, also nur 10 Gleichungen behandelt, so ergeben sich als Fehler der Mondtafeln

$$\Delta a = -5''.83 \pm 2''.03, \qquad \Delta d = +1''.08 \pm 1''.56,$$
$$\Delta r = -6''.32 \pm 2''.02.$$

Die übrig bleibenden Fehler betragen

+ 0''.75	bei Anonyma	23.	+ 1''.64	bei	26 S Plejadum.
+ 0.14	„ „	19.	— 2.49	„	Anonyma 30.
— 1.10	„ „	25.	— 0.19	„	27 f Atlas.
— 0.14	„ „	22.	0.00	„	28 h Plejone.
— 0.16	„ „	13.	+ 1.26	„	Anonyma 40.

III.

Im ersten Theile dieses letzten Abschnittes, den ich vielleicht mit einigem Rechte hätte Parerga et Paralipomena betiteln können, wird der Leser ein Paar Notizen finden, die ich, zur Vervollständigung des im Vorangehenden Besprochenen einerseits und zur Beantwortung einer früher von mir aufgeworfenen Frage andererseits, nicht glaubte unterdrücken zu dürfen. Der zweite Theil enthält einige Literaturangaben, deren — nach meinem Dafürhalten — grösseren oder geringeren Nutzen für die Geschichte der Astronomie ich zuweilen durch Hinzufügung von Excerpten oder Aphorismen unterscheidend hervorgehoben habe. Hierin auch rein Philologisches,

allerdings unter Beschränkung auf das kleinste zulässige Maass, berührt und nicht, wie es sich eigentlich gebührt, „aus Rücksicht auf die meisten Leser“ ganz beiseite gelassen zu haben — läuft freilich engherziger traditioneller, aber zum Glück immer mehr im Schwinden begriffener Auffassung zuwider, die bei Arbeiten auf Grenzgebieten zwischen Mathematik und Philologie beide Wissenschaften ängstlich auseinander zu halten sucht, statt nach Kräften dahin zu streben, dass sie sich gegenseitig die Hand reichen. Was Abel-Rémusat in der Einleitung (S. IX) zu seinem classischen Werke über die tartarischen Sprachen[21]) sagt

> — Il m'a paru qu'en aucun cas, nous ne pouvions juger une nation, critiquer ses traditions, rechercher son histoire, si nous ne savions sa langue, ou si d'autres ne l'avoient sue avant nous. —

unterschreibe ich, als wären es meine eigenen Worte, und willig nehme ich die oft recht mühseligen Consequenzen daraus mit in den Kauf.

1.

Zunächst möchte ich zu dem im zweiten Abschnitte beklagten Mangel an guten Ortsbestimmungen im Morgenlande ergänzend und berichtigend bemerken, dass es in dieser Hinsicht, wenigstens was einen Theil desselben betrifft, doch ein wenig besser aussieht, als ich dort angegeben habe. Seit etwa 40 Jahren besitzen wir nämlich ein (wohl zum grössten Theil in die Connaissance des Temps für 1892 übergegangenes) Verzeichniss von 83 Oertern des persischen Reiches, die durch Beobachtungen so festgelegt sind, dass sie jedenfalls für kartographische Zwecke, denen ja vor Allem eine genügende Unterlage geschaffen werden musste, als sehr brauchbare Fixpunkte zu bezeichnen sind. Wir verdanken sie dem (damaligen) russischen Hauptmann Lemm[22]), der in den Jahren 1838 und 1839 während einer dreizehnmonatlichen Reise (diplomatischen Mission) 129 geographische Positionen im europäischen Russland, russischen Transkaukasien und in Persien bestimmte. Mit sich führte er ein tragbares Ertel'sches Durchgangs-Instrument, einen Prismenkreis (älterer Construction) von Steinheil, vier

---

21) Abel-Rémusat, Recherches sur les Langues Tartares, ou mémoires sur différens points de la grammaire et de la littérature des Mandchous, des Mongols, des Ouigours et des Tibetains. Tome Ier. Paris, 1820; 4°.

22) Otto Struve, Résultats géographiques du voyage en Perse, fait par le capitaine Lemm en 1838 et 1839. (Mémoires de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg. Sixième série. Sciences mathématiques et physiques. Tome V. St.-Pétersbourg, 1853; gr. 4°.)

Taschen-Chronometer von Brockbanks, Barraud und Arnold, zwei Barometer, zwei Thermometer, einen künstlichen Horizont und endlich einen Wegemesser oder Schrittzähler. Zur Bestimmung der Polhöhe (aus Circummeridianhöhen der Sonne, aus den Höhen des Polarsternes oder anderer heller Sterne) bediente er sich durchweg des Prismenkreises; konnte er aber irgendwo längeren Aufenthalt nehmen, wie in Tehran, Meschhed, Tauris (Tabris) und Tiflis, so traten hierzu auch Beobachtungen im Ersten Vertical mit Hülfe des Durchgangs-Instrumentes. Die Zeitbestimmungen beruhen im Allgemeinen auf Sonnen- und Sternhöhen, oftmals auch auf correspondirenden Sonnenhöhen, beobachtet mit dem Prismenkreis. Die Längen sind zumeist aus Chronometer-Uebertragungen, und nur die von Tehran und Meschhed aus Mond-Culminationen erhalten werden; zu fast allen der letzteren fand Otto Struve correspondirende Beobachtungen, die auf festen Observatorien angestellt waren. Der Genauigkeitsgrad der Resultate entspricht beinahe überall demjenigen, den man erwarten durfte, und wirft ein vortheilhaftes Licht auf die Sorgfalt und Energie des ausserordentlich fleissigen Beobachters. Hätte ihn doch seine Reisedisposition zu dem einen oder andern Orte geleitet, dessen Neubestimmung mir als besonders wünschenswerth erschien!

Weiter handelt es sich um eine von Ibn Jûnis im Jahre 1007 zu Kairo beobachtete Conjunction von Jupiter und Saturn, die, der Theorie nach, sich am 31. October (bürgerl.) des genannten Jahres ereignet haben müsste, während alle Daten des arabischen Manuscriptes, in welchem diese Beobachtung angeführt ist, und das uns seit langer Zeit von Caussin im Urtext und in der Uebersetzung vorliegt, übereinstimmend hierfür den 7. November ergeben. Eine Erklärung dieser merkwürdigen Discrepanz vermochte ich ebenso wenig in meiner letzten Publication[23]) zu liefern, als ich jetzt dazu im Stande bin. Allerdings ist später, und zwar von berufenster Seite, gerügt worden, dass Caussin hin und wieder kleine, übrigens ziemlich unschädliche Versehen begegnet sind. Derlei kann aber, da Caussin kein Astronom war, am Ende nicht Wunder nehmen und bei billiger Kritik einer so verdienstvollen Arbeit nicht schwer in's Gewicht fallen. Im vorliegenden Falle ist jedoch die Möglichkeit einer falschen Auffassung vollständig ausgeschlossen, denn der arabische Text duldet keine andere Uebersetzung als die Caussin'sche. So blieb also nichts Anderes übrig, als die Theorie, resp. die Tafelwerke zu befragen, und diese Untersuchung hat,

---

23) „Ein Beispiel zum Theodor von Oppolzer'schen „Kanon der Finsternisse". (Leipzig, 1888; gr. 4°.)"

wie ich vor Kurzem fand, Burckhardt[24]) schon vor 93 Jahren ausgeführt. Er schreibt zum Schluss, dass die Tafeln für 1007 October 30 15^h geben:

Geocentrische	Länge	des	Saturn	162^0	$9'$	$47''$	
„	„	„	Jupiter	162	1	13	
„	Breite	„	Saturn	1	54	11	nördlich.
„	„	„	Jupiter	1	7	17	„

In Aequator-Coordinaten umgesetzt, folgt hieraus:

1007 October 30, 15^h zu Paris.

	α.	δ.
Jupiter	$10^h\ 55^m\ 28^s.5$	$+ 8^0\ 7'\ 32''$
Saturn	10 57 13.5	+ 8 47 32.

Das, was jetzt noch Interesse bieten könnte, wäre etwa: zu wissen, von Wem eine solche vorsätzliche, mit Ueberlegung vorgenommene Textverfälschung wohl herrühren mag? Den wackern Ibn Jûnis trifft sicher keine Schuld.

2.

Abel-Rémusat, Recherches sur les Langues Tartares.

S. 25: .... d'un traité d'astronomie en langue Mongole, qui est le seul ouvrage de cette langue que nous possédions en France. C'est la colonne la plus neuve et la plus importante du vocabulaire comparatif; car cet idiome célèbre n'étoit encore connu que par de mauvaises listes de mots données par Witsen, Strahlemberg et Pallas, où les mots sont dépourvus de caractères originaux, et défigurés par des prononciations provinciales ou par des transcriptions fautives. Ich glaube, er hat damit dasselbe Werk gemeint, das früher von ihm im dritten Bande der „Fundgruben des Orients (Wien, 1813)“ ausführlich behandelt worden ist, und zwar unter dem Titel: Uranographia Mongolica sive Nomenclatura Siderum, quae ab Astronomis Mongolis agnoscuntur et describuntur. (Excerptum ex opere, Mongolica lingua conscripto, quod in Bibl. Imp. Paris. conservatur.) — Sodann sei noch auf das 6. Capitel, „Vom Osttürkischen, gewöhnlich Uïgurisch genannten“, verwiesen.

---

24) Allgemeine Geographische Ephemeriden. Verfasset von einer Gesellschaft Gelehrten und herausgegeben von F. von Zach. Dritter Band. Weimar, 1799; 8°.

Th. Henri Martin, Sur des instruments d'optique faussement attribués aux anciens par quelques savants modernes. (Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tome IV. 1871.) Rome, 1871; gr. 4^0. Eine sehr dankenswerthe kritische Untersuchung, der die weiteste Verbreitung zu wünschen wäre, damit sich nicht so manche irrige Tradition „wie eine ewige Krankheit“ fortpflanzt.

L. Am. Sédillot, Sur les emprunts que nous avons faits à la science arabe et en particulier de la détermination de la troisième inégalité lunaire ou variation par Aboul-Wéfâ de Bagdad, astronome du Xe siècle. (Ebendaselbst, 8. Band.) Rome, 1875. Nach einer geschichtlichen Einleitung folgen, begleitet von einer Legion von Citaten, bittere Klagen, die man wohl begreiflich finden kann, und endlich Urtext und Uebersetzung des X. Capitels aus dem Almagest des Abû'l Wefâ, nämlich des Tractates von der dritten Mond-Ungleichheit (المسمّى اختلاف المحاذاة Moḥâdât). Freilich, wem das noch nicht genügt, dem ist nicht zu helfen!

W. Schott, Zur Uigurenfrage. 2 Abtheilungen. (Aus den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1873 und 1875. Abhandlungen der philosophisch-historischen Classe.) Berlin, 1874 und 1875; gr. 4^0.[25])

Den Namen ايغور Igûr oder اويغور Uigûr (ähnlich wie ihn die Chinesen 伊吾盧 I-ngu-lu oder 畏吾兒 Ui-ngu-orh, d. h. bald mit i, bald mit ui, schreiben, so dass die Aussprache der ersten Sylbe, wie Schott vermuthet, geschwankt haben muss) führt ein türkischer Volksstamm Hochasiens, dessen ursprüngliche Heimath das heutige chinesiche oder Ost-Turkestan war, speciell die Gegend, in der die Städte Turfan und Chă-mў (das türkische Chamyl oder Chamul) gelegen sind, letzteres an der Ost-

---

25) Die Veranlassung, mich eingehend mit dieser alttürkischen Völkerschaft zu beschäftigen, ist in erster Linie auf das Studium zweier akademischer Abhandlungen von Ideler („Ueber die Zeitrechnung von Chatâ und Igûr“ und „Ueber die Zeitrechnung der Chinesen“, 1832 und 1839), deren Inhalt ich in Fachkreisen als bekannt voraussetze, zurückzuführen; hieran reihte sich das der beiden folgenden Werke:

Julius Klaproth, Abhandlung über die Sprache und Schrift der Uiguren. Nebst einem Wörterverzeichnisse und anderen uigurischen Sprachproben aus dem Kaiserlichen Uebersetzungshofe zu Peking. Paris, 1820; Folio.

Derselbe, Tableaux historiques de l'Asie, depuis la monarchie de Cyrus jusqu' à nos jours. Paris, 1824. Text in 4^0 und Atlas von 25 Karten in Folio.

grenze des chinesischen Turkestan. Persische, türkische und chinesische Verzeichner asiatischer Begebenheiten berichten von demselben, dass sein Land mehrere Male zur nordwestlichen Provinz China's geschlagen wurde, was die theilweise Aneignung chinesischer Sprache, Literatur und Sitten von Seite der einverleibten türkisch-tartarischen Bevölkerung zur Folge hatte. Der osttürkische Sultan Abû'l-ġâzî (ابو الغازى بهادر خان, gest. 1644) in dem von ihm verfassten „Stammbaum der Türken (شجرۀ تركى)" und der Perser Rašîd-eddîn (رشيد الدّين, gest. 1318) in seinem „Sammler der Geschichten (جامع التواريخ)" verlegen die Ursitze der Uiguren viel weiter nach Nordosten, etwa in das Gebiet zwischen dem südlichen Laufe der Selengga und der Stadt Urga, oder direct an die Stätte des alten mongolischen Hoflagers Karakorūm; gegenwärtig sollen sie noch im westlichen Turkestan, so in den Chanaten von Chiwa und Buchara, vorkommen.

Zu ihrem Namen bemerkt Schott, dass die ihm begegneten Formen desselben „mit ui, i und ju beginnen. Das schliessende r wird von den Chinesen durch ihr zwitterhaftes orh (urh, rh), oder durch die Sylbe lu, deren vocalischer Auslaut abzurechnen, ausgedrückt, auch völlig unterdrückt, und einmal ist sogar von dem ganzen Namen nur der erste Vocal geblieben." — Etwas vorher wird mitgetheilt: „Grosser politischer Bedeutung im thätigen Sinne des Wortes hat das Uigurenvolk kaum jemals sich erfreut. Der Umstand, dass syrische Verkünder des Christenthums weiland (im 7. Jahrhundert?) mit vorübergehendem Erfolg unter ihnen predigten und eine semitische Buchstabenschrift ihrer Sprache anpassten, verschaffte ihnen in Europa einige Beachtung, die um vieles erhöht ward, als endlich mehrere, in jener Schrift geschriebene, osttürkische Geisteswerke, eines aus dem 11. Jahrhundert u. Z., unter uns auftauchten." Im 11. Jahrhundert waren die Uiguren noch, wenigstens der grossen Mehrheit nach, buddhagläubig.

Ćingiz-Ḫân (چنگز خان) führte die uigurische Schrift und Sprache bei seinen Mongolen ein; sein Enkel, Chubilai, befahl einem Oberpriester, die ältere uigurische Schrift zu verwerfen und eine Auswahl Buchstaben der tibetischen Quadratschrift den mongolischen Lauten anzupassen, hatte aber damit eine Neuerung geschaffen, die, weil zu unbequem, nicht lebensfähig war.

J. Klaproth, dem zwar Schott eine Menge der bedenklichsten Fehler nachweist, darin aber, wie wohl die Meisten, mit ihm übereinstimmt, dass die uigurische Schrift aus den syrischen Buchstaben, mit denen sie einzelne Aehnlichkeiten hat, hervorgegangen ist und auch vollkommen mit den Formen

und Sylbenverbindungen des sabäischen Alphabets harmonirt[26]) — sagt: „Das uigurische Alphabet ist die Quelle der jetzt in Mittelasien gebräuchlichen mongolischen und mandschuischen Schrift und dient noch jetzt den türkischen Bewohnern der kleinen Bucharei, neben dem Arabischen, um ihre Muttersprache zu schreiben.“ Hiergegen wendet sich in neuester Zeit Fr. Müller[27]) in einer prüfenden Untersuchung, deren schliessliche Ergebnisse er in folgende Worte zusammenfasst: „Ueberblickt man unsere Vergleichung, so stellt sich als Ergebniss derselben Folgendes heraus: Von den 14 Zeichen des mongolischen Alphabets lassen sich alle bis auf drei, nämlich mittleres t (d) — r — m aus der syrischen Schrift ableiten; drei Zeichen (mittleres t, r, m) zeigen blos mit der mandäischen Schrift eine Verwandtschaft, und ein Zeichen, nämlich s (š) zeigt jene alte Form, welche in keinem der jüngeren Alphabete sich mehr findet. Wir können daher mit Fug und Recht behaupten, dass jenes syrisch-nestorianische Alphabet, nach welchem die Schrift der Mongolen gebildet wurde, bis heutzutage noch nicht gefunden, resp. nachgewiesen worden ist.“ Der Herr Verfasser nimmt dabei die mongolischen Schriftzeichen als die typischen an.

A. Terrien de la Couperie, The old numerals, the counting-rods and the Swan-Pan in China. (Reprinted from the Numismatic Chronicle, vol. III., third series. London, 1883; 8⁰.)

 Ssuan-pan, Zählplatte oder Rechenbrett, ist keine chinesische Erfindung, sondern erscheint erst im 12. Jahrhundert in China, und zwar, wenn auch nicht auf directem Wege, aus Indien eingeführt.

G. Bilfinger, Die antiken Stundenangaben. Stuttgart, 1888; 8⁰.

Derselbe, Die babylonische Doppelstunde. Eine chronologische Untersuchung. Stuttgart, 1888; 4⁰.

Im Ersten wird, nach Galenus, eine Uhr beschrieben, „die den Grundgedanken der antiken Wasseruhr wohl am einfachsten zum Ausdruck bringt“. Wenige Seiten darauf heisst es: „Stundenminuten und Stundensecunden finde ich in der europäischen Literatur erst im Ausgang des Mittelalters, im Osten zuerst bei Albiruni (ca. 1000 n. Chr.), so dass es als höchst wahrscheinlich erscheint, dass die arabischen Astronomen die ersten waren,

---

26) So z. B. ausgesprochen in einem Buche, das mir gerade zur Hand ist, nämlich in C. de Harlez, Manuel de la Langue Mandchoue. Grammaire, anthologie et lexique. Paris, 1884; gr. 8⁰.

27) Wiener Zeitschrift für die Kunde des Morgenlandes. Herausgegeben und redigirt von G. Bühler, J. Karabacek, D. H. Müller, F. Müller, L. Reinisch. V. Band. Wien, 1891; gr. 8⁰.

die die Sexagesimalrechnung auf die Stundenrechnung anwandten." — Das haben sie wohl gethan, und zwar lange vor Bîrûnî (1041 gest.), wenn auch nur in der Rechnung ihre Ausdrucksweise der unserigen conform war. Bei Beobachtungen bedienten sie sich der ächten Brüche für die Unterabtheilungen der Stunden. So z. B. giebt Aḥmed ibn ʿAbdallâh Ḥabaś, gelegentlich einer von ihm am 20. Juni 829 beobachteten Mondfinsterniss, den Längenunterschied zwischen Bagdad und Alexandria zu 50^m an und hat damit, genau wie wir, die Bogengrösse des Ptolemaeus in Zeitmaass umgewandelt (البعد بين بغداد والاسكندرية نَ دقيقة من ساعة معتدلة), dagegen sagt er von einer Sonnenfinsterniss, dass sie um 8 Uhr und $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{10}$, also $8^h\ 16^m$, zu Ende war; oder von einer Mondfinsterniss: sie schloss $10^h\ 7^m\ 30^s$ (عشر ساعات وثمن ساعة زمانية 10 Stunden und $\frac{1}{8}$ Stunde). Alles in Buchstaben, und sexagesimale Eintheilung gemeint.

Eduard Mahler, Astronomische Untersuchung über die angebliche Finsterniss unter Thakelath II. von Aegypten. (LIV. Band der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien, 1888; gr. 4°.)

F. Kielhorn, Tafeln zur Berechnung der Jupiter-Jahre nach den Regeln des Sûrya Siddhânta und des Jyotistattva. (Aus dem 36. Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen, 1889; gr. 4°.)

G. Schlegel und F. Kühnert, Die Schu-King-Finsterniss. Veröffentlicht durch die Königliche Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam. Amsterdam, 1889; 4°.

Im Jahre 1880 fand v. Oppolzer als Datum dieser Sonnenfinsterniss — 2136 October 21; nach den Verfassern würde sie sich — auf Grund philologisch-historischer Betrachtungen, mit astronomischer Unterstützung — am 7. Mai — 2165 ereignet haben.

Heinrich Brugsch, Die Aegyptologie. Abriss der Entzifferungen und Forschungen auf dem Gebiete der ägyptischen Schrift, Sprache und Alterthumskunde. Leipzig, 1891; gr. 8°.

S. 357. „Die viel behandelte Sothis- und Phoenix-Periode, um auch an diese zu erinnern, war nach Dr. Krall's (S. 79, Studien zur Gesch. d. alt. Aeg. I.) zutreffenden Bemerkungen eine Erfindung des zweiten Jahrhunderts, in Folge der am 20. Juli 139 zu Ehren des Kaisers Antoninus Pius gefeierten Apokatastasis, in welcher der bewegliche und der unbewegliche 1. Thoth zusammengefallen waren. Den damaligen Chronographen, welche sich mit dem manethonischen Werke über die Geschichte Aegyptens beschäftigten, erschien die Sothisperiode als das geeignetste Hülfsmittel,

die grossen Zeitabschnitte einer mangelnden Aera durch leicht berechenbare Zahlen zu fixiren."

Mihira, Varâha, The Pañchasiddhântikâ. Astronomical work. The text, ed. with an original commentary in sanskrit and an english translation and introduction by G. Thibaut, ph. Dr., and M. Sudhâkara Dvivedi. Benares, 1891; 4⁰.

Die Pañchasiddhântikâ, eine gedrängte Darstellung des Inhaltes von fünf alten Siddhânta, oder Lehrbüchern der Astronomie, wurde in der Mitte dês 6. Jahrhunderts n. Chr. von dem Astronomen Varâha Mihira verfasst, der dabei, wie es den Anschein hat, so zu Werke ging, dass er jene fünf Systeme, von denen das dritte und vierte etwa aus dem Jahre 400 n. Chr. stammt, ihrem Alter nach aufeinander folgen liess. Im obigen Werke wird der Urtext sowohl nach dem benützten Manuscript, als auch in verbesserter Gestalt mitgetheilt; hieran reihen sich der Sanskrit-Commentar von Sudhâkara und die englische Uebersetzung. Der Herr Herausgeber verbreitet sich über den griechischen Einfluss auf die indische Astronomie und hat, wie mich dünkt, diesem Thema auch einige neue Seiten abgewonnen; so glaubt er nicht, dass sich die indische Astronomie unmittelbar auf die Werke eines Hipparch und Ptolemaeus gründe, sondern dass das occidentalische Element hierin aus griechischen Schriften secundärer Kräfte geschöpft sei.

(New Map of) Persia, Afghanistan and Beluchistan. Compiled under the supervision of Hon. G. Curzon. M. P. by Wm. Ino. Turner. Natural scale 1 : 3 810 000 = 60 miles to an inch. (Proceedings of the Royal Geographical Society and Monthly Record of Geography. Vol. XIV. London, 1892; gr. 8⁰.)

Herr G. Curzon, der intellectuelle Urheber dieser neuesten Karte von Persien, berichtet in einem Begleitschreiben, welches von dem gänzlichen Mangel an einer zuverlässigen Karte dieses grossen Königreiches ausgeht, über die Art ihrer Ausführung und das Material, worauf sie sich gründet. Ueber letzteres spricht er sich sehr unzufrieden aus und gesteht, dass es ihm, Alles in Allem genommen, nur den Eindruck eines „Gemisches oder Flickwerkes" gemacht habe. Benützt wurden englische (auch Admiralitäts-), russische und deutsche Karten, sowie viele itineraria, die häufig hingenommen werden mussten, wenn sie auch keinen Vermerk über die angewandten Instrumente enthielten. Mit rechter Schaffensfreude mag wohl Herr C., dem übrigens die Ergebnisse der Lemm'schen Reise und der Deutschen Expedition (im Jahre 1874) entgangen zu sein scheinen, kaum an seine Arbeit herangetreten sein. Dass er sie trotzdem zu Ende geführt

und uns zu einer kartographischen Darstellung von Persien verholfen hat, die wenigstens alles Das, was bis jetzt an hierzu erforderlichen Daten vorlag und ihm bekannt geworden war, gewissenhaft verwerthet, dafür hat er sich ohne Zweifel ein volles Anrecht auf Dank erworben. Wie freimüthig er selbst über die fertige Leistung, bei deren Vollendung ihm eine tüchtige Hülfskraft zur Seite stand, urtheilt, mögen seine eigenen Worte sagen: „Wissenschaftliche Schärfe kann man zur Zeit keinem Entwurfe einer Karte des persischen Reiches zugestehen, und sicher werden sich, auf Grund zukünftiger Forschungen, gar manche Schlussfolgerungen, bei denen wir stehen geblieben sind, als unhaltbar erweisen. Gegenwärtig ist man, selbst an die beste Karte von Persien, kein höheres Maass der Anforderungen zu stellen berechtigt, als dass sie in angenäherter Zuverlässigkeit Ersatz für strenge Richtigkeit biete." „Denn" — schickt er vorauf — „weder ist jemals eine Aufnahme von Persien gemacht worden, noch finden sich dort so schätzbare fundamentale Vorbedingungen erfüllt, wie sich deren das britische Indien, ja sogar die an Persien angrenzenden Ländereien von Afghanistan und Belutschistan erfreuen; hier haben englische Officiere durch genaue Triangulationen die Grundlagen für alle späteren Aufnahmen im Kleinen geschaffen, und ein Netzwerk gut fixirter Punkte oder Landmarken sorgt dafür, dass es einer künftigen Topographie des Landes nicht an dem nothwendigen mathematischen Gerippe fehle. Nicht so verhält es sich in Persien."

Perrier, Loewy et Bassot, Détermination des longitudes, latitudes et azimuts terrestres en Algérie. 3 parties, avec 19 planches. Paris, 1877—1880; 4^0. (Mémorial du dépôt général de la guerre, tome XI.)

Von dieser Publication kann ich leider nichts weiter als ihren Titel mittheilen. Aber schon der rühmlichst bekannte Name des Einen der Herausgeber dürfte dafür bürgen, dass durch jene Ortsbestimmungen die mathematische Geographie des westlichen Nordafrika eine wesentliche Förderung erfahren hat.

Addendum.

Erst nach Beendigung des Druckes sehe ich, dass ich im I. Abschnitte (S. 95) vergessen habe, noch zwei mittelalterliche arabische Himmelsgloben anzuführen. Ueber den einen, aus dem Jahre 1275, ist nachzulesen:

B. Dorn, Description of an Arabic Celestial Globe etc. London, 1829; 4^0.

Der andere, in der Bibliothek zu Paris befindlich, soll gegen das 13. Jahrhundert verfertigt worden sein.

DIE
ANFÄNGE DER GRUPPENTHEORIE
UND
PAOLO RUFFINI.

VON

HEINRICH BURKHARDT

IN GÖTTINGEN.

An den Forschungen über die ältere und älteste Geschichte der Mathematik nimmt augenblicklich eine grosse Reihe von Mitarbeitern teil; dagegen die Kenntnis der Entwickelung unserer Wissenschaft in den letzten Jahrhunderten hat nicht in gleichem Masse Förderung erfahren. Einige wenige Notizen über das erste Auftreten dieses oder jenes Satzes pflanzen sich von einem Lehrbuch zum andern fort; wer nähere Belehrung sucht, ist darauf angewiesen, auf die Quellen selbst zurückzugehen. So findet man z. B. überall die Angabe, der italienische Mathematiker Ruffini sei der erste gewesen, der behauptet und zu beweisen versucht habe, die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch Wurzelzeichen sei nicht möglich; man findet auch angegeben, worin die wesentlichste Lücke dieses Beweisversuchs bestanden hat; aber dass ein grosser Teil derjenigen substitutionentheoretischen Entwicklungen, welche man Cauchy zuzuschreiben gewohnt ist, bereits von Ruffini durchgeführt worden war, das scheint ganz in Vergessenheit gerathen zu sein.[1]) Eine Darstellung des wesentlichen Inhalts von Ruffini's einschlägigen Arbeiten wird daher vielleicht auf ein gewisses Interesse rechnen dürfen; es sei aber gestattet, vorher die allmähliche Entwicklung der ihnen zugrunde liegenden Ideen bei seinen Vorgängern zu verfolgen.

1. Hudde. Saunderson. Le Seur. Der erste Anlass zur Verwertung combinatorischer Betrachtungen bei algebraischen Untersuchungen scheint sich dargeboten zu haben, als man sich die Aufgabe stellte, die Gleichung m^{ten} Grades zu bilden, welche m von den n Wurzeln einer vorgelegten Gleichung n^{ten} Grades $(m < n)$ zu Wurzeln hat. Für $n = 4, 5, 6$ und $m = 2$, bezw. 3 ist diese Frage behandelt in der „epistola Johannis Huddenii de reductione aequationum“, welche Fr. van Schooten seiner lateinischen Übersetzung von Descartes' géométrie[2]) angehängt hat. Zu-

1) In der Bonner Diss. von J. Hecker: Über Ruffini's Beweis für die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichung von einem höheren als dem vierten Grade (Bonn 1886) ist nur die letzte Redaction von R.'s Beweis (die von 1813) besprochen, welche gerade seine interessantesten Entwicklungen nicht enthält.

2) Geometria a Renato des Cartes .... opera atque studio Francisci a Schooten. Amstel. ap. Elzevirios. II. Aufl. 1659, III. 1683.

nächst ist zwar dort[1]) nur nach rationalen Factoren der gegebenen Gleichung gefragt; indess wird diese Frage in der Weise beantwortet, dass zuerst die betreffende Hilfsgleichung wirklich aufgestellt und dann untersucht wird, ob sie eine rationale Wurzel besitzt. In ähnlicher Weise findet sich die Frage dann in den Lehrbüchern der folgenden Zeit behandelt; aber erst geraume Zeit später hat Saunderson[2]) darauf hingewiesen, dass die Bestimmung der quadratischen Factoren eines Polynoms vierten Grades notwendig auf eine Gleichung sechsten Grades führen müsse, da ja sechs die Anzahl der möglichen Factoren dieser Art sei. Dass er sich auf diesen speciellen Fall beschränkt hat, erklärt sich aus dem elementaren Charakter seines Werkes. Den allgemeinen Fall fasste bald darauf Le Seur ins Auge; er gibt:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots m}$$

als Grad der Gleichung an, von welcher die Bestimmung der Divisoren m^{ten} Grades eines Polynoms vom n^{ten} Grade abhängt.[3])

Das Interesse, welches die Mathematiker jener Zeit gerade dieser Frage entgegen brachten, beruhte übrigens darauf, dass man auf diesem Wege zum Beweis der Existenz der Wurzeln höherer algebraischer Gleichungen gelangen zu können meinte. Man ging dabei von folgendem Gedankengang aus: mit demselben Recht, mit welchem man die gewöhnlichen imaginären Grössen, also Wurzeln quadratischer Gleichungen, der Rechnung unterziehe, könne man auch annehmen, dass durch Gleichungen höherer Grade imaginäre Grössen definirt würden, sodass es nur darauf ankomme, zu untersuchen, ob diese letzteren unter den ersteren bereits inbegriffen sind oder eine neue Grössengattung bilden. Diese Frage sei aber in ersterem Sinne entschieden, sobald es gelinge, die Bestimmung der quadratischen Divisoren eines vorgelegten Polynoms auf die Auflösung einer Reihe von Resolventengleichungen ungeraden Grades zurückzuführen, deren jede ja mindestens eine reelle Wurzel besitze. Den in diesen Versuchen liegenden Schlussfehler hat bekanntlich erst Gauss in seiner Dissertation aufgedeckt.[4])

2. Waring. In ausgedehnterem Masse erscheint die Anwendung combinatorischer Betrachtungen zur Bestimmung des Grades von Resolventen-

1) p. 487 der III. Aufl.

2) The elements of algebra by Nicholas Saunderson, 2 Bde., Cambridge 1740 (posthum); Bd. II, p. 737.

3) Memoire sur le calcul integral par le P. Thomas Le Seur. Rome 1748 (nicht 1758, wie zuweilen angegeben); p. 22. 23. Das Werkchen handelt von der Integration rationaler gebrochener Functionen durch Partialbruchzerlegung.

4) ges. W. Bd. III, p. 5. p. 14.

gleichungen zuerst bei Waring, und zwar an vielen zerstreuten Stellen im ersten Teil seiner „miscellanea analytica"[1]) und in den daraus erwachsenen „meditationes algebraicae".[2]) So wird z. B. nach den ersten einleitenden Sätzen sofort das Problem formulirt:[3]) „invenire aequationem, cujus radices sint quaecumque algebraica radicum datarum aequationum functio." Zur Lösung desselben werden zwei allgemeine Methoden angegeben und an Beispielen erläutert: die eine derselben beruht auf der Bildung symmetrischer Functionen, die andere auf einem Eliminationsverfahren. Hauptsächlich aber sind hierher gehörige Untersuchungen zusammengestellt im IV. Cap. der misc. anal., im III. der med. alg. unter der Überschrift: „de reductione et resolutione aequationum". Hier findet sich die mehrerwähnte Aufgabe der Divisoren m^{ten} Grades eines Polynoms vom n^{ten} Grade behandelt;[4]) als hinlänglicher Beweis dafür, dass die durch Permutation der Wurzeln der gegebenen Gleichung entstehenden Werte der Hilfsunbekannten alle derselben Hilfsgleichung genügen müssen, gilt auch Waring noch die einfache Wendung: „quot sunt combinationes m radicum in majore multitudine n radicum, tot erunt problematis solutiones et consequenter tot erunt radices aequationis reducentis". An der letztgenannten Stelle findet sich auch bereits die Bemerkung, dass nach Bestimmung eines Coefficienten des Divisors die übrigen durch blosse Division erhalten werden könnten, den Fall allein ausgenommen, dass die Gleichung für jenen ersten Coefficienten gleiche Wurzeln besitzt. Dabei wird auf eine spätere Stelle (p. 166) verwiesen, an welcher der allgemeine Satz ausgesprochen wird: „Sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben, so lassen sich beide durch dieselben Irrationalitäten ausdrücken, ausser wenn mehrere Werte der einen einander gleich sind; wenn aber 2, 3 .. Werte von x einem und demselben Wert von y entsprechen, so enthält die quadratische, cubische .. Gleichung, welcher diese Werte von x genügen, keine andern Irrationalitäten als diejenigen, welche in dem zugehörigen Werte von y auftreten". Erwähnenswert dürfte auch sein, dass Waring die sogenannte Tschirnhaustransformation kennt und den Grad der

---

1) Cantabrigiae 1762. Der zweite Teil dieses Werkes handelt von der Curventheorie; die proprietates algebraicarum curvarum (ib. 1772) stehen zu ihm in ähnlichem Verhältnis, wie die med. alg. zum ersten.

2) ib. 1770; die folgende Aufl. von 1782 ist als ed. III bezeichnet, indem die misc. anal. als erste Auflage mitgezählt sind. — Die meditationes analyticae Waring's (ib. 1775) sind ein ausführliches Lehrbuch der Fluxionen- und Fluentenrechnung.

3) misc. anal. p. 11; med. alg. p. 17 (der Aufl. von 1770).

4) misc. anal. p. 34., med. alg. p. 87.

Hilfsgleichung richtig angibt, deren Auflösung erforderlich sein würde, um aus der durch jene Transformation gelieferten Resolvente die mittleren Glieder wegzuschaffen;[1]) den Namen Tschirnhaus nennt er übrigens erst in der Vorrede zur Auflage von 1782, p. X. XXV.

Als Beispiele für seine allgemeinen Auseinandersetzungen dienen Waring hauptsächlich die verschiedenen bekannten Methoden zur Auflösung der Gleichungen 4. Grades; er zeigt u. a.,[2]) wie die Wurzeln der durch dieselben gelieferten cubischen Resolventen sich als dreiwertige Functionen:

$$x_1 x_2 + x_3 x_4, \quad (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2, \quad (x_1 x_2 - x_3 x_4)^2$$

der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der vorgelegten Gleichung ausdrücken. Auch stellt er sich die Aufgabe, specielle Gleichungen zu finden, deren Auflösung in vorgegebener Weise möglich ist; unter anderem Gleichungen m^{ten} Grades, deren Wurzeln die (damals mehrfach behandelte) Form haben:

$$x = \sqrt[m]{\alpha_1} + \sqrt[m]{\alpha_2} + \cdots + \sqrt[m]{\alpha_{m-1}}.$$

Dass übrigens schon bei den allgemeinen Gleichungen fünften Grades die Bestimmung der α von Gleichungen höheren Grades als die vorgelegte abhängt, ergab sich ihm[3]) aus seinen combinatorischen Principien ohne Schwierigkeit.

---

1) ein specieller Fall misc. anal. p. 39; der allgemeine med. alg. p. 101.

2) med. alg. p. 94.

3) med. alg. p. 120.

Obwol dem Gegenstand vorliegender Untersuchung fremd, seien noch eine Reihe bemerkenswerter Dinge erwähnt, von welchen wenig bekannt zu sein scheint, dass sie sich bei Waring finden. Die Vorreden beider Werke enthalten eine in jeder folgenden Auflage vollständigere Sammlung von Notizen über die frühere Geschichte der Algebra, die namentlich über das 17. Jahrhundert und die erste Hälfte des 18. einen ganz guten Überblick gewährt. An der Spitze des Textes stehen in beiden Werken die Formeln zur Berechnung der Wurzelsummen aus den Coefficienten; Erwähnung verdient dabei vielleicht der Terminus „exponentes litterarum" für das, was man jetzt: Gewichte der Coefficienten zu nennen pflegt. Daran schliesst sich die Berechnung der übrigen symmetrischen Functionen aus den Wurzelsummen; die unter Waring's Namen bekannte Methode zur Berechnung der symmetrischen Functionen direct aus den Coefficienten findet sich nur in dem späteren Werke (p. 11). Die misc. anal. enthalten auch (p. 16) die Methode zur angenäherten Berechnung der Wurzeln (unter Voraussetzung ihrer Realität), welche sonst wol unter dem Namen von Graeffe geht. Einen grossen Teil beider Werke füllen Untersuchungen über rationale Wurzeln von bestimmten sowol, als von unbestimmten Gleichungssystemen; im 5. Cap. der med. algebr. dehnen sich dieselben zu einer förmlichen Sammlung zahlentheoretischer Sätze aus (dort ist auch der „Wilson'sche" Satz nach einer Mitteilung Wilson's an Waring zuerst veröffentlicht (p. 218, vgl. auch p. VIII)). Für Waring — wie

3. Lagrange. In demselben Jahre, in welchem Waring's meditationes algebraicae zum ersten Male erschienen, legte Lagrange seine umfangreiche Abhandlung: „Reflexions sur la théorie algébrique des équations“[1]) der Berliner Akademie vor. Der Inhalt derselben ist weit mehr als der der andern hier zu besprechenden Werke in die Lehrbücher übergegangen; so enthält z. B. das verbreitete Handbuch von Serret (art. 498—521) ausführliche Auszüge aus derselben. Es wird deshalb gestattet sein, sich hier auf eine ganz kurze Übersicht zu beschränken und nur die auf das allmähliche Emporkeimen der gruppentheoretischen Betrachtungsweise charakteristischen Stellen hervorzuheben.

Als Zweck der Arbeit gibt Lagrange in der Einleitung an: „die verschiedenen bis zu seiner Zeit für die algebraische Auflösung der Gleichungen gegebenen Methoden zu prüfen, sie auf allgemeine Principien zurückzuführen und a priori zu zeigen, warum sie bei den Gleichungen dritten und vierten Grades zum Ziel führen, bei höheren Graden aber versagen.“

Im ersten Abschnitt wird von den verschiedenen zur Lösung der cubischen Gleichungen vorgeschlagenen Methoden gezeigt, dass sie alle auf Lösung einer Hilfsgleichung zweiten Grades hinauslaufen, deren Wurzeln sich durch die Wurzeln x', x'', x''' der vorgelegten Gleichung und die complexe dritte Einheitswurzel α in der Form:

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$$

oder als lineare Functionen eines solchen Ausdrucks darstellen lassen; die charakteristische Eigenschaft dieses Ausdrucks ist, dass er bei allen Permutationen der Wurzeln x', x'', x''' nur zwei verschiedene Werte anzunehmen im Stande ist. Der Abschnitt schliesst mit der Entwicklung einiger Sätze über Einheitswurzeln, welche aus der trigonometrischen Darstellung derselben gewonnen werden.

Im zweiten Abschnitt werden ebenso die Methoden zur Lösung der biquadratischen Gleichungen besprochen und gezeigt, dass dieselben sämtlich

auch für manche andere seiner Zeitgenossen — hatten diese Fragen auch ein grosses algebraisches Interesse, indem er sich (vgl. misc. anal. p. 48; med. algebr. p. 121) folgende Möglichkeit dachte, zur Lösung der allgemeinen Gleichungen höherer Grade zu gelangen: Man solle zunächst eine Resolvente annehmen mit einer grösseren Anzahl von Unbekannten, als Bedingungen zu befriedigen seien. Geeignete Eliminationen würden dann zu einer Gleichung mit mehreren Unbekannten führen. Gelänge es, rationale Werte der letzteren zu finden, welche diese Gleichung befriedigen, so könne man von ihnen aus zur Lösung der gegebenen Gleichung gelangen.

1) Nouveaux mémoires de l'académie de Berlin pour les années 1770. 1771 (Berl. 1772. 73). — Oeuvres de L., éd. Serret t. III.

auf der Benutzung von Hilfsgleichungen beruhen, deren Wurzeln dreiwertige Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind, wie z. B.

$$x' x'' + x''' x^{IV}, \quad (x' + x'' - x''' - x^{IV})^2,$$
$$(x' + x'' \sqrt{-1} - x''' - x^{IV} \sqrt{-1}) (x' - x'' \sqrt{-1} + x''' - x^{IV} \sqrt{-1}).$$

Von einer etwas weniger übersichtlichen Function dieser Art wird diese Eigenschaft (die Dreiwertigkeit) folgendermassen bewiesen (art. 43): Sie bleibt unverändert, wenn x' mit x'' vertauscht wird, also hat sie nicht 24 verschiedene Werte, sondern höchstens 12. Sie bleibt auch unverändert, wenn x''' mit x^{IV} vertauscht wird, also reduciren sich die 12 Werte auf 6. Sie bleibt endlich auch unverändert, wenn x' mit x''' und gleichzeitig x'' mit x^{IV} vertauscht wird, also reduciren sich die 6 Werte auf 3 „da auch diese Vertauschung von den vorigen unabhängig ist.“ Ausserdem bleibt sie noch unverändert bei gleichzeitiger Vertauschung von x' mit x^{IV} und von x'' mit x'''; „aber diese“, heisst es weiter, „kann nicht in Betracht kommen, da sie in den vorigen schon inbegriffen ist.“

Der dritte Abschnitt wendet sich zu analogen Untersuchungen für Gleichungen höherer Grade. Gerade von diesem Abschnitt gibt Serret Gedankengang und Resultate ziemlich vollständig wieder; jedoch ist wol zu beachten, dass er die Form der Darstellung insofern wesentlich modernisirt hat, als er sich symbolischer Bezeichnung der Substitutionen bedient, überhaupt sich auf eine vorhergehende systematische Behandlung der Substitutionentheorie stützt, von welcher Lagrange noch weit entfernt ist. Der Abschnitt schliesst mit einigen Auseinandersetzungen darüber, ob Aussicht vorhanden sei, auf dem eingeschlagenen Wege zu Hülfsgleichungen von niedrigerem Grade als die bis dahin erhaltenen zu gelangen. Lagrange glaubt schon bei Gleichungen sechsten Grades auf diese Hoffnung verzichten zu müssen, indem er bemerkt, dass es nicht gelinge, die 10 Werte des Ausdrucks:

$$(x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6)^2$$

so in zwei Reihen zu je fünfen zu spalten, dass das Produkt aus den Summen der fünf Werte jeder Reihe symmetrisch werde (art. 85).

Der vierte Abschnitt bringt die nachträgliche Begründung der im vorhergehenden bereits überall benutzten Sätze über den Grad von Resolventen. Ein eigentümliches Eliminationsverfahren, an den einfachsten Beispielen in inductiver Weise auseinandergesetzt, führt zur Erkenntnis des fundamentalen Satzes, dass der Grad einer Resolvente übereinstimmt mit der Anzahl m der verschiedenen Werte, welche ihre Wurzel bei sämtlichen Vertauschungen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung annimmt; der Satz,

dass alle symmetrischen Functionen der Wurzeln sich rational durch die Coefficienten ausdrücken lassen, wird nicht beim Beweise vorausgesetzt, sondern erst nachher als Specialfall des allgemeinen Satzes (für $m = 1$) erhalten. Von der Irreducibilität der erhaltenen Gleichungen ist dabei übrigens überhaupt nicht die Rede — eine bemerkenswerte Lücke nicht sowol für Lagrange's eigene Entwicklungen, für welche dieser Punkt nebensächlich ist, als für die darauf gebauten Folgerungen späterer. Weiterhin wird auch bereits der allgemeine Satz ausgesprochen, dass die Anzahl der verschiedenen Werte einer rationalen Function von μ Grössen stets ein Teiler von $\mu!$ ist; der Beweis wird übrigens nur für zweiwertige Functionen explicite durchgeführt, während für alle andern Fälle die Bemerkung genügen muss, dass man in ihnen ebenso schliessen könne. Es folgt dann noch der bekannte Beweis des Lehrsatzes, dass durch eine rationale Function der Wurzeln x einer Gleichung jede andere solche Function y sich rational ausdrücken lässt, welche bei allen den Permutationen der x ungeändert bleibt, die den Wert von t nicht ändern; dass aber y von einer Gleichung m^{ten} Grades mit in t rationalen Coefficienten abhängt, wenn zu einem Werte von t m Werte von y gehören.[1]) Als Beispiele werden wieder die zweiwertigen Functionen von drei und die dreiwertigen von vier Grössen behandelt.

Die Resultate seiner Untersuchung fasst Lagrange (art. 109) folgendermassen zusammen:

„Täusche ich mich nicht, so sind im vorhergehenden die wahren Principien der Auflösung der Gleichungen und das geeignetste analytische Verfahren, um zu ihr zu gelangen, enthalten. Wie man sieht, reducirt sich alles auf eine Art von Combinationsrechnung, durch die man a priori die Resultate erkennen kann, welche man zu erwarten hat. Es würde am Platze sein, die Anwendung auf Gleichungen fünften und höheren Grades vorzunehmen, deren Auflösung bis jetzt nicht bekannt ist; aber diese Anwendung verlangt eine zu grosse Anzahl von Untersuchungen und Combinationen, als dass wir uns jetzt dieser Arbeit unterziehen könnten. Wir hoffen jedoch zu anderer Zeit darauf zurückkommen zu können und wollen uns hier damit begnügen, die Grundlagen einer Theorie gelegt zu haben, die uns neu und allgemein scheint."

Anhangsweise folgen einige Bemerkungen über Gleichungen, zwischen deren Wurzeln eine bekannte Beziehung besteht; es wird auseinandergesetzt

---

1) Über die Art, wie Lagrange die bei diesem Satze auftretenden Ausnahmefälle numerischer Gleichheit der Werte formell verschiedener Functionen behandelt, vgl. man Hölder, Math. Ann. Bd. 34, p. 454 ff. (1889).

und an einigen Beispielen erläutert, in wie fern die Kenntnis einer solchen Beziehung auf Grund der entwickelten Principien zur Reduction der vorgelegten Gleichung führen kann. Übrigens macht dieser Anhang keinen Anspruch darauf, eine vollständige Theorie solcher speciellen Gleichungen darzustellen.

Der 2. Auflage seines „traité sur la résolution des équations numériques" (Paris 1808; oeuvres éd. Serret t. VIII) hat Lagrange als „note XIII" einen Auszug aus den drei ersten Abschnitten der vorbesprochenen Abhandlung beigefügt, der nur in der Theorie der Einheitswurzeln unter dem Einfluss der inzwischen erschienenen disquisitiones arithmeticae von Gauss einige Vereinfachungen, im übrigen aber keinen Fortschritt über die ausführlichere Darstellung hinaus aufweist. Zum Schlusse erwähnt Lagrange noch die sogleich zu besprechende Abhandlung von Vandermonde; er findet, dass dessen Methode aus einem in der Natur der Gleichungen gegründeten Princip entspringe und in dieser Beziehung direkter als seine eigene sei.

4. Vandermonde. Ebenfalls dem Jahre 1770 gehört eine dritte bedeutende algebraische Arbeit an, das „mémoire sur la résolution des équations" von Vandermonde.[1]) Über seine Absicht bei Verfassung desselben gibt Vandermonde in der Einleitung folgende Auskunft:

„... Es scheint mir, als könnte ein Teil der Schwierigkeiten der Natur der analytischen Methoden zugeschrieben werden, die man bisher allgemein benutzt hat; ich habe mich entschlossen einen andern Weg einzuschlagen. Meine Methode verlangt die Einführung keiner einzigen Unbekannten; bei jedem Schritt der Rechnung hat man es nur mit Gleichungen zu thun, die durch Ausführung der angedeuteten Operationen leicht verificirt werden können. ... Die Gleichung:

$$x^2 - (a + b)\,x + ab = 0$$

kann auf zwei Arten betrachtet werden: entweder als Gleichung zweiten Grades, dann stellt die Unbekannte eine zweideutige Function dar; oder als Produkt zweier Factoren ersten Grades; dann ist die Gleichung zweideutig und die Unbekannte hat zwei Werte, die es nicht sind.[2]) Handelt es sich nur um die Auflösung der Gleichungen, so müsste man die letztere

---

1) Histoire de l'académie des sciences, année 1771 (Paris 1774.) p. 365ff. Wie eine Note besagt, war die Abhandlung bereits Nov. 1770 gelesen, konnte aber nicht in den Band für 1770 aufgenommen werden, weil Vandermonde damals noch nicht Academiemitglied war; die meditationes algebraicae Waring's und die reflexions Lagrange's lernte Vandermonde in der Zwischenzeit kennen.

2) Die Unbestimmtheit dieser Auseinandersetzungen beruht in letzter Instanz darauf, dass sowol der Begriff der monogenen Function, als der des Rationalitätsbereichs fehlt.

Auffassung vorziehen; verlangt man aber die Zusammensetzung der Wurzel aus $a + b$ und ab, so wird diese Wurzel notwendig zweiwertig sein müssen; denn ... die beiden Bedingungen:

$$a = \text{funct.}\ [(a + b),\ ab]$$

und:

$$b = \text{funct.}\ [(a + b),\ ab]$$

können nur zusammen bestehen, wenn die Function eine zweideutige ist. Eine solche Function ist z. B.:

$$\frac{1}{2}\left(a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}\right) \ldots\text{"}$$

Analog wird weiterhin für die Wurzel der cubischen Gleichung, unter r', r'' die beiden complexen dritten Einheitswurzeln verstanden, der Ausdruck aufgestellt:

$$\frac{1}{3}\left(a + b + c + \sqrt[3]{(a + r'b + r''c)^3} + \sqrt[3]{(a + r''b + r'c)^3}\right);$$

und es wird dann gezeigt, dass sich $(a + r'b + r''c)^3$ und $(a + r''b + r'c)^3$ rational durch $a + b + c$, $ab + ac + bc$ und abc ausdrücken lassen, bis auf ein Glied:

$$\pm (a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2),$$

dessen Quadrat erst diese Eigenschaft hat.[1])

Durch solche Überlegungen gelangt Vandermonde dazu, das allgemeine Problem der Gleichungsauflösung in folgender Weise zu formuliren:

erstens sei eine Function der Wurzeln zu finden, von der man sagen könne, dass sie jeder beliebigen der Wurzeln in einem gewissen Sinne gleich ist;

zweitens sei diese Function auf eine solche Form zu bringen, dass es gleichgiltig ist, wie man die Wurzeln unter einander vertauscht;

drittens seien in dieselbe die Summe der Wurzeln, die Summe ihrer Produkte zu je zweien u. s. w. einzuführen.

Vandermonde beginnt mit dem dritten Teil dieses Programms, indem er die erforderlichen Formeln ableitet, welche der Theorie der symmetrischen Functionen angehören. Dann schaltet er eine Theorie der Einheitswurzeln ein; dieselbe enthält bereits (art. 6) ohne Beweis die Behauptung, die Gleichung m^{ten} Grades, von welcher die Bestimmung der $(2m + 1)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln abhängt, sei „immer leicht zu lösen".[2])

1) Man sieht, dass Vandermonde unter einer „synthetischen" Methode eine solche versteht, welche von einer vorausgesetzten Form der Wurzeln ausgeht und die Gleichungen aufsucht, welchen Wurzeln von dieser Form Genüge leisten.

2) Die expliciten Ausdrücke der elften Einheitswurzeln sind art. 35 mitgeteilt, ohne Angabe ihrer Ableitung.

Hierauf wendet sich Vandermonde (art. 15 ff.) zu dem ersten Teil seiner Problemstellung. Er bildet aus nebeneinander gestellten Quadrat- und Kubikwurzeln eine Reihe von sechs-, acht-, neunwertigen Ausdrücken, findet aber, dass keiner derselben geeignet sei, die Wurzel einer allgemeinen Gleichung des entsprechenden Grades vorzustellen. Für weitergehende Versuche fühlt er das Bedürfnis nach einer abkürzenden Bezeichnung derjenigen Permutationen der Wurzeln, bei welchen die zu betrachtenden Functionen derselben ihren Wert nicht ändern; doch ist die von ihm gewählte (art. 24), wenn man von den einfachsten Fällen absieht, so schleppend, dass sie ihm wenig Vorteil zu gewähren im Stande ist. Gleichwol gelingt es ihm mit ihrer Hilfe, nicht allein die Behandlung der Gleichungen dritten und vierten Grades zu erledigen, sondern auch die Existenz der Resolventen sechsten Grades für die Gleichungen fünften, dann der Resolventen zehnten und fünfzehnten für die Gleichungen sechsten Grades darzuthun, sowie den Zusammenhang dieser letzteren mit der Zerlegung des Polynoms sechsten Grades in cubische, bezw. quadratische Factoren nachzuweisen. Nachdem er dann noch Resolventen von diesen Resolventen gebildet und sich überzeugt hat, dass auch diese ihn nicht weiter führen, bricht er ab (art. 34) mit der Erklärung: er habe vielfach vergeblich versucht, drei- oder vierwertige Functionen von fünf Grössen zu bilden, und er sei daher zu der Überzeugung gekommen, dass es keine solchen Functionen gebe. —

Nicht uninteressant sind die Bemerkungen, mit welchen der Secretär der Academie sein Referat über Vandermonde's Arbeit im Jahresbericht derselben (p. 49) begleitet. Er vergleicht sie mit Lagrange's reflexions und meint, dieser sei überzeugt, dass man einen andern Weg werde einschlagen müssen, um zur Auflösung der Gleichungen höherer Grade zu gelangen, während Vandermonde zu glauben scheine, wenn die Lösung überhaupt möglich sei, müsse sie auf diesem Wege gelingen; er für seine Person neige der letzteren Ansicht zu. Ob er damit die wahre Meinung beider Autoren richtig erkannt hat, steht dahin, da beide es vermieden haben, sich über diesen Punkt unumwunden auszusprechen.

5. Rückblick. Das Jahr 1770, in welchem kurz nach einander die die drei zuletzt besprochenen grossen Arbeiten: Waring's meditationes, Lagrange's reflexions und Vandermonde's mémoire ans Licht traten, bezeichnet in der Geschichte der Algebra den Abschluss einer gewissen Entwicklungsperiode: wie sich auch äusserlich dadurch kundgibt, dass nach ihrem Erscheinen die in ihnen erörterten Fragen fast ein Menschenalter hindurch ruhten. Es wird im Interesse der Übersicht zweckmässig sein, in wenigen Sätzen zu schildern, auf welchen Standpunkt die Lehre von der allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen höherer Grade

durch jene Arbeiten gebracht war. Man wusste aus denselben, dass alle bekannten Methoden zur Auflösung der Gleichungen 2. 3. 4. Grades trotz ihrer äusseren Verschiedenheit in einem Punkte übereinkommen: dass sie nämlich alle zunächst solche rationale Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung bestimmen, welche nur eine kleine Anzahl verschiedener Werte annehmen, wenn man jene Wurzeln auf alle möglichen Arten unter sich vertauscht; dass dann mit deren Hilfe weitere Functionen derselben Art bestimmt werden, welche in diesem Sinne einer grösseren Wertezahl fähig sind u. s. f.; dass aber dieser ganze Process innerhalb des Bereiches der rationalen Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sich abspielt. Man war aber darüber ganz im Unklaren, ob diese Eigenschaft der bekannten Auflösungsmethoden in der Natur des Problems begründet oder nur Ergebnis einer von Zufälligkeiten beeinflussten historischen Entwicklung sei. Man hatte ferner den Zusammenhang erkannt — oder vielmehr wol vielfach als selbstverständlich betrachtet —, welcher zwischen der Anzahl der verschiedenen Werte einer Function der erwähnten Art und dem Grad der Hilfsgleichung besteht, aus welcher sie zu berechnen ist; und man wusste auch, dass verschiedene Functionen, welche bei denselben Vertauschungen der Wurzeln ihren Wert ändern oder nicht ändern, zu dem erstrebten Zwecke gleich tauglich seien, abgesehen natürlich von grösserem oder geringerem Umfang der Rechenarbeit. Aber die Schlüsse, durch welche man die Richtigkeit dieser Erkenntnis darzuthun suchte, genügten vielfach dem Strengebedürfnis eben nur der damaligen Zeit, welche vom Satz des zureichenden Grundes sehr subjective Anwendungen zu machen sich berechtigt hielt. Man war überzeugt, dass es zu weiterem Vordringen auf diesem Gebiet erforderlich sei, die Mannigfaltigkeit der verschiedenen möglichen Vertauschungen der Wurzeln einer planmässigen Untersuchung zu unterziehen; aber es fehlte an einem leitenden Gesichtspunkt, dessen Verfolgung eine solche Untersuchung vor dem Verlorengehen in zahllose Einzelheiten hätte bewahren können. Man war endlich durch die Fruchtlosigkeit zahlreicher Versuche, die Gleichungen höherer Grade durch Wurzelziehen aufzulösen, zu der Vermutung geführt worden, dass solche Auflösung überhaupt nicht möglich sein werde; aber man besass kein Mittel, diese Unmöglichkeit zu beweisen. —

Wenn in späteren Zeiten die Tradition von diesen Erfolgen und Misserfolgen wesentlich an Lagrange's grosse Abhandlung anknüpft, so verdankt sie das wol vor allem ihren formalen Vorzügen: der Ausführlichkeit und Bestimmtheit in der Angabe der leitenden Ideen, der Übersichtlichkeit der Anordnung, der Durchsichtigkeit und — am Massstabe der Zeit gemessen — Strenge der Beweisführung. Sieht man nur auf den Inhalt, so

wird man Waring und Vandermonde das Zeugnis nicht versagen dürfen, dass auch sie unabhängig von Lagrange und gleichzeitig mit ihm einen grossen Teil seiner Resultate erhalten haben.

6. Ruffini; äussere Verhältnisse. Auf dem im vorigen Abschnitt geschilderten Stande blieb die Frage nach der Auflösung der höheren algebraischen Gleichungen während der letzten drei Decennien des achtzehnten Jahrhunderts stehen; selbst die bereits erhaltenen Resultate fanden nur langsam Eingang in die Lehrbücher.[1]) Ein weiterer Schritt vorwärts geschah erst durch Paolo Ruffini (geb. 1765, gest. 1822).[2]) Von den äusseren Schicksalen dieses merkwürdigen Mannes, dessen Leistungen, schon von seinen Zeitgenossen kaum gekannt, bei der Nachwelt noch mehr in Vergessenheit geriethen, sei nur in Kürze folgendes berichtet: Von Beruf eigentlich Arzt — wie einst Cardanus — trieb er nebenbei mathematische Studien, die ihm Lehrstellen an verschiedenen Schulen, zuletzt an der Universität Modena verschafften. Doch blieb er in diesen nicht unangefochten von Seiten einer oder der andern der rasch wechselnden Regierungen jener Zeit, da er in politischen und namentlich in kirchlichen Dingen am Überlieferten festhielt. Übrigens wusste er diese seine Überzeugung mit einem lebhaften italienischen Nationalgefühl zu vereinigen: Lagrange nennt er mit Stolz seinen Landsmann. Seine medicinischen Schriften werden wenig gerühmt, mehr seine unerschrockene Thätigkeit gegenüber den Epidemien, welche im Gefolge der kriegerischen Ereignisse jener Zeit auftraten. Auch als religiöser und philosophischer Schriftsteller hat er sich versucht. Uns gehen hier nur seine algebraischen Arbeiten an und auch von ihnen nur diejenigen, welche mit der Frage nach der allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen von höherem als dem vierten Grade durch Wurzelziehen zu thun haben. Es hat nämlich Ruffini die Unmöglichkeit solcher Auflösung zuerst bestimmt behauptet und zu beweisen versucht; und zwar hat er nicht weniger als sechs verschiedene Redactionen seines Beweises veröffentlicht. Diese sollen im folgenden der Reihe nach samt den sich

---

1) Die Elementi d'algebra von Pietro Paoli (Pisa 1794) enthalten t. I. p. 119 wenigstens ein Citat auf Lagrange; die 5. Ausgabe der Elémens d'Algebre von Clairaut (Paris 1797) in den Zusätzen des Herausgebers (L. C.) Auszüge aus Lagrange.

2) Eine ausführliche Biographie, in der jedoch das mathematische Interesse sehr zurücktritt, findet sich in den memorie della società italiana delle scienze t. 19. p. LXXXV—CX (1826), eine andere in: Biografia degli Italiani illustri, pubbl. per cura d' E. de Tipaldo, vol. 4 (Venezia 1837) p. 225—239. Kürzere Nachrichten bieten: Biographie universelle t. 39 (Paris 1825) p. 274; nouvelle biographie générale t. 42 (Paris 1863) col. 866, sowie Lombardi, storia della litteratura italiana.

an sie anschliessenden Schriften besprochen werden; sie verdienen in der That sämtlich Berücksichtigung, wenn man von Ruffini's Leistungen auf diesem Gebiete ein Bild gewinnen will.

7. Ruffini's Lehrbuch von 1799. Ruffini's erste Veröffentlichung auf algebraischem Gebiete ist ein zweibändiges Lehrbuch der Algebra, das unter dem Titel:

Teoria generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grade superiore al quarto

1799 zu Bologna erschienen ist. Nach Ableitung der allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen und Discussion der Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten, vierten Grades beginnt Ruffini seinen Unauflösbarkeitsbeweis im 13. Cap. dieses Werkes mit einer Classification der verschiedenen „Permutationen." Zum Verständnis dieser Classification ist vorab zu bemerken, dass er die sämtlichen Vertauschungen der Wurzeln, bei welchen eine Function derselben ihren Wert nicht ändert, als eine einzige Permutation bezeichnet; er versteht also unter einer „Permutation" dasselbe, was man seit Cauchy als ein „System conjugirter Substitutionen" und seit Galois als eine „Substitutionsgruppe" zu benennen pflegt. Charakterisirt ist eine solche Gruppe bekanntlich dadurch, dass jede Operation zu ihr gehört, welche darin besteht, dass man zwei ihrer Operationen nach einander vornimmt; dass diese Eigenschaft seinen „Permutationen" zukommt,[1]) ist Ruffini sehr wol bekannt und vielfach von ihm benutzt. Als „einfache Permutationen" bezeichnet er Gruppen, welche (nach jetziger Ausdrucksweise) aus den Potenzen einer einzigen Substitution bestehen; er unterscheidet deren zwei Arten, je nachdem letztere einen oder mehrere Cykeln enthält. Die übrigen Gruppen nennt er „zusammengesetzte Permutationen", und zwar der ersten, zweiten oder dritten Art, je nachdem sie intransitiv, transitiv und imprimitiv oder transitiv und primitiv sind. Bei Bestimmung der Transitivität berücksichtigt er übrigens nur diejenigen Wurzeln, welche in der gerade zu untersuchenden Function wirklich auftreten: eine unzweckmässige Festsetzung, welche ihn öfters zu weitschweifigen Fallunterscheidungen nötigt. Auch noch in einem andern Punkte weicht seine Ausdrucksweise von der jetzt üblichen ab: wo von den verschiedenen Werten derselben Function die Rede ist, sagt er stets: alle diese bleiben bei derselben Permutation ungeändert — während

---

1) Der Fall, dass zwischen „formell" verschiedenen Functionswerten „numerische" Gleichheit bestehen kann, wird an dieser Stelle von Ruffini noch nicht berücksichtigt; vgl. aber p. 138.

wir jetzt von „durch Transformation aus einander hervorgehenden" Gruppen sprechen. Dieser an und für sich gleichgiltige Umstand ist insofern nicht ohne Einfluss, als er Ruffini den Weg zum Begriff der „ausgezeichneten" Untergruppe versperrt. Übrigens sind seine Definitionen der verschiedenen erwähnten Arten von Permutationen zwar an und für sich betrachtet nicht eben klar; doch geht ihr Sinn aus den folgenden Beispielen und Anwendungen so unzweifelhaft hervor, dass man sicher sein kann, hier nicht spätere Ideen in ihn hineingedeutet zu haben. (Im folgenden soll im Allgemeinen die jetzt übliche Terminologie, nicht die Ruffini's gebraucht werden.)

Die Anzahl der verschiedenen Vertauschungen der Wurzeln, bei welchen eine gegebene Function derselben ihren Wert nicht ändert, nennt Ruffini den „Gleichheitsgrad" (grado di uguaglianza) dieser Function; dieser Begriff entspricht also unserem „Ordnung der zugehörigen Gruppe".[1]) Diese Zahl p bestimmt er nun für sämtliche bei fünf Elementen möglichen Gruppen. Für eine „einfache Permutation I. Art" ist sie — das zeigt er allgemein — gleich der Anzahl der durch sie versetzten Elemente; für eine „einfache Permutation II. Art" gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der betreffenden Anzahlen für die einzelnen „Componenten"; für eine „zusammengesetzte Permutation I. Art" gleich dem Produkt dieser Anzahlen.[2]) An „zusammengesetzten Permutationen II. Art" kennt Ruffini bei fünf Elementen nur eine Art, für welche $p = 8$ ist; die andere mit $p = 4$ (Vierergruppen) scheint er entweder übersehen oder als in der vorigen enthalten nicht besonders behandelt zu haben. Hierauf geht er über zur Discussion aller derjenigen „Permutationen III. Art", deren eine Componente eine cyclische Vertauschung aller fünf Grössen ist; er findet, dass dabei keine andern Werte von p als 10, 20, 60 oder 120 auftreten.[3]) Indem er dann noch allgemein den Satz ableitet, dass für eine Gruppe, welche keine solche cyclische Vertauschung aller fünf Grössen enthält, p niemals ein Vielfaches von 5 sein kann, erhält er als Hauptresultat seiner Untersuchung die Thatsache, dass p niemals gleich 15, 30 oder 40 wird, m. a. W. dass es keine Functionen von fünf Grössen gibt, welche gerade acht, vier oder drei verschiedene Werte annehmen, wenn

---

1) Dass diese Zahl stets ein Teiler von m' ist, behauptet Ruffini nach Lagrange, ohne es zu beweisen.

2) Die Componenten werden hier stillschweigend als „einfach" vorausgesetzt, was für $m = 5$, von einem trivialen Falle abgesehen, in der That gestattet ist.

3) Hier ist die Aufzählung aller möglichen Fälle insofern nicht vollständig, als die aus (12345) und (132) entstehende Gruppe fehlt; doch hat dieses Versehen auf das Resultat keinen Einfluss.

man diese Grössen auf alle möglichen Arten unter einander vertauscht (art. 275). Ausserdem enthält dieser Abschnitt (art. 273) noch einen anderen (ebenfalls durch Discussion aller Einzelfälle bewiesenen) allgemeinen Satz, den man jetzt etwa so aussprechen würde: Enthält eine Gruppe alle diejenigen Substitutionen, welche durch Transformation vermittelst einer bestimmten cyclischen Permutation von fünf Elementen aus einer ihrer Substitutionen hervorgehen, so enthält sie auch diese cyclische Substitution selbst.

Nunmehr geht Ruffini dazu über, die gefundenen gruppentheoretischen Resultate auf das Problem der Gleichungsauflösung anzuwenden. Er beginnt dabei mit dem Satze (art. 277): Besteht zwischen zwei rationalen Functionen M, Z der Wurzeln einer (allgemeinen) Gleichung fünften Grades eine Relation der Form:

$$Z^5 - M = 0,$$

so müssen alle 120 Werte von Z von einander verschieden sein. Stillschweigend ist dabei vorausgesetzt, dass Z bei irgend einer Vertauschung Q der Wurzeln sich ändern soll, bei welcher M ungeändert bleibt. Zum Beweis dient der letzterwähnte Hilfssatz (von art. 273): Es muss nämlich Q eine cyclische Vertauschung aller fünf Wurzeln sein. Würde nun Z bei irgend einer Operation P seinen Wert nicht ändern, so würde es ihn auch nicht ändern bei $Q^{-1}PQ$, also nach jenem Satze auch nicht bei Q selbst, der Voraussetzung zuwider. Daraus folgt zunächst, dass die Auflösung der Gleichung nicht mit der Ausziehung einer fünften Wurzel beginnen kann; sie kann aber auch nicht mit der einer dritten oder vierten Wurzel beginnen, weil keine drei- oder vierwertigen Functionen der Wurzeln existiren; also müsste der erste Schritt die Ausziehung einer Quadratwurzel sein (art. 280). Nachdem aber diese vollzogen ist, kann eine fünfte Wurzel immer noch so wenig wie vorhin ausgezogen werden; ferner keine zweite oder vierte Wurzel, da keine vier- oder achtwertigen Functionen der Wurzeln existiren; endlich auch keine dritte Wurzel; denn es existiren zwar sechswertige Functionen, dieselben werden aber nicht nach Adjunction der ersten Quadratwurzel dreiwertig (wie wieder durch Aufzählung der einzelnen Fälle gezeigt wird). Da nun andere Wurzelexponenten als 2, 3, 4, 5 nicht in Betracht kommen können, so ist dargethan, dass man durch Radiciren niemals zu Functionen der Wurzeln der allgemeinen Gleichung fünften Grades gelangen kann, welche mehr als zwei Werte besitzen, also auch nicht zu den Werten dieser Wurzeln selbst. —

Dieser Beweis unterliegt nun allerdings einer Reihe von Bedenken. Einmal wird fortwährend mit den Wurzeln der Gleichung operirt, ohne

dass ihre Existenz bewiesen würde.[1]) Zweitens sind die häufig vorkommenden Aufzählungen einer Reihe von denkbaren Fällen stellenweise lückenhaft. Drittens bedurften die Lagrange'schen Sätze, auf welchen die ganze Entwicklung beruht, damals zum Teile noch des Beweises; namentlich haben weder Lagrange selbst, noch Ruffini den Beweis dafür durchgeführt, dass die Anzahl der Werte einer Function von n Grössen stets ein Teiler von n' ist. Viertens ist ohne Beweis behauptet (art. 274: dedurremo non difficilmente), dass eine Gruppe, deren Ordnung ein Vielfaches von fünf ist, stets cyclische Permutationen aller fünf Wurzeln enthalten müsse; doch hat Ruffini sich diesen Beweis vielleicht durch vollständige Discussion aller Einzelfälle erbracht gedacht. Endlich — und das ist der schwerwiegendste Einwand — bleibt unklar, ob nur von rationalen Functionen der Wurzeln die Rede sein soll oder auch von irrationalen, sogenannten „accessorischen Irrationalitäten"; im ersten Fall bedürfte diese Beschränkung einer Rechtfertigung, im andern würde ein beträchtlicher Teil der gezogenen Schlüsse nicht zutreffen.

Ruffini beweist dann noch auf Grund derselben Principien die algebraische Unauflösbarkeit[2]) der Gleichungen sechsten und höheren Grades. Hierauf wendet er sich (capp. 15. 16) zu Untersuchungen über solche specielle Gleichungen, bei welchen eine aus der Form der Gleichung ersichtliche oder sonst irgendwoher bekannte Relation zwischen den Wurzeln zur Auflösung führt. Bemerkenswert ist dabei höchstens das art. 346 f. für den Fall gelehrte Verfahren, dass die bekannte Relation irrationale Functionen der Wurzeln enthält. Ruffini schreibt nämlich vor, die Relation von dieser irrationalen Form zu befreien und mit der so erhaltenen rationalen Relation weiter zu operiren; ob man nicht mit der gegebenen irrationalen Form unter Umständen mehr erreichen könne, darüber spricht er sich nicht aus.

Nachdem er hierauf ausführlich von Näherungsmethoden, Reihenentwicklungen, Kettenbrüchen u. dgl. gehandelt hat, kommt er am Schluss des ganzen Werkes art. 496 ff. noch einmal auf seinen Unauflösbarkeitsbeweis zurück, indem er sich folgenden Einwand macht: wenn auch die allgemeine algebraische Lösung der höheren Gleichungen nicht möglich sei, müssten doch bei jeder besonderen Gleichung Relationen zwischen den Wurzeln bestehen, welche man (wie vorher gezeigt) zur Lösung verwerten

---

1) art. 15. 20 scheint dieselbe als Axiom behandelt zu werden.

2) Dass unter einer „algebraischen" Auflösung in jener Zeit immer eine solche „durch Wurzelziehen" zu verstehen, sei hier ein für alle mal betont.

könne. Er erwidert darauf zweierlei: einmal selbst wenn dies der Fall sein sollte, würde es doch der Richtigkeit des Satzes von der Unmöglichkeit der allgemeinen algebraischen Auflösung keinen Eintrag thun; dann aber, keineswegs jede Relation zwischen den Wurzeln führe wirklich eine Reduction herbei. Ob nicht etwa bei jeder Gleichung mit rationalen Zahlencoefficienten (nur an solche denkt er zunächst) eine zur Reduction dienliche Relation besteht, diese Frage lässt er unerörtert.

8. Ruffini's Abhandlung von 1801. Bald nach dem Erscheinen der teoria generale delle equazioni veröffentlichte Ruffini in den memorie della società italiana delle scienze (t. 9, p. 444—526, Modena 1802; datirt vom 21. Oct. 1801) die Abhandlung: della soluzione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto. Gegenstand derselben ist die Untersuchung der Frage, wann die algebraische Auflösung einer Gleichung geschehen könne durch Lösung von Gleichungen niedrigerer Grade. Es bleiben also alle diejenigen algebraisch auflösbaren Gleichungen ausgeschlossen, in deren Lösung ein dem Grade der Gleichung gleicher Wurzelexponent vorkommt. Dies hat Ruffini damals übersehen, sein Versehen aber in einer Anmerkung zu seiner nächsten Abhandlung (t. 10, p. 434) richtig gestellt.

Im ersten Teil der Abhandlung werden zunächst die Gleichungen (nur von solchen mit rationalen Zahlencoefficienten ist die Rede) eingeteilt in einfache (d. i. irreducible) und zusammengesetzte (reducible); die letzteren werden ausgeschlossen. Es folgt dann eine Reihe von Erörterungen über die Ableitung einer Function der Wurzeln aus einer andern. Die Übersichtlichkeit derselben leidet sehr darunter, dass Ruffini auch hier zunächst immer nur die Permutationen der in der Function wirklich auftretenden Wurzeln in Betracht zieht. Hierauf wendet sich Ruffini zu den Modificationen, welche die allgemeinen Sätze der Gleichungstheorie erleiden, wenn zwischen den Wurzeln eine bekannte Relation besteht, m. a. W. wenn der Wert einer bestimmten Function derselben als bekannt angesehen wird; dabei knüpft er an die oben (nr. 7 a. E.) besprochenen Schlussabschnitte seiner „teoria" an, indem er eine Reihe von Fällen aufführt (art. 13 ff.), in welchen die Kenntnis einer solchen Relation nicht zu einer Reduction der vorgelegten Gleichung führt. Am Schlusse dieses Teils (art. 16 ff.) wendet sich Ruffini zu einer nicht uninteressanten Untersuchung der folgenden Frage: Es kann vorkommen, dass die bekannte Function t der Wurzeln bei gewissen Permutationen derselben zwar ihre Form, aber wegen der speciellen Werte der letzteren nicht auch gleichzeitig ihren numerischen Wert ändert, dass etwa die formell verschiedenen Functionen $t'\ t'' \ldots t^{(\alpha)}$ alle den gleichen Wert K besitzen. Alsdann lassen sich die mit t ähn-

lichen Functionen nicht mehr rational durch t ausdrücken und die weiter gezogenen Folgerungen werden hinfällig. Ruffini gibt für diesen Fall folgende Regel zur Bildung einer andern Function T, für welche dieser störende Umstand nicht mehr eintritt:

Es seien $t_1, t_2 \dots t_p$ die formell verschiedenen Functionen, welche aus t durch die sämtlichen Vertauschungen der Wurzeln sich ergeben; von ihnen sollen $t_1, t_2 \dots t_\alpha$ den gleichen numerischen Wert besitzen, dagegen $t_{\alpha+1}, t_{\alpha+2} \dots t_p$ von t_1 numerisch verschieden sein. Man bildet nun zunächst:

$$T_1 = t_1 + t_2 + \cdots + t_{\alpha-1} + t_\alpha$$

so werden aus ihm durch die verschiedenen Vertauschungen der Wurzeln x sich eine Reihe von

$$q = \binom{p}{\alpha}$$

Functionen ergeben, nämlich:

$$\begin{aligned} T_2 &= t_1 + t_2 + \cdots + t_{\alpha-1} + t_{\alpha+1}, \\ T_3 &= t_1 + t_2 + \cdots + t_{\alpha-1} + t_{\alpha+2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T_q &= t_{p-\alpha+1} + t_{p-\alpha+2} + \cdots + t_{p-1} + t_p. \end{aligned}$$

Solange nun ausser den bereits vorausgesetzten Beziehungen zwischen den x keine weiteren bestehen, wird keine von diesen Functionen den gleichen Wert wie T_1 besitzen; in diesem allgemeinen Fall ist also bereits T_1 eine Function der gewünschten Art.

Aber in speciellen Fällen kann eine solche Gleichheit zwischen den T sehr wol eintreten; alsdann verfährt Ruffini folgendermassen. Er versteht unter ε der Reihe nach die Primzahlen 1, 2, 3, 5, 7 ... ad inf. und denkt sich die Functionen gebildet:

$$\begin{aligned} T_1(\varepsilon) &= t_1^\varepsilon + t_2^\varepsilon + \cdots + t_{\alpha-1}^\varepsilon + t_\alpha^\varepsilon, \\ T_2(\varepsilon) &= t_1^\varepsilon + t_2^\varepsilon + \cdots + t_{\alpha-1}^\varepsilon + t_{\alpha+1}^\varepsilon, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T_q(\varepsilon) &= t_{p-\alpha+1}^\varepsilon + t_{p-\alpha+2}^\varepsilon + \cdots + t_{p+1}^\varepsilon + t_p^\varepsilon. \end{aligned}$$

Würde nun für einen bestimmten Index μ die Gleichung:

$$T_1(\varepsilon) = T_\mu(\varepsilon)$$

für unendlich viele Werte von ε bestehen, so würde daraus folgen, dass einer der Werte $t_{\alpha+1}, t_{\alpha+2} \dots t_p$ numerisch gleich t_1 wäre, der Voraussetzung zuwider.[1]) Da nun auch die Anzahl q der Indices μ eine endliche

1) Ruffini führt diesen Beweis an einem Beispiel; jetzt kann er leicht all-

ist, so muss es Werte von ε geben, für welche kein $T_\mu(\varepsilon)$ dem $T_1(\varepsilon)$ gleich ist.[1]) Ein solches $T_1(\varepsilon)$ ist dann in der That eine Function der verlangten Eigenschaft: alle die formell von ihr verschiedenen Functionen, welche aus ihr durch Permutation der Wurzeln x hervorgehen, haben auch numerisch von ihr verschiedene Werte; und insbesondere behält sie ihre Form und ihren Wert nur bei solchen Permutationen der Wurzeln, bei welchen t_1 seinen numerischen Wert nicht ändert. Übrigens braucht sie nicht bei diesen allen ungeändert zu bleiben[2]); aber dann ist sie (art. 22, nr. 4, 5) zur Reduction der vorgelegten Gleichung nicht weniger, sondern nur um so mehr geeignet. — Der Satz von der Existenz einer solchen Function T leistet Ruffini etwa dieselben Dienste, wie uns jetzt der Satz „dass jede Gattung Functionen von nicht verschwindender Discriminante enthält“; er ist aber nicht mit diesem Satze identisch.

Der zweite Teil der Abhandlung (p. 476 ff.) wendet sich nunmehr der eigentlichen Aufgabe zu. Er beginnt mit dem Beweise, dass die Gruppe[3]) einer irreducibeln Gleichung transitiv sein, dass also die nach den vorher gegebenenen Vorschriften gebildete Function T alle Wurzeln enthalten müsse (art. 26). Hierauf wird gezeigt, dass die Lösung einer Hilfsgleichung niedrigeren Grades nur dann die gegebene Gleichung zu einer reducibeln machen kann, wenn die Gruppe der letzteren vorher imprimitiv war (zusammengesetzt von der zweiten Art nach Ruffini's Terminologie; art. 29). Bis hieher scheinen seine Schlüsse vollkommen richtig zu sein; in der That sind sie, so fremdartig ihre Darstellung auch erscheinen mag, von den jetzt zu gleichem Zwecke angewandten nicht wesentlich verschieden. Nunmehr aber übersieht er, dass eine selbst nicht imprimitive Gruppe doch imprimitive ausgezeichnete Untergruppen besitzen kann und gelangt so zu der folgenden falschen[4]) Verallgemeinerung des vorigen richtigen Satzes:

---

gemein auf Grund der Determinantendarstellung des Differenzenprodukts geführt werden.

1) Die Durchsichtigkeit dieses Beweises leidet bei Ruffini darunter, dass er (art. 18, 19) noch verschiedene Möglichkeiten bespricht, ohne zu bemerken, dass dieselben durch die vorher getroffenen Festsetzungen bereits beseitigt sind.

2) Das würde nur der Fall sein, wenn $t_2, t_3 \ldots t_\alpha$ bei denselben Permutationen wie t_1 ihren Wert nicht änderten; vgl. hiezu Hölder, math. Ann. Bd. 34, p. 40 (1888).

3) Die „Gruppe der Gleichung“ erscheint hier immer als „die Permutation, bei welcher T seinen Wert nicht ändert“.

4) Für Gleichungen, deren Grad keine Primzahlpotenz ist, ist dieser Satz bekanntlich richtig, aber wol nicht mit so einfachen Mitteln zu beweisen. — Dass Ruffini nicht daran gedacht hat, seinen Satz an den Gleichungen vierten Grades einer Prüfung zu unterwerfen, die die Unrichtigkeit desselben sofort ans Licht gebracht hätte, ist auffallend.

Eine Gleichung ist nur dann durch eine Reihe von Hilfsgleichungen niedrigerer Grade auflösbar, wenn ihre Gruppe imprimitiv ist (art. 33).

Die Aufgabe, zu untersuchen, ob dies bei einer vorgelegten Gleichung der Fall ist, führt auf die Frage, ob diejenigen Resolventen rationale Factoren haben, von welchen die Produkte der Wurzeln zu je μ abhängen; und mit dieser und verwandten Fragen beschäftigt sich der dritte Teil der Abhandlung. Zunächst werden Formeln aus der Theorie der symmetrischen Functionen zusammengestellt, welche zur Aufstellung dieser Gleichungen identisch sind (art. 37). Hierauf wird gezeigt, wie nach Bestimmung des Produkts von μ Wurzeln die übrigen symmetrischen Functionen dieser μ Wurzeln sich auf (im allgemeinen) rationalem Wege durch ein Divisionsverfahren bestimmen lassen. Dasselbe weicht von dem Verfahren von Lagrange ab und ist zunächst nur für diesen speciellen Fall geeignet; es wird aber dann wie folgt verallgemeinert (art. 48): Sei u_1 ein gegebener Wert einer Function u der Wurzeln, t_1 der zugehörige Wert einer ähnlichen Function u. Man bezeichne mit t eine Hilfsgrösse und bilde das Produkt aller möglichen Werte des Trinoms:

$$Z^2 + tZ + u.$$

Die Coefficienten der einzelnen Potenzen von Z in diesem Produkt sind als symmetrische Functionen rational bekannt. Division desselben mit $Z^2 + tZ + u_1$ liefert einen in Z linearen Rest, der für jedes Z verschwinden muss. Von den hieraus entspringenden 2 Gleichungen in t ist t_1 gemeinsame Wurzel und zwar die einzige, also rational bestimmbar, wenn nicht formell verschiedene u numerisch gleiche Werte haben.

9. Abbati.[1]) Im folgenden (10.) Band derselben memorie findet sich p. 385—409 ein Brief von Pietro Abbati (conte Marescotti) an Ruffini (vom 30. Sept. 1802) abgedruckt, in welchem der Verfasser seiner Überzeugung von der Richtigkeit des Ruffini'schen Unauflösbarkeitsbeweises Ausdruck gibt, denselben jedoch zu vereinfachen und zu verallgemeinern unternimmt. Die Vereinfachung besteht vor allem darin, dass er die grosse Anzahl von Einzeluntersuchungen aller möglichen Untergruppen, die bei Ruffini einen so breiten Raum einnahm, durch Entwickelungen allgemeineren Charakters ersetzt. So beweist er den Hauptsatz, dass eine rationale Function von fünf Grössen nicht drei oder vier Werte haben kann, durch folgende einfache Überlegung (art. 26): Eine Gruppe, deren Index kleiner als 5 sein soll, muss jede cyclische Permutation von fünf Buchstaben enthalten; ferner aber von den sechs Substitutionen, welche irgend drei Buchstaben

1) vgl. P. Riccardi, notizie della vita e delle opere del conte Pietro Abbati Marescotti, Modena 1879.

unter sich versetzen, ausser der Identität mindestens noch eine, also entweder eine Transposition oder eine cyclische Permutation von drei Buchstaben. Dass aber eine cyclische Permutation von fünf Buchstaben mit einer Transposition die symmetrische, mit einer cyclischen Permutation von drei Buchstaben die alternirende Gruppe erzeugt, hatte bereits Ruffini dargethan. Auch der Beweis, dass keine achtwertigen Functionen von fünf Grössen existiren, wird in ähnlicher Weise vereinfacht. Die Verallgemeinerung Abbati's besteht darin, dass er ausdrücklich zeigt — was Ruffini unterlassen hatte —, dass auch von mehr als fünf Grössen keine drei- oder vierwertigen Functionen existiren. Auch sonst enthält die Arbeit Abbati's noch manches bemerkenswerte, so z. B. in einer Fussnote zu art. 7 den (soweit mir bekannt) ersten vollständigen Beweis des Satzes, dass die Anzahl der formell verschiedenen Werte einer Function von n Grössen stets ein Teiler von n' sein muss, mit derselben Anordnung der Functionswerte zu einem rechteckigen Schema, deren man sich jetzt allgemein zu diesem Beweise bedient. Ferner findet sich auch (art. 35) ausdrücklich der Satz aufgestellt und bewiesen, dass es keine andern zweiwertigen Functionen gibt, als diejenigen, welche zur alternirenden Gruppe gehören.

10. Ruffini's Abhandlung von 1802. Dieses Schreiben Abbati's gab Ruffini Veranlassung, seinen Unauflösbarkeitsbeweis unter Benutzung von Abbati's Vereinfachungsvorschlägen nochmals in ausführlichster Form zu publiciren.[1]) Nach einleitender Zusammenstellung von Sätzen und Definitionen aus seinem ersten Werke beginnt der erste Teil, der von den Gleichungen fünften Grades handelt, mit der Ableitung einer Reihe von Untergruppen, welche durch verschiedene Combinationen einfacher Permutationen erzeugt werden; diese Entwickelungen gipfeln (art. 14) in dem Abbati'schen Beweis für den Hauptsatz von der Nichtexistenz drei- oder vierwertiger Functionen von fünf Grössen.

Nach diesen gruppentheoretischen Vorbereitungen folgt der algebraische Teil des Beweises in neuer Fassung. Ruffini beginnt wieder mit dem Satze (art. 16), dass eine Gleichung der Form:

$$Z^5 - M = 0,$$

unter M eine zweiwertige Function der fünf Wurzeln einer allgemeinen Gleichung fünften Grades verstanden, nur bestehen kann, wenn Z ebenfalls zweiwertig ist. Denn würde es sich bei einer Operation der alternirenden Gruppe, z. B. bei einer cyclischen Permutation von drei Buchstaben ändern,

1) della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto; memorie della società Italiana delle scienze t. 10, p. II (Modena 1803) p. 410—470; datirt vom 18. Dec. 1802.

so könnte es nur in αZ übergehen, wo α eine fünfte Einheitswurzel bedeutet. Eine cyclische Permutation von drei Buchstaben besitzt aber die Periode 3; also müsste $\alpha^3 = 1$ sein, gegen die Voraussetzung. Da nun (art. 20) M in jener Gleichung, wenn Z mehr Werte haben soll als M, auch nicht fünfwertig sein kann (sonst wäre Z 25-wertig), so folgt, dass eine solche Gleichung nur bestehen kann, wenn M mindestens sechswertig ist.

In ganz ähnlicher Weise werden dann noch die Sätze bewiesen:

Eine Function M, welche mit einer andern Z in einer Beziehung der angegebenen Art steht, kann nicht einer Gleichung der Form $M^p + V = 0$ genügen, wenn V zu einer umfassenderen Gruppe als M gehören soll (art. 21).

Besteht eine Gleichung der Form $y^5 = Q$ zwischen zwei Functionen y, Q der Wurzeln, so müssen die fünf Werte von y, die zu einem Werte von Q gehören, durch eine cyclische Permutation aller fünf Wurzeln auseinander hervorgehen (art. 23).

Nach diesen vorbereitenden Sätzen folgt zunächst die Bemerkung, dass eine Gleichung nur dann unmittelbar algebraisch lösbar sei, wenn sie entweder reducibel oder binomisch ist; andernfalls müsse man zur Resolventenbildung schreiten. Es wird nun darauf aufmerksam gemacht, dass keine Resolvente einer allgemeinen Gleichung reducibel sein könne (art. 28). Hierauf folgt der Satz: Soll aus einer Function z sich die Wurzel x einer allgemeinen Gleichung fünften Grades rational bestimmen lassen, so muss z bei einer cyclischen Vertauschung aller fünf Wurzeln seinen Wert ändern; denn sonst würden alle fünf Werte von x in gleicher Weise von z abhängen. Folglich muss der Grad der Gleichung, welcher z genügt[1]), ein Vielfaches von 5 sein (art. 32). Da diese Gleichung (nach art. 20) nicht binomisch sein kann, so muss eine weitere Hilfsgrösse y hinzugezogen werden (art. 34). Durch deren Hinzunahme wird aber nur dann ein Vorteil erreicht, wenn sie mindestens bei einer cyclischen Vertauschung aller fünf Wurzeln x unverändert bleibt. Eine Function dieser Eigenschaft kann (nach art. 21) nur dann einer binomischen Gleichung genügen, wenn sie zweiwertig ist (art. 36, 2). Angenommen, y sei zweiwertig; dann muss der Grad der Gleichung für z auch nach Adjunction von y noch ein Vielfaches von 5 sein (art. 37).

Nunmehr wird der Hilfssatz eingeschoben: Wenn eine Function bei einer cyclischen Vertauschung aller fünf x ihren Wert nicht ändert, so besitzt sie innerhalb der alternirenden Gruppe noch einen, sechs oder zwölf Werte

1) nämlich im Rationalitätsbereich der Coefficienten.

(art. 40; der Beweis wird wieder durch Einzeldiscussion der verschiedenen möglichen Fälle geführt). Daraus folgt, dass nach Adjunction von y die Function $M = z^5$ noch von einer Gleichung sechsten oder zwölften Grades abhängen muss, die nach art. 21 nicht binomisch sein kann (art. 41). Es ist also eine neue Resolventenfunction N zu Hilfe zu nehmen, welche nach Adjunction von y einer Gleichung:

$$N^q + \ldots = 0$$

genügt (art. 42). Soll dieses N bei einer cyclischen Vertauschung aller fünf x unverändert bleiben, so folgt wie eben für M, dass $q = 1$, 6 oder 12 sein muss (art. 43, 1); soll es aber bei jeder solchen seinen Wert ändern, so folgt, dass q ein Multiplum von 5 sein muss (art. 43, 2). In beiden Fällen wird man durch dieselben Schlüsse zur Bildung neuer Resolventen gedrängt, von welchen dann wieder dasselbe gilt; und so immer fort, sodass man nie zum Ziele gelangt (art. 44).

Es folgen noch die Bemerkungen, dass auch die Annahme reducibler Resolventen zu nichts führe, da für ihre irreducibeln Factoren dieselben Schlüsse gelten würden; und dass dasselbe der Fall sei, wenn man nicht mit der Ausziehung einer Quadratwurzel beginnen wollte (art. 46, 1).

Von den fünf Bedenken, zu welchen uns die erste Form von Ruffini's Beweis Anlass gab, fallen dieser neuen Redaction gegenüber das dritte und vierte und zum Teil auch das zweite weg — übrigens ein Fortschritt, der wesentlich auf Rechnung Abbati's zu setzen ist. Das erste können wir mit Rücksicht auf Gauss' inzwischen erschienene Dissertation[1]) bei Seite lassen. Dagegen bleibt das letzte, die „accessorischen" Irrationalitäten betreffende, seinem ganzen Umfange nach bestehen; wie schon die Art zeigt, in welcher Ruffini die Worte „einfach" (reducibel) und „zusammengesetzt" (irreducibel) ohne weitere Determination gebraucht.

Von diesen Einwendungen abgesehen lohnt es sich einen Augenblick bei einer andern Eigentümlichkeit dieser ersten Beweise Ruffini's zu verweilen. Der Abel'sche[2]) Unauflösbarkeitsbeweis beginnt mit der Frage, welches, die Möglichkeit der Auflösung vorausgesetzt, die erste Operation des Auflösungsprocesses sein müsse (das „innerste Wurzelzeichen", wie man wol sagt); die Galois'sche Theorie der durch Wurzelzeichen auflösbaren Gleichungen mit der Frage, welches unter gleicher Voraussetzung die letzte Operation sein müsse. Ruffini fängt an beiden Enden zugleich an und sucht abwechselnd das eine und das andere fortzusetzen, um zu zeigen,

1) Dass dieselbe, wie es scheint, Ruffini unbekannt blieb, kann nicht auffallen.

2) Oeuvres d'Abel, éd. Sylow et Lie, t. I p. 31. 84.

dass doch immer eine unüberbrückbare Kluft zwischen beiden bleibt. Das bedingt den grossen äusseren Umfang und damit die Unübersichtlichkeit seiner Beweisführung, bietet aber vielleicht den vollständigsten Einblick in die Natur der vorliegenden Schwierigkeit bezw. Unmöglichkeit.

Der zweite Teil der Abhandlung enthält den Beweis der Unmöglichkeit, die Gleichungen von höherem als dem fünften Grade durch Wurzelzeichen aufzulösen. Da derselbe in allen wesentlichen Punkten ebenso vorgeht, wie der im vorstehenden dargestellte Beweis für die Unauflösbarkeit der Gleichungen fünften Grades, so mag eine ausführliche Darstellung desselben unterbleiben. Nur darauf sei hingewiesen, dass Ruffini den allgemeinen Satz:

> „Für $n > 4$ existiren keine Functionen von n Grössen, welche mehr als 2 und weniger als n Werte besitzen"

nicht kennt, sondern sich mit dem weniger aussagenden Satze begnügen muss, dass keine solchen Functionen existiren, welche mehr als zwei und weniger als fünf Werte besitzen.

11. Malfatti's Dubbj. Dass die älteren Mathematiker, welche sich mit dem Problem der Gleichungen fünften Grades selbst viel abgemüht hatten und die Hoffnung nicht aufgeben mochten, ihre Versuche doch noch von Erfolg gekrönt zu sehen — dass diese Ruffini's Deductionen nicht ohne Widerspruch lassen würden, war vorauszusehen. Zuerst (soviel mir bekannt) wurde solcher Widerspruch öffentlich erhoben von dem (damals bereits hochbetagten) Ferrareser Mathematiker Gianfrancesco Malfatti.[1]) In der Einleitung seiner Abhandlung erklärt er unter vielen höflichen Redewendungen, dass er an der Richtigkeit von Ruffini's Beweise Zweifel hege; er wolle dieselben darlegen, ausgehend von einer Vorstellung über die Entstehung (la genesi) der Gleichungen, die er seit lange zu benützen gewohnt sei, die sich übrigens dem Wesen nach von der Ruffini's nicht viel unterscheide. Dementsprechend beginnt er mit einer Darstellung seiner eigenen früheren Auflösungsversuche. Er denkt sich zunächst aus der Gleichung r^{ten} Grades die $(r-1)^{\text{te}}$ Potenz der Unbekannten entfernt; die so vereinfachte Gleichung ist ihm dann eine allgemeine (generica) ihres Grades, wenn ihre Coefficienten von $r-1$ unabhängig veränderlichen Grössen abhängen. Er macht darauf aufmerksam, dass Ruffini's Resolventen in diesem Sinne nicht allgemeine Gleichungen ihres Grades sind (p. 589).

---

1) Dubbj proposti al socio Paolo Ruffini sulla sua dimostrazione della impossibilità di risolvere le equazioni superiori al quarto grado; memorie della società Italiana delle scienze t. 11 (Modena 1804) p. 579—607; datirt vom 26. April 1804.

Die Wurzel einer solchen Gleichung sucht er[1], unter f eine r^{te} Einheitswurzel verstanden, in folgender Form zu erhalten:

$$x = -(fm + f^2n + f^3p + f^4q + \cdot\cdot).$$

Nach einigen vorbereitenden Sätzen über Einheitswurzeln zeigt er, wie man in der That von dieser Form ausgehend die Lösung der Gleichungen 2., 3., 4. Grades erhalten kann; und zwar zeigt er das immer durch wirkliche Ausführung der Rechnung, nicht durch irgendwelche gruppentheoretische Überlegungen. Auch für Gleichungen fünften Grades unternimmt er die Rechnung, ist aber wegen des rasch wachsenden Umfangs der Formen genötigt, mit der Erkenntnis abzubrechen, dass $mnpq$ Wurzel einer Resolvente[2] sechsten Grades ist (p. 596). Hier findet sich nun als erster Einwurf: Ruffini behaupte, gestützt auf die Analogie mit der Lösung der Gleichungen niederer Grade, die Ausdrücke für die Wurzeln der Gleichungen fünften Grades müssten unter fünften Wurzeln vierte enthalten; solche Berufung auf Analogie sei nicht zulässig (p. 597). Zweitens sei, selbst zugegeben, dass solche Wurzeln auftreten müssten, daraus doch noch nicht zu schliessen, dass die betreffenden Functionen gerade von Gleichungen vierten Grades abhängen müssten. Er bekräftigt diesen Einwand durch das Beispiel der Gleichung zwölften Grades, deren Wurzel $\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$ ist. Er erklärt nicht einzusehen, weshalb die aufzustellende Resolvente sechsten Grades, oder irgend welche spätere Resolvente, nicht eine Wurzel von dieser oder ähnlicher Form sollte besitzen können, da sie ja doch nicht eine allgemeine Gleichung ihres Grades sei. Der dritte Einwurf Malfatti's endlich besteht in folgendem: Er gibt (p. 599) ein Beispiel einer Gleichung fünften Grades an, deren Resolvente sechsten Grades eine rationale Wurzel besitzt; er vermisst einen Beweis dafür, dass dies bei der Resolvente sechsten Grades der allgemeinen Gleichung fünften Grades nicht eintrete; und wenn er das auch für diese zugeben wolle, so trete doch bei jeder weiterhin zu bildenden Resolvente dieselbe Schwierigkeit von neuem auf. Die Notwendigkeit, dass dann die Resolvente sechsten Grades drei gleiche Wurzeln haben müsse, sehe er nicht ein (p. 606).[3] Übrigens, so

---

1) Wie schon Euler, Vandermonde, Waring u. A.

2) Über diese Resolvente von Malfatti vgl. man die Note von Brioschi im 9. Bd. der memorie dell' istituto lombardo, 1863.

3) Diese Einwände sind übrigens bei Malfatti nicht so, wie es im Texte im Anschluss an Ruffini's Antwort der Übersicht halber geschehen ist, unter Rubriken praecis formulirt, sondern müssen aus längeren, immer wieder durch Eingehen auf Malfatti's eigene Versuche unterbrochenen Raisonnements erst herausgeschält werden.

schliesst Malfatti, würde es ihn nur freuen, wenn es Ruffini gelinge, diese Einwände zu entkräften.

12. Ruffini's Entgegnung. Den Zweifeln Malfatti's setzte Ruffini alsbald eine ausführliche Widerlegung[1]) entgegen. Er beginnt mit einer abermaligen ausführlichen Darstellung seines Beweises, welche die früheren Entwickelungen teils wörtlich, teils abkürzend, teils erläuternd wiederholt, im ganzen aber mehr als jene die Hauptabschnitte des Beweisgangs hervortreten lässt (art. 1—12). Hierauf wendet er sich zu den Einwürfen Malfatti's, die er ebenfalls ausführlich wiedergibt. Was zunächst die Berufung auf Analogie betrifft, so protestirt er gegen die Auffassung, dass er sich derselben jemals bedient habe, um damit irgend etwas zu beweisen; nur zur Erläuterung seiner Methoden habe er die bekannten Auflösungen der Gleichungen zweiten, dritten, vierten Grades beigezogen (art. 21). Ebensowenig könne er die Stelle finden, an welcher er behauptet habe, die unter den fünften Wurzeln stehenden Grössen müssten gerade vierte Wurzeln enthalten oder überhaupt von Gleichungen vierten Grades abhängen; nur neben andern als möglich anzunehmenden Fällen habe er auch den Fall der Hilfsgleichungen vierten Grades untersucht (art. 22). Auch habe er nirgends gesagt, dass Grössen, welche vierte Wurzeln enthielten, gerade von Gleichungen vierten Grades abhängen müssten. Desgleichen wisse er auch nicht, welche Stelle seiner Arbeiten Malfatti Anlass zu der Meinung habe geben können, er wolle behaupten, wenn die betr. Resolvente sechsten Grades lösbar sein solle, müsse sie drei gleiche Wurzeln haben (art. 22 a. E.).

Von dem letzten Einwand Malfatti's dagegen: die späteren Resolventen könnten möglicherweise reducibel sein — gesteht Ruffini art. 26, dass derselbe einige Überlegung verdiene. Was er entgegnet, ist etwa folgendes: Sei z eine erste resolvirende Function, dann sei art. 28 der Abhandlung von 1801 gezeigt, dass die zugehörige Resolventengleichung nicht reducibel sein könne, wenn die vorgelegte Gleichung allgemein ist. Man müsse dann, um sie zu lösen, eine weitere resolvirende Function y zu Hilfe nehmen, welche Function der Wurzeln z', z'' ... der ersten Resolventengleichung und folglich auch Function der Wurzeln x', x'' ... der gegebenen Gleichung sei. Nehme man nun alle die verschiedenen Werte, welche y bei den Vertauschungen der z anzunehmen im Stande sei, so genügten diese alle

1) Risposta di P. R. ai dubbj propostigli dal socio G.-Fr. M. sopra la insolubilità algebraica dell' equazioni di grado superiore al quarto; memorie della società Italiana delle scienze t. 12 p. I (Modena 1805) p. 213—267; datirt vom 27. Juni 1805.

einer Gleichung $F(y) = 0$, von der allerdings nicht geschlossen werden könne, dass sie irreducibel sei. Aber die zweite Resolvente sei auch gar nicht in dieser Weise zu bilden, sondern direkt aus der gegebenen, d. h. man habe nur alle diejenigen Werte des y in Betracht zu ziehen, welche aus einem von ihnen durch die sämtlichen Vertauschungen der x hervorgehen. Alle diese genügten einer Gleichung $f(y) = 0$, für deren Irreducibilität derselbe Schluss gelte, wie oben für die der Gleichung in z. Das Polynom $F(y)$ aber könne dann keine andern rationalen Factoren besitzen, als $f(y)$ und diejenigen, welche durch die Vertauschungen der z aus $f(y)$ hervorgehen, könne also keinenfalls zur Lösung der vorgelegten Gleichung bessere Dienste als $f(y)$ leisten.[1])

Ob Malfatti durch diese Deductionen Ruffini's überzeugt worden war, ob er, ohne überzeugt zu sein, sich von einer Fortsetzung der Discussion keinen Erfolg versprach, oder ob nur sein (1807 erfolgter) Tod dazwischen trat — jedenfalls hat er nicht mehr öffentlich geantwortet.

Soll man über die Discussion zwischen Malfatti und Ruffini ein Urteil abgeben, so wird man letzterem Recht geben müssen, wenn er erklärt, die ersten Einwände Malfatti's könnten nur auf Missverständnissen desselben beruhen; allerdings wird man hinzufügen, dass Ruffini's Darstellungsweise wenig dazu geeignet ist, Missverständnisse fernzuhalten. Schwerer wiegt — das räumt Ruffini selbst ein — der Einwand, der die Irreducibilität der Resolventen betrifft. In der That würde eine volle Aufhellung der hier in Betracht kommenden Verhältnisse den Begriff eines bestimmten Rationalitätsbereichs erfordern; dass beide, Malfatti wie Ruffini, von einem solchen noch weit entfernt sind, braucht kaum gesagt zu werden. Nach Einführung dieses Begriffs würden übrigens Ruffini's Darlegungen für die allgemeinen Gleichungen, deren Rationalitätsbereich durch die als unabhängige Veränderliche betrachteten Coefficienten festgelegt ist, ohne Zweifel Gültigkeit besitzen; und dasselbe würde auch nach Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante noch der Fall sein. Es hängt übrigens diese Frage nahe mit der mehrfach erwähnten andern zusammen, ob nicht von „accessorischen“ Irrationalitäten Vorteil für die Auflösung zu erwarten sei; wir werden auf diese sogleich noch einmal zurückkommen müssen.

Der Zurückweisung von Malfatti's Einwänden hat Ruffini einen zweiten Teil beigefügt, in welchem er selbst noch einige Bedenken gegen seinen

---

1) Zu beachten ist, dass hier von der Bildung einer zweiten Resolvente die Rede ist nicht nachdem eine erste aufgelöst ist, sondern nachdem eine erste sich als zunächst unzugänglich erwiesen hat. — Übrigens ist die Quadratwurzel aus der Discriminante bei diesen Entwickelungen jedenfalls als adjungirt zu betrachten, wenn Ruffini das auch nicht ausdrücklich sagt.

Beweis aufwirft und denselben ausführliche Widerlegungen entgegensetzt. Das erste dieser Bedenken ist (art. 34), ob nicht die vorhin mit $F(y)$ bezeichnete Function binomisch sein könne, wenn die $f(y)$ es auch nicht seien. Dass das nicht möglich ist, würde man wol am einfachsten folgendermassen beweisen: Sei g der Grad des einzelnen $f(y)$, h ihre Anzahl, also gh der Grad von $F(y)$; seien ferner y', y'' zwei Wurzeln von $f(y) = 0$. Da beide auch Wurzeln der binomischen[1]) Gleichung $F(y) = 0$ sein müssen, so muss:

$$y'' = \alpha y'$$

sein, unter α eine $(gh)^{\text{te}}$ Einheitswurzel verstanden. Wiederholung derjenigen Vertauschung der Wurzeln x, welche y' in y'' überführt, zeigt, dass auch $\alpha^2 y'$, $\alpha^3 y' \ldots$ Wurzeln von $f(y) = 0$ sein müssen. Die Anzahl γ der so erhaltenen verschiedenen Wurzeln aber muss ein Teiler des Grades g von $f(y)$ sein, also das α schon eine g^{te} Einheitswurzel. Demnach wäre $f(y)$ selbst gleich $y^\gamma - C$ oder gleich einem Produkt solcher Factoren, was beides den Voraussetzungen widerspricht. — Ruffini macht, sei es weil er die zu benutzenden Eigenschaften der Einheitswurzeln nicht völlig beherrschte, sei es aus andern Gründen, diesen Schluss nur für $h = 2$, kommt also nur zu der Folgerung, dass $h > 2$ sein müsse (art. 36). Dann fährt er folgendermassen fort: Man setze: $y^g = R$, also $R^h + b = 0$; so wird $h = ik$, wo i die Anzahl der verschiedenen Werte ist, welche R bei den Vertauschungen der x annimmt, während k für R dieselbe Bedeutung hat, wie vorher h für y. Wäre nun $i = 1$ oder 2, so wäre R symmetrisch oder alternirend, also eine Gleichung $y^g = R$ nicht möglich, da $g > 2$ sein und y nicht selbst symmetrisch bezw. alternirend sein soll; also muss $i > 2$ sein (art. 39). Jetzt sind von der Gleichung $R^{ik} + b = 0$ dieselben Eigenschaften nachgewiesen, welche vorher von $y^{gh} + b = 0$ vorausgesetzt worden waren; also folgt wie oben $h > 2$, so jetzt $k > 2$ (art. 40). Sei $R^i = S$, $S^k + b = 0$, $k = qr$, wo q, r analoge Bedeutung haben wie vorher i, bezw. k, so wird ganz ebenso bewiesen, dass $q > 2$, $r > 2$ sein muss. So fortfahrend erhielte man eine unendliche Reihe von Gleichungen:

$$p = gh, \quad h = ik, \quad K = qr, \quad r = st \cdots$$

und jeder der Factoren i, q, $s \ldots$ müsste > 2 sein; das ist nicht möglich, da p eine endliche Zahl ist (art. 41).

Ruffini fügt noch bei, dass diese Schlüsse auch gelten, wenn man vorher die alternirenden Functionen adjungirt hat (art. 44) und dass $F(y)$

---

1) Ruffini hat hier statt der Voraussetzung $F(y) \equiv y^{gh} + b$ die nur scheinbar allgemeinere $F(y) \equiv (y + a)^{gh} + b$.

auch keine andern rationalen Factoren haben kann als eben die $f(y)$ (art. 45).

13. Die Frage der accessorischen Irrationalitäten. Wenn dieser erste von Ruffini sich selbst gemachte Einwand ohne Schwierigkeit zu erledigen war, so betrifft der zweite den bereits mehrfach erwähnten schwächsten Punkt seiner ganzen Argumentation; es scheint daher hier der geeignetste Ort zu ausführlicher Besprechung desselben. Zunächst allerdings trifft Ruffini's Bedenken nur eine Nebenfrage; die Stelle (art. 47) sei — auch als charakteristisches Beispiel für Ruffini's Schreibweise — hier wörtlich mitgeteilt:

„Teoria[1]) nr. 241 und Memoria[2]) Einleitung nr. 3 habe ich gesagt, dass die Function von x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, welche Wurzel einer der Transformirten[3]) ist, welche unmittelbar oder mittelbar zur Lösung der (F)[4]) dienen sollen, immer als rational vorausgesetzt werden kann; denn würde man sie als irrational voraussetzen, so würde erstens die entsprechende Transformirte wegen dieser Irrationalität von höherem Grade und deshalb schwieriger zu lösen werden (nr. 241, 136 Teor.); zweitens bietet der irrationale Zustand der angenommenen Function keinen Vorteil im Vergleich mit einer ähnlichen rationalen Function, wenn man aus einer solchen Function die Werte von x in (F) oder die einer andern Function der x', x'', x''', x^{IV}, x^{V} bestimmen will (nr. 158 Teor.). Seien die beiden[5]):

$$y' = \varphi'(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}). \quad z' = f'(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$$

ähnliche Functionen, d. h. solche, dass bei denselben Permutationen der x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, bei welchen y' seinen Wert beibehält oder ändert, auch z' den seinigen in entsprechender Weise beibehält oder ändert, und sei y' irrational, z' rational, so wird erstens die Transformirte in y von höherem Grad sein als der der Transformirten in z, und zweitens, wenn man beim Aufsuchen des Wertes von x oder von einer dritten Function $u = F'(x)$ aus dem z' auf eine Gleichung vom Grade z. B. q geführt wird, so wird man auch auf eine Gleichung von demselben Grade q geführt werden, wenn man diesen Wert von x oder diese Function u aus dem y' bestimmen will. Das ist der Grund, weshalb sowol in der Teoria, als in der Memoria

---

1) So citirt er das oben nr. 7 besprochene Werk.

2) Die Abhandlung von 1802, oben nr. 10.

3) d. i. Resolventen.

4) Der vorgelegten Gleichung.

5) Die Klammern um die einzelnen Variabeln bedeuten wie bei Lagrange, dass die Function nicht als symmetrisch vorausgesetzt wird.

in Bezug auf die Auflösung der Gleichungen diejenigen Transformirten nicht in Betracht gezogen worden sind, welche irrationale Functionen von x', x'', x''', x^{IV}, x^V zu Wurzeln haben; aber wenn auch der Grad der Gleichung in y, falls diese Function irreducibel ist, zu hoch wird, könnte solche Gleichung nicht die mehrerwähnte Form $(y + a)^p + b = 0$ erhalten, oder einen bestimmbaren Factor haben, aus welchem sich ein zur Lösung von (F) unmittelbar oder mittelbar geeigneter Wert von y gewinnen liesse? Wenn man auch bei Bestimmung des Wertes einer Function aus y' auf eine Gleichung von zu hohem Grad geführt wird, wäre nicht die Möglichkeit vorhanden, dass auch in dieser Gleichung in u ein zur Lösung von (F) geeigneter Factor sich bestimmen liesse, oder dass sie auf die Form $(u + a)^q + b = 0$ zurückführbar wäre? Das sind zwei neue Bedenken, die gelöst werden müssen."

Was nun Ruffini selbst zu diesem Zwecke vorbringt, ist allerdings wenig geeignet diese Bedenken zu zerstreuen. Er beruft sich dabei auf eine Reihe früherer Sätze, die zum Teil überhaupt nur für rationale Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung Geltung besitzen, während für einen andern Teil wenigstens die von Ruffini gegebenen Beweise nur für solche Functionen zwingend sind. Es gilt dies namentlich von denjenigen Sätzen, welche auf den Grad und die Irreducibilität von Resolventen Bezug haben. Dazu kommt, dass er mit einer Vorstellung „Festhaltung des Werts und der Combination der Radicale bei Vertauschung der unter ihnen stehenden x" operirt, die weder von ihm selbst zu einem bestimmten Begriff praecisirt worden ist, noch einer solchen Praecisirung überhaupt fähig zu sein scheint. Hier enthalten also Ruffini's Unauflösbarkeitsbeweise an einer sehr wesentlichen Stelle eine Lücke, auf die in der That auch schon mehrfach[1]) hingewiesen worden ist.

Bekanntlich deckt Abel's Unauflösbarkeitsbeweis diese Lücke durch eine ausführliche rechnerische Deduction des Satzes: „Ist eine Gleichung durch Wurzelziehen auflösbar, so kann man der Lösung immer eine solche Form geben, dass alle algebraischen Functionen, aus welchen sie zusammengesetzt ist, sich durch rationale Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung ausdrücken lassen." Man findet wol die Meinung ausgesprochen, dass eine solche algebraische, oder wenn man will arithmetische Deduction an dieser Stelle durchaus unentbehrlich sei und durch keinerlei anders geartete Betrachtung ersetzt werden könne.[2]) Wäre dem in der That so,

---

1) Vgl. z. B. Sylow in den Noten zu Abel's oeuvres complètes, éd. Sylow et Lie, Bd. II p. 293, oder die in der Einl. citirte Diss. von Hecker p. 5 u. 26.

2) Vgl. z. B. Netto, Lehrbuch der Substitutionentheorie (Leipzig 1882) § 200.

so würde man das Übel des Ruffini'schen Beweises insofern als unheilbar ansehen müssen, als eine Entwicklung, wie die von Abel durchgeführte, Ruffini's ganzer Arbeitsweise durchaus ferne liegt. Es ist jedoch von Herrn C. Jordan[1]) in Verfolgung Galois'scher Ideen für einen allgemeineren Satz, welcher den vorhin erwähnten als speciellen Fall enthält, ein Beweis gegeben worden, der solcher arithmetischen Vorbereitungssätze nicht bedarf; derselbe beruht hauptsächlich auf dem auch Ruffini's Versuchen zu Grunde liegenden Gedanken, dass mit Adjunction einer irrationalen Function der Wurzeln auch immer zugleich bestimmte rationale Functionen derselben adjungirt werden. Es muss demnach möglich sein, indem man diese Entwicklungen in angemessener Weise specialisirt, den Beweis der Unmöglichkeit „algebraischer" Auflösung der höheren Gleichungen von jenen Vorbereitungssätzen und dem zu ihrer Ableitung erforderlichen Formelapparat in der Weise unabhängig zu machen, dass dieselben erst nachträglich als Corollare auftreten. Einen so geführten Beweis würde man mit einigem Recht als „vervollständigten Ruffini'schen Beweis" ansehen können. —

Es folgen bei Ruffini noch einige Bemerkungen von geringerer Bedeutung. In nr. 51 wird erläutert, dass gleichzeitige Adjunction der Wurzeln mehrerer Hilfsgleichungen die Lösung nicht fördert. Nr. 52 wirft die Frage auf, ob es nicht unabhängig von jeder Methode, vielleicht durch Zufall, möglich sei, dass ein algebraischer Ausdruck gefunden werden könne, der in die gegebene Gleichung eingesetzt, dieselbe befriedige; diese Frage wird dadurch erledigt, dass ausführlich entwickelt wird, wie man in solchem Fall von dem gefundenen Ausdruck aus rückwärts die successiven Resolventen bilden könne, sodass man auf die ursprüngliche Fragestellung zurückgeführt werde.[2])

---

1) traité des substitutions et des équations algébriques (Paris 1870), art. 373 ff. Man vgl. auch die Darstellung bei Hölder, math. Annalen Bd. 34 p. 47 ff. (1889).

2) Derselbe Band der memorie della società Italiana enthält p. 321—336 noch eine kleine Abhandlung von Ruffini: Riflessioni intorno al metodo proposto dal consocio Malfatti per la soluzione delle equazioni di 5^0 grado (vom 21. Sept. 1805). In derselben zeigt er, wie aus den von Lagrange entwickelten Grundsätzen a priori geschlossen werden könne, dass der Grad von Malfatti's Resolvente gleich 6 sein müsse. Er erörtert ausserdem noch das von Malfatti gegebene Beispiel, in welchem diese Resolvente eine rationale Wurzel besitzt, und macht darauf aufmerksam, dass, sobald dies für die entsprechende Resolvente irgend einer Gleichung fünften Grades zutrifft, diese letztere algebraisch aufgelöst werden könne. (Dass diese Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, hat E. Luther bewiesen: de criteriis quibus cognoscatur an aequatio quinti gradus irreductibilis algebraice resolvi possit, Crelle's Journ. Bd. 34, p. 244, auch Diss. Regiom. 1847.)

14. Ruffini's Abhandlung von 1806. Die nächste Abhandlung Ruffini's über die allgemeine Auflösung der höheren Gleichungen[1]) trägt an ihrer Spitze die Behauptung, solche Auflösung sei stets unmöglich, welche algebraische oder transcendente Methode man auch immer anwenden möge. Durch diese Behauptung haben sich offenbar viele Mathematiker von der Kenntnisnahme von Ruffini's Arbeiten abschrecken lassen, indem sie in derselben einen handgreiflichen Widerspruch fanden. Nachdem wir aber aus seinen bisher besprochenen Abhandlungen gesehen haben, dass wir es in ihm mit einem zwar in der Weise seiner Zeit zuweilen mit unvollständig abgeklärten Vorstellungen arbeitenden, aber doch jedenfalls durchaus ernst zu nehmenden Mathematiker zu thun haben, werden wir uns von jenem anscheinenden Widerspruch nicht davon abhalten lassen, dass wir von dem Inhalt auch dieser Arbeit Kenntnis nehmen und zusehen, in welchem Sinn denn eigentlich jene paradoxe Behauptung zu verstehen sein mag. Dieselbe wird von Ruffini zunächst dahin erläutert, dass es keine „exacte", d. h. aus einer endlichen Anzahl von Termen bestehende Function der Coefficienten gebe, welche an Stelle der Unbekannten in die Gleichung eingesetzt, dieselbe befriedige. Man wird zunächst nicht geneigt sein, in dieser Definition irgend einen bestimmten Sinn zu finden, wenn dieselbe transcendente Functionen mit umfassen soll; allein damals lag die Sache doch anders. Man war seit so langer Zeit gewohnt, gewisse häufig begegnende transcendente Abhängigkeiten — Exponential- und trigonometrische Functionen samt ihren Umkehrungen — durch besondere Functionszeichen auszudrücken und mit ihnen wie mit den Zeichen der algebraischen Functionen zu operiren, dass man gar nicht dazu kam, sich die Frage vorzulegen, durch welche Eigenschaften denn gerade diese vor allen andern Transcendenten eine solche Bevorzugung verdienten. So wurde man unbemerkt dazu gebracht, dass man bald nur an diese speciellen Functionen dachte, wenn man von analytisch darstellbaren und den Regeln des Calculs unterworfenenen Functionen sprach, bald, wenn man solche Beschränkung als unzulässig erkannte, die Eigenschaften, welche man an jenen kennen gelernt hatte, unbewiesenermassen auch allgemeineren zuschrieb. Bei Ruffini scheint beides ineinandergespielt zu haben; diesen Eindruck gewinnt man wenigstens aus seiner Abhandlung[2]) über die allgemeinen

---

1) Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al 4°, qualunque metodo si adoperi, algebraico esso siasi o trascendentale; memorie dell'Istituto Nazionale Italiano, Classe di fisica e matematica, t. 1 p. II (Bologna 1806), p. 433—450 (vom 22. Nov. 1806).

2) Alcune proprietà generali delle funzioni; memorie della società Italiana delle scienze t. 13, p. I (Modena 1807), p. 292—335 (v. 27. Juni 1806).

Eigenschaften der Functionen, auf welcher jene mit dem paradoxen Titel beruht. Auch in dieser suchen wir vergebens nach einer greifbaren Definition dessen, was Ruffini unter einer Function, speciell unter einer einfachen Function versteht. Wir finden nur die beiläufige Bemerkung (art. 1), dass eine einfache Function durch eine einzige Rechnungsoperation zu Stande komme; als Beispiele werden dazu:

$$\sqrt[5]{P}, \quad \cos\left(\frac{1}{n} \operatorname{arc}\cos P\right), \quad \log P$$

aufgeführt. Es folgen lange Ketten von Schlüssen und Rechnungen, in welchen nun freilich mit vieldeutigen Functionen ohne Angabe des jedesmal zu wählenden Wertes, mit Iteration von Operationen zu gebrochenem oder gar zu irrationalem Index, mit Bestimmung von Functionen aus Functionalgleichungen, die noch unendlich viele andere Lösungen zulassen, und ähnlichen Dingen in so scrupelloser Weise manipulirt wird, dass man schon nach den ersten Sätzen jede Controle darüber verliert, in welcher Weise man die Voraussetzungen hätte einschränken müssen, wenn die Schlüsse zulässig sein sollten. Will man daher von dem ganzen Bau überhaupt etwas retten, so wird nichts übrig bleiben, als diejenigen Eigenschaften, welche Ruffini aus seiner unbestimmten Vorstellung von einer einfachen Function gefolgert zu haben glaubt, mit in die Definition aufzunehmen und zu sagen:

Einfach heisst eine Function im Sinne Ruffini's dann, wenn von ihren zu demselben Werte des Arguments gehörenden Werten jeder eine rationale Function irgend eines unter ihnen ist, und wenn ferner alle diese rationalen Operationen sich durch Iteration einer einzigen unter ihnen darstellen lassen.

Sind dann $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \varphi(x, y, z)$ einfache Functionen, so heissen $f_2(f_1(x)), f_3(f_2(f_1(x))), \varphi(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ u. s. w. zusammengesetzte Functionen, und stillschweigend werden nur solche Functionen in Betracht gezogen, welche in dieser Weise aus einfachen sich zusammensetzen lassen.[1] Dass durch Functionen dieser Art die Auflösung der algebraischen Gleichungen höherer Grade nicht geleistet werden könne, das ist der eigentliche Sinn, den man jener paradoxen Behauptung beizulegen hat. Nun ist aber mit den Mitteln der modernen Functionentheorie sofort zu

1) Die „einfachen" Functionen würden demnach in der Functionentheorie eine ähnliche Rolle zu spielen haben, wie in der Algebra die Radicale mit Primzahlexponenten. (Von Radicalen mit zusammengesetzten Exponenten sagt Ruffini, dass sie ebensowol als einfache, wie als zusammengesetzte Functionen betrachtet werden können.)

zeigen, dass jene Eigenschaften einer einfachen Function von allen transcendenten Functionen nur dem Logarithmus zukommen. Ruffini's Behauptung würde also schliesslich darauf zusammenschrumpfen, dass die Auflösung der höheren Gleichungen auch mit Hilfe der Logarithmen, resp. der Kreisfunctionen nicht möglich ist; womit es denn allerdings seine Richtigkeit hat.

Übrigens ist ersichtlich, dass eine Fortbildung dieser Gedanken Ruffini's zu Anschauungen ähnlicher Art wie diejenigen führen würde, welche vor einigen Jahren Herr Rausenberger seinen functionentheoretischen Arbeiten zu Grunde legen zu müssen glaubte.

Was Ruffini's eigenen Beweis seiner Behauptung angeht, so ist der Gedankengang desselben etwa der folgende:

Sei P (nr. 1) eine Function der Coefficienten der vorgelegten Gleichung, $y = \psi(P)$ eine „einfache Function" von P, ψ', ψ'', ψ''' ... die verschiedenen Werte derselben, $P = \Pi(y)$ ihre Umkehrung. In P und y führe man statt der Coefficienten die Wurzeln x ein. Existirt dann (nr. 2) eine Anzahl von Permutationen der x, welche denselben Wert P, aber verschiedene Werte von y liefern, so sind alle diese unter den ψ', ψ'' ... enthalten. Seien nun (nr. 3, I) $y', y'' \dots y^{V}$ die 5 Werte von y, welche durch Wiederholung einer cyclischen Permutation von fünf der x aus einander hervorgehen, und sei $y'' = f(y')$, so folgt, dass $f^5(y') = y'$, d. h. dass die fünfte Iteration der Operation f sich auf die Identität reducirt. Bleibt ferner (nr. 3, II) die Function P noch bei einer andern cyclischen Vertauschung von g der x ungeändert, während y' dabei in $y^{(a)} = \Psi(y')$ übergeht, so folgt ebenso, dass $\Psi^g(y) = y$ sein muss. Es werde nun angenommen (nr. 4), dass P sowol bei der erwähnten cyclischen Permutation von fünf Wurzeln x, als auch noch bei irgend einer andern cyclischen Permutation von zweien, dreien oder vieren derselben ungeändert bleibt, und dass y bei der ersten seinen Wert ändert: dann folgt, dass es ihn bei der zweiten beibehalten muss. Denn sei erstens $y^{(a)}$ gleich einem der fünf ersten Werte $y', y'' \dots y^{(V)}$, etwa $= f^p(y)$, so folgt aus $\Psi^{(g)}(y) = y$, dass $f^{pg}(y) = y$ sein muss, $y^{(a)} = y'$. Ist aber zweitens $y^{(a)}$ von allen jenen fünf Werten verschieden, so setze man $f(y^{(a)}) = f\psi(y') = F(y')$; dann wird y' in $F(y')$ übergeführt, durch eine cyclische Vertauschung von fünf Wurzeln x, sodass, wie im ersten Fall $F^5(y) = y$ und vermöge der Vertauschbarkeit[1]) von f und Ψ: $f^5\psi^5(y) = y$, also auch $\Psi^5(y) = y$ und damit $\Psi(y) = y$ folgt, der Voraussetzung zuwider. Nr. 5 enthält den analogen und analog bewiesenen Satz für zwei cyclische Permutationen

1) In dieser Vertauschbarkeit liegt der Kern des Beweises.

von drei und von vier Wurzeln x und die Bemerkung, dass hier Specialfälle eines allgemeinen Gesetzes vorlägen. Nr. 7 bringt nach diesen Vorbereitungen die entscheidende Behauptung, dass y bei jeder cyclischen Permutation von fünf Wurzeln unveränderlich bleiben müsse, wenn P ein- oder zweiwertig sei. Denn würde es seinen Wert bei einer solchen Permutation ändern, so müsste es ihn nach nr. 4 bei jeder cyclischen Permutation von drei Wurzeln behalten. Andrerseits kann aber jede cyclische Permutation von fünf Wurzeln aus solchen von jedesmal drei Wurzeln zusammengesetzt werden, sodass man auf einen Widerspruch geführt wird. Damit kann nun in nr. 9 der Unauflösbarkeitsbeweis abgeschlossen werden, indem gezeigt wird, dass fortgesetzte Übereinanderhäufung der Zeichen „einfacher Functionen“ niemals von den Coefficienten der Gleichung zu solchen Functionen führen kann, welche bei cyclischer Vertauschung von fünf Wurzeln ihren Wert ändern, wie dies doch für die Wurzeln selbst der Fall ist.

15. Ruffini's Abhandlung von 1813. Eine fünfte und letzte Redaction seines Unauflösbarkeitsbeweises hat Ruffini als besondere Schrift erscheinen lassen.[1]) In der Einleitung derselben recapitulirt er eine Reihe meist Lagrange'scher Sätze aus der Gleichungstheorie; dieselben werden in Noten am Schlusse des Werkes ausführlich erläutert: Erwähnenswert dürfte aus den letzteren vielleicht sein, dass Ruffini auch hier den Unterschied zwischen „formeller“ und „numerischer“ Gleichheit zweier Werte einer Function ausdrücklich hervorhebt (Nota 4, p. 122), sowie die Thatsache, dass die Substitutionen, welche den numerischen Wert einer Function nicht ändern, keine Gruppe zu bilden brauchen (Nota 5, p. 123). Der erste Teil der Abhandlung enthält dann den Beweis der algebraischen Unauflösbarkeit in derjenigen Form, welche sich aus dem oben (nr. 14) reproducirten Beweis der „transcendenten“ ergibt, wenn man überall nur von algebraischen Functionen, bezw. von Radicalen redet. Die wesentlichen Schritte werden dabei folgende:

(nr. 1) Seien y, P zwei Functionen der Wurzeln x der vorgelegten Gleichung, und sei $y^p = P$; P bleibe bei einer cyclischen Vertauschung (12345) von fünf Wurzeln x ungeändert, ein Wert y' von y gehe bei wiederholter Anwendung derselben Vertauschung der Reihe nach in y'', y''', y^{IV}, y^V über.

(nr. 2) Dann muss $y'' = \beta y'$, $y''' = \beta^2 y'$, $y^{IV} = \beta^3 y'$, $y^V = \beta^4 y'$ sein und β muss eine fünfte Einheitswurzel sein.

---

1) Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali. Opuscolo del. cav. dott. P. Ruffini etc. Modena 1813. VIII, 140 pp. 4°.

(nr. 3) Bleibt P ausserdem noch bei einer cyclischen Permutation (123) von dreien aus jenen fünf Wurzeln x ungeändert, so muss y' bei derselben in γy übergehen und γ muss eine dritte Einheitswurzel sein.

(nr. 4) Beide cyclischen Permutationen nach einander ausgeführt, geben wieder eine cyclische Permutation (13452) von fünf Wurzeln; daraus folgt $\beta^5\gamma^5 = 1$. Das ist aber nur möglich, wenn γ selbst gleich 1 ist; d. h. y kann sich bei keiner der cyclischen Permutationen (123), (234), (345), (451), (512) ändern.

(nr. 5) Also kann es sich auch nicht bei der zuerst vorausgesetzten cyclischen Permutation von fünf Buchstaben ändern; denn diese lässt sich aus jenen zusammensetzen.

(nr. 6) Also kann man durch Wurzelausziehung nicht über die zweiwertigen Functionen hinausgelangen.

Es braucht wol kaum noch ausdrücklich hervorgehoben zu werden, dass diese Fassung des Unauflösbarkeitsbeweises sich in allen wesentlichen Punkten mit derjenigen deckt, welche als „Wantzel'sche Modification des Abel'schen Beweises" in den Lehrbüchern mitgeteilt zu werden pflegt.

Über die Frage, wie es mit den accessorischen Irrationalitäten steht, täuscht sich Ruffini diesmal (nota 9, p. 134) mit den Worten hinweg: „wenn aus dem Ausdruck für $x^{(n)}$ nach Einsetzung der Ausdrücke der Coefficienten durch die Wurzeln und gehöriger Reduction nicht alle Radicale verschwänden, so würde ein rationaler Ausdruck, nämlich $x^{(n)}$, einem irrationalen gleich sein müssen, was absurd ist."

Die folgenden Capitel enthalten eine ausführliche Theorie der Gleichungen dritten und vierten Grades, mit der Absicht, zu zeigen, weshalb auf diese die Schlüsse keine Anwendung finden, welche die Unauflösbarkeit der höheren Gleichungen beweisen. Bemerkenswert ist hier nur allenfalls die Art, wie Ruffini die Unvermeidlichkeit des casus irreducibilis begründet: in dem allgemeinen Ausdruck für die Lösungen dieser Gleichungen müssten die complexen dritten Einheitswurzeln notwendig auftreten, und eben deswegen müssten die Radicanden notwendig complex sein, wenn die Wurzeln der Gleichung reell werden sollen.

Der zweite Teil der Schrift wiederholt den Beweis der Unmöglichkeit transcendenter Auflösung aus den beiden hier unter nr. 14 besprochenen Abhandlungen in meist wörtlichem Abdruck.[1])

---

1) Von Ruffini's späteren Veröffentlichungen stehen die beiden folgenden mit unserem Gegenstande noch in einigem Zusammenhang:

Alcune proprietà delle radici dell'unità; memorie dell'imp. r. istituto del

16. Resumé. Es bleibt noch übrig, dass wir aus dem Inhalt der verschiedenen im vorhergehenden analysirten Schriften Ruffini's ein Gesamtbild seiner Leistungen auf dem betrachteten Gebiete zusammenzufügen versuchen. Sicherlich sind dieselben nicht frei von schweren Mängeln. Dass wir an seinen Definitionen häufig Klarheit und Praecision, an seinen Beweisen Schärfe und Überzeugungskraft vermissen — das ist nun freilich ein Gebrechen, von dem auch die bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit nicht frei sind und das man deshalb ihm persönlich nicht allzuhoch wird anrechnen dürfen. Dieser Mangel allein hätte auch seine Zeitgenossen wol kaum abgehalten, seinen Arbeiten die verdiente Anerkennung zu zollen; und wenn das nicht in ausreichendem Masse geschehen ist, so müssen noch anderere Gründe massgebend gewesen sein. Dahin ist vor allem seine Darstellungsweise zu rechnen, die dem Verständnisse in der That nicht geringe Schwierigkeiten entgegensetzt. Noch grösser müssen dieselben zu einer Zeit gewesen sein, in welcher ein grosser Teil der benutzten Begriffe den Lesern völlig fremd und ungewohnt war — davon geben Malfatti's Einwendungen genügend Zeugnis. Diese neuen Begriffe aber durch ein geeignetes System von Kunstausdrücken und Bezeichnungen zum Gebrauche handlich zu machen hat er nicht verstanden, vielleicht auch nicht gesucht. So wird er zu langathmigen Umschreibungen genötigt und muss oft erst durch eine Reihe von Beispielen dem Leser Gelegenheit geben, sich den

---

regno Lombardo-Veneto vol. III, anni 1816/17 (Milano 1824. p. 67—84), vom 7. März 1816.

(Enthält hauptsächlich Formeln zur Berechnung der symmetrischen Functionen der Einheitswurzeln.)

Intorno al metodo generale proposto dal Sig. Hoëné Wronski, onde risolvere le equazioni di tutti i gradi; memorie della società italiana delle scienze, t. 18. parte contenente le memorie di matematica (Modena 1820) p. 56—68 (vom 20. März 1816).

(Hoëné-Wronski's angebliche Lösung beruhte, wie Ruffini ausführlich darlegt, auf der falschen Voraussetzung, dass es möglich sei, die Wurzel x einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades durch die Wurzeln $\xi_1, \xi_2 \cdot\cdot \xi_{n-1}$ einer Hilfsgleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in der Form auszudrücken:

$$x = \sqrt[n]{\xi_1} + \sqrt[n]{\xi_2} + \cdots + \sqrt[n]{\xi_{n-1}}\cdot)$$

Ein in den Jahren 1807/8 von Ruffini für seine Artillerieschüler verfasstes Elementarlehrbuch (Algebra e suo appendice) habe ich nicht gesehen.

Worauf sich die in Abel's oeuvres complètes éd. Sylow et Lie t. II. p. 293 aus dem Bull. des annonces von Férussac citirte Stelle: „dans les mém. de l'inst. imp. de Milan, t. 1, un autre auteur fait voir etc.“ bezieht, habe ich nicht eruiren können; der betr. Band enthält an hieher gehörigem nur eine (unbedeutende) Abhandlung von Ant. Caccianino, welcher im Gegenteil Ruffini zustimmt.

Sinn eines Satzes zu abstrahiren, den praecis und verständlich zu formuliren ihm selbst nicht gelungen ist. Ähnlich verhält es sich auch mit der Darstellung seiner Beweise: ihren künstlichen Bau beginnt er meist an einem beliebigen Ende und führt ihn ein Stück weit in die Höhe, um dann abzuspringen, an einem ganz andern Ende zu beginnen, wieder ein Stück zu fördern, von neuem zu wechseln, bis er schliesslich alle Stützen beisammen hat, um das Werk mit einer fein zugespitzten deductio ad absurdum krönen zu können. Dazwischen lässt er den Fortgang des Baues auch wol einmal für längere Zeit gänzlich ruhen, um sich mittlerweile erst mit Einwendungen herumzuschlagen, die ihm das bereits vollendet geglaubte wieder zu unterminiren drohen.

Bei einzelnen Fragen ist es überhaupt nicht möglich, über seine Auffassung ins klare zu kommen, indem seine Äusserungen aus verschiedenen Zeiten zu sehr von einander abweichen. (Dieselbe Unbeständigkeit der wissenschaftlichen Überzeugung soll übrigens auch seiner medicinischen Thätigkeit angehaftet haben; so wird z. B. berichtet, er habe seinen Zuhöhern über die Natur des Typhuscontagiums jedes Jahr eine andere Theorie vorgetragen.) Es gilt dies insbesondere auch von der Frage, in wie fern man berechtigt ist, sich bei Untersuchungen über die Auflösung algebraischer Gleichungen auf die Betrachtung rationaler Functionen der Wurzeln zu beschränken. In seinen ersten Veröffentlichungen drückt er sich so aus, dass man annehmen muss, er habe überhaupt gruppentheoretische Sätze mit derselben Leichtigkeit auf irrationale wie auf rationale Functionen der Wurzeln anwenden zu können geglaubt. Später scheint ihm dies doch bedenklich vorgekommen zu sein; in dem zweiten Teil, welcher der Erwiderung auf Malfatti's Einwürfe angehängt ist, lässt er sich über die Frage auf längere Erörterungen ein, denen man zwar keineswegs strenge Beweiskraft wird zuschreiben können, die aber doch vielleicht neueren, im Galois'schen Ideenkreis erwachsenen Anschauungen nicht so sehr ferne stehen. In seiner letzten Schrift endlich täuscht er sich über die ganze Schwierigkeit mit einem — man kann wol sagen Taschenspielerkunststück hinweg.

Aber alle diese Mängel dürfen uns nicht blind gegen die Thatsache machen, dass in Ruffini's Schriften die Algebra doch in einer ganzen Reihe von Punkten wesentlich gefördert worden ist. Er hat zuerst das von Waring, Vandermonde und Lagrange ihren Nachfolgern gestellte Problem einer systematischen Untersuchung der Permutationen, bei welchen rationale Functionen von n Grössen ihren Wert ändern oder nicht ändern, energisch in Angriff genommen und wenigstens für $n = 5$ zu einem gewissen Abschluss gebracht. Namentlich hat er bereits den wichtigen Satz vollständig

bewiesen, dass keine drei- oder vierwertigen Functionen von fünf oder mehr Grössen existiren können. Er hat zuerst den fundamentalen Begriff einer Gruppe von Operationen in seinem speciellen Untersuchungsgebiet zur Geltung gebracht und die hauptsächlichsten Arten von Gruppen für dieses Gebiet zu unterscheiden gelehrt. Er hat den Beweis des Satzes, dass bei Benutzung nur solcher Functionen, welche sich rational durch die Wurzeln ausdrücken lassen, die Auflösung der höheren Gleichungen durch Radicale nicht möglich sei — diesen Beweis hat er nicht nur zuerst durchgeführt, sondern ihn auch nach verschiedenen Umarbeitungen auf die einfache Form gebracht, welche Wantzel zugeschrieben zu werden pflegt. Er hat endlich den Zusammenhang erkannt, in welchem die Reducibilität einer Gleichung mit der Intransitivität ihrer Gruppe, die Auflösbarkeit einer Gleichung durch Hilfsgleichungen niedrigerer Grade mit der Imprimitivität ihrer Gruppe steht.

Ob wir auf Ruffini's Inspiration auch den wesentlichen Inhalt der Arbeit seines Freundes Abbati, welche ebenfalls zwei grundlegende Sätze dieses Teils der Algebra zum ersten Mal vollständig beweist, zurückzuführen, oder ob wir diesen jetzt fast vergessenen Mann neben Ruffini als einen der Begründer der Gruppentheorie zu nennen haben, das wird sich jetzt wol nicht mehr feststellen lassen. Dagegen dürfen wir an einer andern Frage nicht vorübergehen, die wol mancher Leser sich schon aufgeworfen haben wird: was bleibt, wenn diese Darstellung richtig ist, noch übrig von den gruppentheoretischen Verdiensten Cauchy's, dem man den grössten Teil der erwähnten Sätze zuzuschreiben gewohnt ist? Sicherlich ein bedeutender Teil: Cauchy hat nicht nur den von Ruffini überkommenen einzelnen Sätzen eine grosse Anzahl neuer hinzugefügt und das Ganze in systematischer Darstellung zugänglich gemacht, sondern auch in Terminologie und Bezeichnungsweise erst das Handwerkszeug geschaffen, dessen dieser neue Zweig der Mathematik zu seiner Weiterentwickelung bedurfte und das Ruffini ihm nicht in die Wiege gelegt hatte. Aber die wenigen Worte, mit welchen Cauchy in seiner ersten einschlägigen Veröffentlichung[1]) seines Vorgängers gedenkt, unbestimmt und deutbar wie sie sind, sind allgemein in einer Weise verstanden worden, welche Ruffini's Leistungen mehr zu verdunkeln, als ins Licht zu setzen beigetragen hat, und Cauchy hat dieser für Ruffini's Würdigung verhängnisvollen Auslegung seiner Worte nicht widersprochen.

---

1) Journal de l'école polytechnique Cah. 17 (1815) p. 1 und 8. Die spätere ausführlichere Darstellung (exercices d'analyse et de physique mathématique (t. III p. 151—252; 1844) enthält überhaupt keine Citate).

ÜBER DIE ZURÜCKFÜHRUNG

DER

SCHWERE AUF ABSORPTION

UND

DIE DARAUS ABGELEITETEN GESETZE.

VON

C. ISENKRAHE.

Der Zweck folgender Erörterungen ist vor Allem, eine Reihe der interessanteren Versuche, die Schwere auf Absorption zurückzuführen, nach bestimmten Gesichtspunkten kritisch zu betrachten, sodann den Nachweis zu führen, dafs die Gesetze, zu welchen diese Theorien sich allmählich zugespitzt haben, in Bezug auf die wesentlichsten Punkte schon in den von mir im Jahre 1879[1]) veröffentlichten Formeln als specielle Fälle enthalten sind, und endlich, den Gültigkeitsbereich dieser Formeln, welche damals unter der besonderen Annahme unelastischer Zusammenstöfse zwischen den kleinsten Teilchen des Äthers und der gravitierenden Materie abgeleitet wurden, auf die Absorptionstheorien im Allgemeinen auszudehnen.

I. Absorption von Materie.

Riemann.

Die kühnste Form, in welcher der Gedanke, dafs die Schwere auf Absorption zurückzuführen sei, meines Wissens jemals ausgesprochen worden ist, findet sich in einigen unvollendeten Aufsätzen von Bernhard Riemann vor, welche Prof. H. Weber in dessen nachgelassenen Handschriften vorgefunden und im Anschlufs an die „Gesammelten mathematischen Werke" Riemanns herausgegeben hat.[2]) Diese Aufsätze gehören zu einer Gruppe von kleineren Arbeiten, welche unter der Rubrik „Naturphilosophie" zusammenstehen und die Überschriften tragen: „1) Molekularmechanik, 2) Gravitation und Licht, 3) Neue mathematische Principien der Naturphilosophie." — Für unseren Zweck kommen nur die beiden letzten in Betracht, und es wird aus einem besonderen, später zu erörternden Grunde dienlich sein, den dritten zuerst ins Auge zu fassen, um dann nachher auf den zweiten zurück zu greifen.

---

1) „Das Rätsel von der Schwerkraft", Braunschweig 1879.

2) Bernhard Riemanns gesammelte Werke und wissenschaftlicher Nachlafs, herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber, Leipzig 1876.

Schon durch die Wahl der eben angeführten dritten Überschrift setzt Riemann diese Arbeit zu Newtons grofsem Werk: Philosophiae naturalis principia mathematica in nahe Beziehung; er spricht sich darüber aber noch deutlicher aus in einigen einleitenden Sätzen, welche die Aufgabe: „jenseits der von Galilei und Newton gelegten Grundlagen der Astronomie und Physik ins Innere der Natur zu dringen, ausdrücklich als Zweck der ganzen Untersuchung hinstellen. Diese Vertiefung der Galilei-Newtonschen Naturanschauung nun wird erstrebt auf der Grundlage einer ganz neuen Idee, welche die Newtonsche Physik mit der Herbartschen Seelenlehre auf die überraschendste Weise verknüpft. Riemann trägt diese Idee in folgender Weise vor:

„Der Grund der allgemeinen Bewegungsgesetze für Ponderabilien, welche sich im Eingange zu Newtons Principien zusammengestellt finden, liegt in dem inneren Zustande derselben. Versuchen wir aus unserer eigenen inneren Wahrnehmung nach der Analogie auf denselben zu schliefsen. Es treten in uns fortwährend neue Vorstellungsmassen auf, welche sehr rasch aus unserer Vorstellung wieder verschwinden. Wir beobachten eine stetige Thätigkeit unserer Seele. Jedem Akt derselben liegt etwas Bleibendes zu Grunde, welches sich bei besonderen Anlässen (durch die Erinnerung) als solches kundgiebt, ohne einen dauernden Einflufs auf die Erscheinungen auszuüben. Es tritt also fortwährend (mit jedem Denkakt) etwas Bleibendes in unsere Seele ein, welches aber auf die Erscheinungswelt keinen dauernden Einflufs ausübt. Jedem Akt unserer Seele liegt also etwas Bleibendes zu Grunde, welches mit diesem Akt in unsere Seele eintritt, aber in demselben Augenblicke aus der Erscheinungswelt völlig verschwindet.

Von dieser Thatsache geleitet, mache ich die Hypothese, dafs der Weltraum mit einem Stoff erfüllt ist, welcher fortwährend in die ponderablen Atome strömt und dort mit der Erscheinungswelt (Körperwelt) verschwindet.

Beide Hypothesen lassen sich durch die Eine ersetzen, dafs in allen ponderablen Atomen beständig Stoff aus der Körperwelt in die Geisteswelt eintritt. Die Ursache, weshalb der Stoff dort verschwindet, ist zu suchen in der unmittelbar vorher dort gebildeten Geistessubstanz, und die ponderablen Körper sind hiernach der Ort, wo die Geisteswelt in die Körperwelt eingreift.

Die Wirkung der allgemeinen Gravitation, welche nun zunächst aus dieser Hypothese erklärt werden soll, ist bekanntlich in jedem Teil des Raumes völlig bestimmt, wenn die Potentialfunktion P sämtlicher ponderabler Massen für diesen Teil des Raumes gegeben ist, oder was dasselbe

ist, eine solche Funktion P des Ortes, dafs die im Innern einer geschlossenen Fläche S enthaltenen ponderablen Massen

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial P}{\partial p}\,dS$$

sind. Nimmt man nun an, dafs der raumerfüllende Stoff eine inkompressible homogene Flüssigkeit ohne Trägheit sei, und dafs in jedes ponderable Atom in gleichen Zeiten stets gleiche seiner Masse proportionale Mengen einströmen, so wird offenbar der Druck, den das ponderable Atom erfährt (der Geschwindigkeit der Stoffbewegung an dem Orte des Atoms proportional sein?).

Es kann also die Wirkung der allgemeinen Gravitation auf ein ponderables Atom durch den Druck des raumerfüllenden Stoffes in der unmittelbaren Umgebung desselben ausgedrückt und von demselben abhängig gedacht werden." — —

Aus dem hier Dargelegten müssen wir zwei wesentliche Gedanken absondern und von einander trennen, nämlich erstens, dafs die Erscheinungen der Gravitation nicht auf Fernwirkung, sondern auf dem Druck beruhen sollen, den jedes Atom von seiner unmittelbaren Umgebung erfährt; zweitens, dafs dieser Druck verursacht werde durch das Verschwinden materieller Substanz an den Punkten, wo sich „ponderable Atome" im Raum befinden.

Von diesen Gedanken war zur Zeit, als Riemann sie niederschrieb[1]), der erste schon alt, der zweite vollständig neu. Beide treten übrigens aus dem Rahmen der damaligen Physik, die — wenigstens in Deutschland — von dem Glauben an Fernkräfte ganz beherrscht war, völlig heraus und würden, wenn sie gleich in die Öffentlichkeit gekommen wären, jedenfalls als Hypothesen von grofser Kühnheit aufgenommen worden sein. Jetzt aber ist es schon nichts Seltenes mehr, den ersteren Gedanken aussprechen zu hören, den zweiten hingegen finden wir heute noch eben so kühn, als er zu Anfang der fünfziger Jahre sein mochte, ja noch wohl kühner und verwegener, denn das Dogma von der Erhaltung der Materie bildet gegenwärtig mehr als jemals die Grundlage aller physikalischen und chemischen Theorien. Nie ist auch meines Wissens der Riemannschen Ansicht, dafs da, wo ponderable Materie im Raum sich befindet, fortwährend nicht etwa blos Energie in irgend einer Form, sondern der substantielle Träger dieser Energie, nämlich die Materie selbst, absorbiert werde und aus der Erscheinungswelt verschwinde, von irgend einem Physiker beigepflichtet worden.

1) März 1853, wie aus einer eigenhändigen Anmerkung hervorgeht

Fragen wir nun, in welcher Weise diese extremste aller Absorptionstheorien von ihrem Urheber weiter behandelt und auf einen mathematischen Ausdruck gebracht worden ist, so genügt es an dieser Stelle, das Riemannsche Resultat allein ins Auge zu fassen und bezüglich der Ableitung desselben auf Seite 504 und 505 des vorhin erwähnten Buches zu verweisen. Dieses Resultat liegt vor in einem „Wirkungsgesetze", ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{\partial ds}{dt} = \int_{-\infty}^{t} \frac{dV' - dV}{dV} \psi(t - t') \partial t' + \int_{-\infty}^{t} \frac{ds' - ds}{ds} \varphi(t - t') \partial t'.$$

Über die Bedeutung desselben und namentlich über die Trennung in zwei Integrale spricht sich Riemann folgendermaſsen aus[1]):

„Die Wirkungen ponderabler Materie auf ponderable Materie sind:

1) Anziehungs- und Abstoſsungskräfte umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung.

2) Licht und strahlende Wärme.

Beide Klassen von Erscheinungen lassen sich erklären, wenn man annimmt, daſs den ganzen unendlichen Raum ein gleichartiger Stoff erfüllt, und jedes Stoffteilchen unmittelbar nur auf seine Umgebung einwirkt. Das mathematische Gesetz, nach welchem dies geschieht, kann zerfällt gedacht werden

1) in den Widerstand, mit welchem ein Stoffteilchen einer Volumänderung, und

2) in den Widerstand, mit welchem ein physisches Linienelement einer Längenänderung widerstrebt.

Auf dem ersten Teil beruht die Gravitation und die elektrostatische Anziehung und Abstoſsung, auf dem zweiten die Fortpflanzung des Lichtes und der Wärme und die elektrodynamische oder magnetische Anziehung und Abstoſsung."

Für die Gravitation soll also nur das Integral

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{dV' - dV}{dV} \psi(t - t') \partial t'$$

in Betracht kommen. Von den darin enthaltenen Gröſsen ist gesagt: „dV bezeichnet das Volumen eines unendlich kleinen Stoffteilchens zur Zeit t, dV' das Volumen desselben Stoffteilchens zur Zeit t'." In Betreff der Funktion ψ aber findet sich bei Riemann nichts weiter vor als die Frage:

1) a. a. O. S. 506.

„Wie müssen nun die Funktionen ψ und φ beschaffen sein, damit Gravitation, Licht und strahlende Wärme durch den Raumstoff vermittelt werden?“

Da eine Antwort hierauf nirgendwo gegeben wird, so darf man schon deshalb das Riemannsche Wirkungsgesetz wohl als ziemlich inhaltsleer bezeichnen; überdies aber haftet auch noch an dem Faktor $\frac{dV' - dV}{dV}$ ein nicht unwichtiges Bedenken. Wie vorhin angeführt, hat Riemann von seinem „Raumstoff“ ausdrücklich vorausgesetzt, dafs er eine „inkompressible homogene Flüssigkeit“ sei. Damit ist ausgesprochen, erstens, dafs jener Stoff überall, wo er sich befindet, die gleiche Dichtigkeit haben müsse, sonst wäre er nicht homogen, und zweitens niemals und nirgendwo dichter werden könne, als er eben ist, sonst würde er nicht inkompressibel sein. Daher bleibt bezüglich etwaiger Veränderungen seiner Dichtigkeit nur noch die Möglichkeit übrig, dafs dieselbe mit der Zeit immer geringer würde. Allein auch das geht nicht an, und zwar aus einem Grunde, dessen Erörterung uns auf die Eingangs erwähnte Riemannsche Abhandlung: „Gravitation und Licht“ führt, die von Herrn Prof. Weber der bis jetzt betrachteten dritten als zweite vorangestellt worden ist. Dort heifst es nämlich zunächst: „Wie[1]) sich aus den Bewegungsgesetzen selbst ergeben wird, behält der Stoff, wenn er in Einem Zeitpunkte überall gleich dicht ist, stets allenthalben die gleiche Dichtigkeit. Ich werde diese daher zur Zeit t überall $= 1$ annehmen.“ — Sodann heifst es drei Seiten später: „Die Gleichung (I) beweist unsere frühere Behauptung, dafs bei der Stoffbewegung die Dichtigkeit ungeändert bleibe; denn

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt,$$

welches zufolge dieser Gleichung $= 0$ ist, drückt die in das Raumelement $dx_1\, dx_2\, dx_3$ im Zeitelement dt einströmende Stoffmenge aus, und die in ihm enthaltene Stoffmenge bleibt daher konstant.“

Durch dieses Resultat seiner Rechnung schliefst Riemann also auch die Möglichkeit einer fortwährenden Verdünnung seines Raumstoffes aus. Wenn daher irgend ein Stoffteilchen zur Zeit t das Volumen dV hat, und wenn es, „wie sich aus den Bewegungsgesetzen ergiebt“, niemals irgend eine Veränderung seiner Dichtigkeit erleiden kann, so hat es zur Zeit t' offenbar auch noch das Volumen dV, oder, was dasselbe besagt, $dV = dV'$. Daher ist unweigerlich für jeden beliebigen Wert von t der Bruch $(dV' - dV)/dV$ gleich Null zu setzen, und damit wird dann das Riemannsche Wirkungsgesetz:

---

1) a. a. O. S. 498.

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{dV' - dV}{dV} \psi(t-t') \partial t'$$

erst recht inhaltslos.

Man darf sich gewifs darüber verwundern, dafs Riemann in seiner zweiten Abhandlung die allgemeine Konstanz der Dichtigkeit und damit die Volumkonstanz jeder beliebig gewählten Stoffmenge beweist und dennoch in der dritten auf die Veränderungen dieses Volumens ein Wirkungsgesetz für die Gravitation aufbaut. Dieser sehr auffällige Widerspruch ist nun aber, wie mir scheint, auf die folgende Weise zu erklären.

Aus der von Dedekind verfafsten Lebensbeschreibung Riemanns[1]) geht hervor, dafs letzterer sich mit dem Gravitationsproblem zu zwei verschiedenen Zeiten, und beidesmal sehr eifrig und angelegentlich beschäftigt hat. Zuerst war es im Anfang des Jahres 1853, vor seiner Habilitation, dann aber nach derselben noch einmal, gegen den Schlufs des Jahres 1853 und im Anfang von 1854. Über diese zweite Periode schreibt er selbst am 28. Dec. 1853: „Meine andere Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Elektricität, Galvanismus, Licht und Schwere hatte ich gleich nach Beendigung meiner Habilitationsschrift wieder aufgenommen und bin mit ihr soweit gekommen, dafs ich sie in dieser Form unbedenklich veröffentlichen kann.“ In einem Brief vom 26. Juli 1854 erwähnt er nochmals, dafs er sich nach Fertigstellung der Habilitationsschrift wieder in seine „Untersuchung über den Zusammenhang der physikalischen Grundgesetze vertieft“ habe, und dafs er sogar „teils wohl infolge zu vielen Grübelns, teils infolge des vielen Stubensitzens“ erkrankt sei. — Welche von beiden in den „Gesammelten Werken“ uns vorliegenden Abhandlungen ist nun wohl die Frucht dieser zweiten „Vertiefung?“ Auf welche bezieht sich die Äufserung, dafs er seine Arbeit „in dieser Form unbedenklich veröffentlichen könne?“

Die von Herrn Prof. Weber an die letzte Stelle gesetzte kann es gar nicht sein; denn Riemann selbst hat der Überschrift: „Neue mathematische Principien der Naturphilosophie“ die Bemerkung beigefügt: „gefunden am 1. März 1853“. Will man also nicht etwa annehmen, dafs diese zur Veröffentlichung bestimmte Abhandlung gänzlich verloren gegangen sei, so bleibt nichts übrig, als die vorhergehende, mit der Überschrift: „Gravitation und Licht“ versehene dafür zu halten.

Ist das richtig, dann klärt sich der eben dargelegte Widerspruch sehr einfach auf, denn dann dürfen wir einen wesentlichen Erfolg jener zweiten Vertiefung eben darin erblicken, dafs das Resultat der ersten, wie es in

---

1) a. a. O. S. 515.

dem „Wirkungsgesetz der Gravitation" vorliegt, von Riemann selbst als unrichtig erkannt und verlassen wurde. Dieses Wirkungsgesetz gründet sich ja auf die veränderliche Dichtigkeit des Raumstoffs, und letztere auf die verwegene Hypothese einer unaufhörlichen Abnahme der in der Welt vorhandenen Materie. In dem Aufsatze: „Gravitation und Licht" hingegen finden wir von dieser Hypothese keine Spur mehr, sondern nur noch die Annahme einer Vermittelung der Kraftwirkung durch ein kontinuierliches flüssiges Medium, und für dieses letztere wird sodann „aus den Bewegungsgesetzen selbst" die Konstanz der Dichtigkeit abgeleitet. Damit ist dem ganzen früheren Wirkungsgesetz der Boden entzogen. — Auf diese Weise stellt sich uns der auffällige Widerspruch nicht mehr als ein Fehler, sondern als ein Fortschritt im Gange der Untersuchung dar.

Glücklicherweise war ich Dank der entgegenkommenden Freundlichkeit des Herrn Prof. Weber in der Lage, denjenigen Teil der hinterlassenen Handschriften Riemanns, welcher sich auf Naturphilosophie bezieht, eingehend zu prüfen und habe auch in diesen noch einige Anhaltspunkte für die Richtigkeit meiner Anschauung entdeckt.

Auf einem mit Bleistift geschriebenen Bogen befindet sich nämlich obenan ein Teil des Aufsatzes über die „Neuen mathematischen Principien der Naturphilosophie", welcher, wie erwähnt, an dritter Stelle abgedruckt ist; es sind dies einige Sätze von Seite 503, sowie die dort befindliche Fufsnote. Dann aber folgen nach einem kleinen Zwischenraum zwei etwas verschiedene Anfänge des Konceptes für die an zweiter Stelle abgedruckte Arbeit: „Gravitation und Licht".

Dieser Umstand läfst, wie mir scheint, keinen Zweifel daran übrig, dafs die ersten Gedanken von No. 2 später koncipiert worden sind, als der Aufsatz No. 3. — Was nun aber die weitere Ausführung betrifft, so ist unter den vorhandenen Blättern, deren Inhalt sich auf No. 3 bezieht, das deutlichste, sauberste und vollständigste zweifellos noch keine für den Druck bestimmte Reinschrift. Dies geht klar hervor aus den mancherlei darin vorkommenden Verbesserungen, Wiederholungen, Textlücken und Gedankensprüngen. Von No. 2 hingegen sind mehrere gute, und darunter ein sehr sorgfältig geschriebenes Manuskript vorhanden, auf welches ebensowohl äufserlich, wie inhaltlich die vorhin angeführte Briefstelle Riemanns pafst, dafs seine Arbeit „in dieser Form" für die Veröffentlichung bereit sei.[1])

---

1) Auf meine Darlegung der vorstehenden Gründe wurde ich von Herrn Prof. Weber, dem Herausgeber des Riemannschen Nachlasses, durch eine zustimmende Äufserung erfreut und in einem späteren Schreiben auch durch die

Aus all diesen Umständen scheint mir hervorzugehen, dafs die Arbeit No. 2 eine spätere und fertigere[1]), No. 3 hingegen eine frühere sei und Ansichten vertrete, welche bei der zweiten „Vertiefung" des Autors in seinen Gegenstand gänzlich verlassen worden sind. Bekanntlich hielt Riemann in späteren Jahren Vorlesungen über Schwere, Elektricität und Magnetismus, welche Hattendorf herausgegeben hat. Von dem vorhin angeführten „Wirkungsgesetz der Gravitation" habe ich auch in diesem Buche keine Spur finden können.

II. Absorption von Energie.

A. Euler.

Während meines Wissens Riemann allein es versucht hat, die Erscheinungen der Schwere durch ein Verschwinden von Substanz zu erklären, sind die Gravitationstheorien, welche irgend eine Art von Energie-Absorption zu Grunde legen, sehr zahlreich und mannigfaltig. Bei all diesen Theorien kommt es offenbar wesentlich an auf folgende Fragen:

1) Bei welcher Substanz und in welcher Form ist jene Energie vor ihrer Absorption vorhanden?

2) Wie und wo und warum wird Energie absorbiert?

3) Wie wird aus dieser Absorption das Näherungsbestreben, die sogenannte Centripetalkraft, abgeleitet?

4) Wie wird diese Kraft auf einen bestimmten Ausdruck gebracht, und zwar:

a) in Bezug auf ihre Abhängigkeit von derjenigen Energiemenge, von welcher die absorbierte Energie ein Teil ist,

b) in ihrer Abhängigkeit von der Entfernung der gravitierenden Körper,

c) in ihrer Abhängigkeit von der Masse der letzteren.

Bezüglich der beiden letzten Punkte wird man noch, falls sich Abweichungen von dem Newtonschen Gesetz ergeben, seine Aufmerksamkeit auf die Frage zu richten haben:

Mitteilung, dafs er in der eben bevorstehenden neuen Auflage von Riemann die beiden Stücke III_2 und III_3 vertauschen und in einer Bemerkung meine Gründe anführen werde.

1) Auf den Inhalt derselben braucht hier nicht weiter eingegangen zu werden, weil Riemann darin die Substanz-Absorption eliminiert und keine andere Absorption irgendwelcher Art dafür eingeführt hat. Damit aber ist die ganze Überlegung aus dem Gesichtsfelde der gegenwärtigen Arbeit herausgeschoben.

5) Wie werden die Abweichungen von dem Newtonschen Gesetz auf einen bestimmten mathematischen Ausdruck gebracht? —

Da ich eine Reihe von Versuchen der eben bezeichneten Art in meinem Buche „Über das Rätsel der Schwerkraft“ schon eingehend besprochen habe, so beschränke ich mich hier auf die Behandlung einiger wichtiger dort übergangener oder später erst veröffentlichter Gravitationstheorien und nehme die Eulersche zuerst vor, weil diese mit den vorhin dargelegten Gedanken Riemanns in einem deutlich erkennbaren Zusammenhange steht.

Riemann scheint gewufst zu haben, dafs er mit seinen Untersuchungen über das Problem der Schwere wenigstens zum Teil in den Fufsstapfen Eulers wandelte. Zwar kommt in den vorhin besprochenen gedruckten Abhandlungen Eulers Name, soviel ich sehe, nirgendwo vor, allein unter seinen nachgelassenen Papieren fand ich ein Blatt, wo derselbe genannt wird und zwar in einer mit Bleistift niedergeschriebenen Bemerkung, welche also lautet:

„Im Folgenden ist der Versuch gemacht, die allgemeinen Gesetze der toten Natur auf ihren gemeinschaftlichen tieferen Grund zurückzuführen. Für den dabei einzuschlagenden Weg dienen als Norm die Sätze:

1) dafs jede Wirkung eines Dinges auf ein anderes, deren Gröfse von der Entfernung abhängt, eine durch den Raum fortgepflanzte sein mufs.

Dieser Satz wurde von Newton und Euler stets festgehalten; erst später, durch den zusammenwirkenden Einflufs der Encyklopädisten und Kants, wie es scheint, ist er aus der naturwissenschaftlichen Litteratur verdrängt worden.

In der That ist es zwar nicht gerade unmöglich, den Umstand, dafs die Gröfse einer Wirkung von der Entfernung abhängt, auf andere Weise zu erklären, aber jeder Versuch, dies zu thun, führt zu äufserst künstlichen und daher unwahrscheinlichen Annahmen.

2) Dafs die Fortpflanzung aller Wirkungen von ponderablen Körpern auf ponderable Körper durch ein den Raum stetig erfüllendes Medium geschieht. —“

Hier wird Euler nur als Mitvertreter für den ersten Satz angeführt, thatsächlich hat er aber nicht blos diesen ersten, sondern auch den zweiten und überdies noch einen dritten vertreten, welcher dem Standpunkte der dritten Riemannschen Abhandlung vollkommen entspricht, den Satz nämlich, dafs die Ursache der Schwere auf Absorption beruhe und auf dem Drucke, welchen die Körper von dem raumerfüllenden Stoff, der sie rings umgiebt und durchdringt, unaufhörlich erleiden. Ja es ist merkwürdig, in wie enger und inniger Beziehung die Riemannsche Theorie überdies noch zu einer bestimmten Frage steht, welche Euler am Schlusse seiner

Untersuchungen über die Schwere als das erste Ziel jeder weiteren Forschung hingestellt hatte. Der letzte Hauptsatz seiner Abhandlung[1]) enthält nämlich die Worte: „Alles kommt demnach darauf an, dafs man die Ursache ergründe, warum die elastische Kraft (des Äthers) von einem jeglichen Himmelskörper vermindert werde . . . .“

Riemanns Hypothese giebt hierauf die bestimmte Antwort: Weil in allen ponderablen Atomen unaufhörlich Äther verschwindet. — Euler selbst würde zu einem solchen Ausspruche wohl kaum den Mut gehabt haben; er überläfst die Ergründung jener „Ursache“ seinen Nachfolgern und begnügt sich bei seiner mathematischen Entwickelung des Problems mit der Annahme, dafs der Druck des Äthers nicht überall gleich, sondern in der Richtung auf den Mittelpunkt eines jeden Gravitationscentrums zu „dergestalt abnehme, dafs die Verminderung sich umgekehrt wie die Entfernung davon verhalte“.

Aus dieser letzteren Annahme wird derjenige Teil des Newtonschen Gesetzes, welcher sich auf die Abhängigkeit der Schwerkraft von der Entfernung bezieht, auf folgende einfache Weise abgeleitet. — Der angezogene Körper sei zerlegt in Säulen von der Grundfläche a^2 und der Höhe b, welche letztere gegen ein Gravitationscentrum gerichtet ist. Die Entfernungen der beiden Grundflächen von diesem Centrum seien x und $x + b$, der Druck des Äthers in unendlicher Entfernung von jedem Gravitationscentrum sei h, dann ist der Druck auf die beiden Endflächen der Säule $a^2\left(h - \frac{A}{x}\right)$ und $a^2\left(h - \frac{A}{x+b}\right)$, wobei A irgend einen konstanten Koefficienten bedeutet. Hieraus ergiebt sich in der Richtung auf das anziehende Centrum ein Drucküberschufs von der Gröfse: $\frac{A \cdot a^2 b}{x(x+b)}$. Ist nun b gegen x unendlich klein, so geht dieser Ausdruck in die Form $\frac{A \cdot a^2 b}{x^2}$ über, und hieraus ergiebt sich durch Summation der Teile unter Vernachlässigung der Variationen von x schliefslich der Bruch $\frac{A \cdot V}{x^2}$, wobei V das Volumen des angezogenen Körpers bedeutet.

Weniger einfach gestaltet sich die Einführung des Massenproduktes, und die beiden Faktoren desselben werden sogar auf verschiedene Weise in das Wirkungsgesetz hineingebracht. Bezüglich des angezogenen Körpers bedient Euler, um statt des Volumens V die Masse in den Zähler des obigen Ausdrucks hineinzubringen, sich der in seiner Naturlehre zu den

1) Opera Postuma II Cap. 19. No. 146. Vgl. hierzu auch meine Abhandlung über „Eulers Theorie von der Ursache der Gravitation“ in der hist. lit. Abteilung d. Zeitschr. für Math. u. Phys. XXVI, 1.

mannigfaltigsten Zwecken benutzten Annahme von den zweierlei Poren, den offenen und den geschlossenen, die jeder Körper haben soll. Dann bildet er den Begriff der „wahren Gröfse eines Körpers“, welche gleich dem Reste ist, der übrig bleibt, wenn man von seiner scheinbaren Gröfse das Volumen sämtlicher Poren abzieht. Wofern nun einerseits das Volumen der geschlossenen Poren im Verhältnis zu dem der offenen als gering angenommen wird, und wofern andererseits der Äther durch die letzteren völlig ungehindert ein- und austreten kann, so darf man unter V sich das wahre Volumen des Körpers denken. Dieses ist aber der Masse proportional, wenn mit diesem Worte nichts anderes, als die Menge der in einem Körper vorhandenen Materie bezeichnet wird, und hiermit ist dann der eine Faktor des Newtonschen Massenproduktes in den Zähler des vorhin bezeichneten Bruches eingeführt. — Der zweite Faktor, die Masse des anziehenden Körpers nämlich, soll nun in der Gröfse A stecken. Euler läfst ein und dasselbe Objekt von mehreren Gravitationscentren zugleich angezogen werden; die entsprechenden Entfernungen seien x, y, z, v etc. Dann ist die elastische Kraft des Äthers am Orte des angezogenen Körpers gleich

$$h - \frac{A}{x} - \frac{B}{y} - \frac{C}{z} - \frac{D}{v} - \text{etc.},$$

und nun wird einfach bemerkt, die Gröfsen A, B, C, D seien den Massen der einzelnen Gravitationscentra proportional. Von irgend welcher Begründung dieser Behauptung aber findet sich keine Spur, vielmehr weist Euler diese Aufgabe einfach seinen Nachfolgern zu, indem er den vorhin citierten Hauptsatz dahin ergänzt: es müssen die Ursachen ergründet werden „warum diese Verminderung (des Ätherdrucks) sich einesteils wie die Massen des himmlischen Körpers und andernteils umgekehrt wie die Entfernungen von demselben verhalten“. Dem fügt er als einzigen Fingerzeig am Schlusse des Kapitels noch die Worte bei: „Der Grund mufs augenscheinlich in der groben Materie, aus welcher der Körper besteht, gesucht werden, und die grobe Materie mufs in dem Äther eine Bewegung veranlassen, wodurch das Gleichgewicht gehoben wird. Wenn man erst soweit gekommen, so ist leicht zu zeigen, dafs solchergestalt der Druck des Äthers vermindert werden müsse.“

Hiermit schliefst Euler seine Entwickelungen ab. Prüfen wir dieselben nun nach den oben angezeigten fünf Gesichtspunkten, so ist zu sagen:

1) Vorhanden ist die Energie im Äther, und zwar nicht als kinetische, sondern als potentielle Energie, nämlich als Druck einer elastischen Flüssigkeit.

2) Die Energie wird absorbiert von den ponderablen Körpern an

deren Oberflächen, und zwar nicht nur an den äufseren, sondern, da die Körper porös sind, auch an den inneren Oberflächen. Eine Ursache für diese Absorption wird nicht angegeben.

3) Das Näherungsbestreben wird durch die Verschiedenheit des Druckes begründet, welchen der angezogene Körper beiderseits erleidet; auf der dem anziehenden Körper zugewandten Seite ist dieser Druck nämlich deshalb geringer, weil diese Seite näher bei dem Orte ist, wo die Absorption stattfindet.

4a) Die Abhängigkeit der absorbierten Energie von der Energie des Mediums bleibt unbestimmt.

b) Der Ausdruck für die Abhängigkeit der Absorption von der Entfernung beruht auf einer willkürlichen Wahl, welche getroffen wurde blos mit Rücksicht auf den Zweck, dafs die erste Differenz einen Bruch liefern solle, in dessen Nenner das Quadrat der Entfernung vorkommt. Dabei müssen aber die Dimensionen des angezogenen Körpers im Verhältnis zur Entfernung vernachlässigt werden.

c) Die Masse des angezogenen Körpers wird eingeführt auf Grund der Voraussetzung, dafs der Äther durch alle Poren desselben ohne jedes Hindernis ein- und austreten könne. Die Masse des anziehenden Körpers wird ohne jede Begründung eingeführt mit dem Hinweis auf künftige Forschung.

5) In den mehrfachen Vernachlässigungen, welche bei der Rechnung vorgekommen sind, wären wohl Abweichungen von dem Newtonschen Gesetze begründet. Euler hat dieselben aber nicht ferner beachtet, somit auch nicht auf einen mathematischen Ausdruck gebracht.

B. Dellingshausen.

Die Vorstellung einer lückenlosen Erfüllung des Raumes mit Materie ist der gemeinschaftliche Boden, auf welchem mit Riemann und Euler auch der Baron von Dellingshausen steht; in der Art aber, wie auf dieser Basis eine Lösung des Gravitationsrätsels versucht wird, weicht letzterer von den beiden ersten wesentlich ab.

Zunächst mufs gesagt werden, dafs die Dellingshausensche Theorie auch noch in ihrer letzten mir bekannt gewordenen Fassung[1]) an einem inneren Widerspruche leidet, welcher das ganze Gebäude einfach über den Haufen wirft. Dieser Schriftsteller gehört nämlich zu der Zahl jener

1) Die Schwere oder das Wirksamwerden der potentiellen Energie, von Baron N. v. Dellingshausen, Stuttgart 1884.

wenigen Physiker, welche den zweiten Teil des Galileischen Trägheitsgesetzes nicht unter die Voraussetzungen aufnehmen wollen, auf die sie ihre Schlüsse gründen und der Meinung sind, sie könnten auch ohne denselben alle jene Erscheinungen erklären, welche man sonst auf das sogenannte Beharrungsvermögen zurückführt.

Dies geschieht in dem erwähnten Buche auf eine scheinbar sehr einfache Weise. — Dellingshausen zerlegt in Gedanken die gesamte kontinuierliche Materie in materielle „Punkte" und unterwirft die Bewegungen der letzteren einer eingehenden Betrachtung, wobei folgende grundlegenden Sätze vorkommen:

„Jeder Punkt beschreibt seine eigene Bahn und niemals dürfen die Koordinaten[1]) zweier Punkte ... für einen bestimmten Zeitmoment gleich werden. ... Keine Elasticität oder sonstigen Kräfte treiben im Innern der Körper ihr geheimnisvolles Spiel, sondern jeder Punkt schiebt und wird geschoben, wo ihm die übrigen Punkte durch ihre Bewegung Platz dazu lassen; kein Beharrungsvermögen ist erforderlich, um diese Bewegungen aufrecht zu erhalten, sondern ihre ununterbrochene Fortdauer beruht auf der vollkommenen Gegenseitigkeit aller Wechselwirkungen, wodurch ein einzelner Punkt nicht plötzlich stille stehen kann, während alle übrigen Punkte ihre Bewegungen fortsetzen."

Freilich! ein einzelner Punkt, auch wenn er kein Beharrungsvermögen hätte, würde schon wegen der angenommenen Undurchdringlichkeit in dem Gedränge der übrigen nicht plötzlich stille stehen können. Aber warum überhaupt drängen denn die übrigen? warum „setzen sie ihre Bewegungen fort?"

Nehmen wir einmal an, die materielle Welt sei wirklich so eingerichtet und beeigenschaftet, wie Dellingshausen es angiebt, und bis jetzt habe eine ausreichende Zahl von irgend welchen Ursachen — mögen diese sein, welche sie wollen — sämtliche grofsen und kleinen Bewegungen im Universum hervorgebracht. Nehmen wir ferner an, von dem gegenwärtigen Augenblicke ab würde die Materie den genannten Eigenschaften ganz allein überlassen, und alles, was sonst noch darin gewaltet und gewirkt haben möchte, verschwände plötzlich: was müfste geschehen?

---

1) a. a. O. S. 12. Dieses mit Benutzung eines mathematischen Terminus ausgedrückte Verbot ist offenbar mit der Voraussetzung, dafs die Materie undurchdringlich sei, inhaltlich einfach identisch. D. aber erblickt darin eine Begründung der Undurchdringlichkeit und sagt: „die Punkte schliefsen sich daher gegenseitig aus und begründen dadurch einen Zustand, den man bisher als die Undurchdringlichkeit der Materie bezeichnet hat, der aber allein auf der Harmonie der inneren Bewegungen beruht."

Jeder materielle Punkt ist im Besitze seiner eigenen Koordinaten. Da die Materie undurchdringlich ist, haben wir nirgendwo eine Verdichtung; da sie kontinuierlich ist, nirgendwo eine Lücke. Da das Beharrungsvermögen fehlt, hat kein Punkt das Streben, in der bis dahin beschriebenen Bahn sich weiter zu bewegen. Da die Elasticität fehlt, wird kein Punkt von seinen Nachbarn nach irgend welcher Richtung hingedrängt. Da es keine Fernkraft giebt, so bleibt er auch von den ihm nicht benachbarten Punkten gänzlich unbehelligt. — Also wird jeder materielle Punkt von nun an im friedlichen, unangefochtenen Besitze seiner augenblicklichen Koordinaten verharren; die ganze Welt kommt sofort in Ruhe und bleibt in Ruhe.

Wenn daher die Dellingshausensche Materie auch fähig wäre zu Bewegungen, die ihr von irgendwoher angethan würden, so ist sie doch unfähig, vermöge ihrer eigenen Eigenschaften allein irgend eine Bewegung in sich zu erhalten und fortzusetzen. Daher würde mit einer solchen Weltsubstanz ein Philosoph, welcher nicht nur einen *primus motor,* sondern auch noch einen unaufhörlich weiter wirkenden immateriellen Treiber und Lenker zu Hülfe nimmt, vielleicht arbeiten können, die „kinetische Naturlehre“ aber kann, wenn sie konsequent sein will, mit diesem Stoffe, soviel ich abzusehn vermag, nicht das mindeste anfangen. Das ganze Gebäude der „kinetischen“ Gravitationstheorie und alle Schlüsse, welche Dellingshausen auf die Fortdauer irgend welcher Bewegungen gründet, werden daher durch seine vorhin angeführten grundlegenden Sätze völlig untergraben. Überhaupt würde er nichts, auch nicht den kleinsten Schritt zu Stande gebracht haben, wenn er das abgewiesene und ausgemerzte „Beharrungsvermögen“ nicht nachher doch wieder durch eine Hinterthür hereingebracht hätte. Dieser interessante Vorgang vollzieht sich auf folgende sonderbare Weise:

Dellingshausen sagt[1]): „Die inneren Bewegungen der Körper sind die letzten mechanischen Ursachen, welche allen Naturerscheinungen zu Grunde liegen. . . . Keine Erscheinung . . . darf als erklärt betrachtet werden, bevor sie nicht auf diese Bewegungen zurückgeführt ist; sie selbst aber bedürfen keiner weiteren Erklärung mehr . . . weil an den einzelnen (materiellen) Punkten überhaupt nichts mehr zu erklären übrig bleibt . . . . Die inneren Bewegungen der Körper tragen daher ihre Ursache in sich selbst, und es liegt keine Veranlassung vor, nach einer weiteren Erklärung zu suchen, wodurch unserem Kausalitätsbedürfnis vollkommen genügt wird.“ — Und auf die Frage, von welcher Art denn diese innere Bewegung der materiellen Punkte sei, antwortet Dellingshausen: „Die inneren Be-

1) a. a. O. S. 12.

wegungen der ruhenden Körper sind Rotationen. .... Aus der Vereinigung der rotierenden und translatorischen Bewegungen eines Punktes resultieren aber, wie leicht ersichtlich .... schraubenförmige Kurven, welche uns somit die wahre Form für die Bewegungen der Punkte im Raume darstellen.“

Diese „schraubenförmigen Kurven“ also sind diejenigen Bewegungen, bei denen nach D. unser Kausalitätstrieb sich zufrieden giebt mit dem Bescheide: dieselben geschehen von selbst; Ursachen dafür zu suchen „liegt keine Veranlassung vor“. — Demgegenüber sagt bekanntlich die Physik seit Galilei: Ein bewegter Körper oder ein materieller Punkt behält die Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung in gerader Linie „von selbst“ bei; erst wenn er eines oder das andere oder beides nicht beibehält, fragen wir nach Ursachen, d. h. nach der Kraft, welche diese Veränderung bewirkt habe.

Das ist also der ganze Unterschied: Unser bisher geradlinig gewesenes „Beharrungsvermögen“ hat Dellingshausen zu unbestimmten Schraubenlinien zusammen gekrümmt und es dann in dieser Form seiner Theorie wieder einverleibt!

Auf diese Weise setzte er, wie es scheint, seine Materie, welcht sonst hoffnungslos stagniert haben würde, wiederum in den Stand, allerlei kreisende und wirbelnde Bewegungen annehmen und fortsetzen zu können; allein nicht ohne Grund wirft ihm schon Rosenberger[1]) vor, er habe gar nicht nachgewiesen, wie in einer „homogenen, unzusammendrückbaren, kontinuierlichen Materie einzelne Bewegungen auch nur möglich“ seien. Dafs diese Möglichkeit keineswegs auf der Hand liegt, ergiebt sich z. B. aus den von Paul du Bois-Reymond gegen dieselben gemachten Angriffen.[2])

Allein wenn man davon auch ganz absieht, so scheint mir völlig klar zu sein, dafs auf dem Boden einer physikalischen Grundvorstellung, welche jedem einzelnen materiellen Punkte unter Entbindung von aller Grundbeifügung die Bewegung in unbestimmten Schraubenlinien gestattet, der Aufbau einer Mechanik der Materie ganz unmöglich ist. —

Vielleicht wäre es gerechtfertigt, hiermit die Besprechung der Dellingshausenschen Theorie abzubrechen, aber ich will doch noch die früher aufgestellten fünf Hauptfragen auch auf dieselbe anwenden und in Kürze beantworten.

1) Die bei der Gravitation in Betracht kommende Energie ist nach Dellingshausen eine dreifache. Zunächst nämlich wird die Voraus-

1) Gesch. d. Phys. III 591.

2) „Über die Grundlagen der Erkenntnis in den exakten Naturwissenschaften“. S. 24 u. 25.

setzung gemacht, dafs die den Weltenraum kontinuierlich ausfüllende, undurchdringliche Substanz von wellenförmigen Bewegungen durchzogen sei. Hierunter befinden sich sowohl stehende als fortlaufende Wellen, und jede Gattung wird zu besonderen Zwecken verwandt.

Gegen diese Grundvoraussetzung ist zu erinnern, dafs Wellen in einem solchen Fluidum etwas der heutigen Physik, soviel ich weifs, Fremdes sind. Sie entsprechen offenbar weder dem, was wir unter Luftwellen, noch was wir unter Wasserwellen uns vorzustellen gewohnt sind; noch weniger können sie den wellenförmigen Bewegungen in festen Körpern gleichen. Bei Luftarten nehmen wir ja die Zusammendrückbarkeit der Substanz, bei Flüssigkeiten eine freie Oberfläche, bei festen Körpern ersteres oder beides zu Hülfe, um Wellenbewegungen zu erzielen. Wie D. sie nun ohne Zusammendrückbarkeit bei einer den ganzen Weltraum kontinuierlich erfüllenden Substanz zu Stande bringen will, darüber suche ich bei ihm vergebens Aufklärung. Ebensowenig finde ich den Hinweis auf irgend eine Litteraturstelle, wo die Möglichkeit solcher Bewegungen nachgewiesen ist. Wahrscheinlich ist es dieser fundamentale Mangel, welcher Herrn Rosenberger zu dem Ausspruch veranlafst hat: „Bevor nicht der Mathematiker die Wellenbewegungen und die Interferenzen derselben in Dellingshausens Materie aus den einfachen Bewegungsgleichungen abgeleitet hat, eher wird auch dem Physiker nicht die ganze Theorie als etwas mehr, denn ein Produkt dichtender Phantasie erscheinen.“

Der zweite Teil des bei den Gravitationserscheinungen in Betracht kommenden Energievorrats steckt in den schraubenförmigen Bewegungen der einzelnen Teilchen der gravitierenden Körper, ist also, wie der eben beschriebene erste, kinetischer Natur. Im Gegensatz dazu wird der dritte Teil dieses Vorrats „potentiell“ genannt und seine Existenz folgendermafsen erläutert: Wenn ein materieller Punkt von zwei einander entgegengesetzten Wellen gleichzeitig getroffen wird, so kommt der Punkt in Ruhe und verliert also seine kinetische Energie vollständig. In diesem Falle jedoch erhält er eben das, was D. potentielle Energie nennt.

Worin besteht also die potentielle Energie der ruhenden Punkte? — Darin, dafs in ihnen die Wellen „ohne sich zu vernichten, sich gegenseitig **neutralisieren.**“ — Der dritte Vorrat ist demgemäfs „die Energie der interferierenden und sich gegenseitig neutralisierenden[1]) Bewegungen“.

2) Was nun die Absorption der Energie betrifft, so äufsert Dellingshausen darüber Folgendes: „In derselben Weise, wie gegen die Licht-

1) a. a. O. S. 29. Das Wort ist da, aber eine Angabe über die zugehörige mechanische Vorstellung fehlt.

und Wärmewellen, müssen die Körper sich auch gegen die sie treffenden Ätherwellen verhalten und durch ihre Absorption ... eine störende Wirkung ... auf die Bildung der stehenden Wellen in dem Weltäther ausüben ... die Energie der Gravitationswellen wird durch ihre Centralkörper bestimmt, da für jede Ätherwelle, welche derselbe absorbiert, andere Ätherwellen als fortschreitende Wellen weiter bestehen und zur Bildung der Gravitationswellen beitragen müssen. ... Durch die Bewegungen, welche die Gravitationswellen den Weltkörpern (indem letztere die ersteren absorbieren) ununterbrochen zuführen, müfste die Temperatur derselben beständig zunehmen und zuletzt ins Unermefsliche steigen. Da solches nicht eintritt, so ist damit der Beweis geliefert, dafs der beständigen Zufuhr von Bewegung eine ebenso beständige Ableitung entgegenwirkt. .... Durch das Gleichgewicht der einstrahlenden Gravitationswellen und der ausgestrahlten Licht- und Wärmewellen wird die Eigenwärme der Weltkörper bestimmt" etc.

Wie aus diesen Äufserungen hervorgeht, besteht die sogenannte Absorption bei Dellingshausen lediglich darin, dafs die Körper die einströmenden Gravitationswellen einfach in Licht- und Wärmewellen umwandeln und sie als solche wieder herauslassen. Auf welche Weise die Körper das aber machen, darüber suche ich bei ihm vergebens Auskunft, doch ist wenigstens angegeben, wie er sich den Unterschied dieser beiden Wellenarten denkt. Derselbe soll nämlich weder in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, noch in der Wellenlänge, noch in der Schwingungsdauer gesucht werden dürfen, sondern in Folgendem: „Während sich die Licht- und Wärmewellen als transversale Schwingungen erwiesen haben, können die Bewegungen in den Gravitationswellen sich vielleicht (!) durch eine longitudinale Komponente auszeichnen und deshalb besonders dazu geeignet sein, Bewegungen ... in der Richtung der Fortpflanzung hervorzubringen."[1])

Also läuft die ganze Absorption darauf hinaus, dafs von den in einen Körper eindringenden Wellen diejenigen, welche eine „longitudinale Komponente" besitzen, ohne diese letztere aus dem Körper wieder austreten. — D. sagt in dem eben angeführten Satze, es „könne vielleicht" so sein, wie er es darstellt. Ob es aber so ist, und ev. wie diese Absorption zugehe, und warum sie so geschehe, das fügt er nicht bei. Und doch ist der Punkt, um den es sich bei dieser longitudinalen Komponente handelt, ein sehr wichtiger, nämlich die Beantwortung der Hauptfrage:

3. Wie wird aus der Absorption die Centripetalkraft abgeleitet? — Der Zweck nämlich, weshalb die Körper den eintretenden

1) a. a. O. S. 33.

Wellen gerade ihre longitudinalen Komponenten wegnehmen, besteht darin, dafs ihre eigenen Massenpunkte mit Hülfe dieser Komponenten in die Lage kommen sollen, ihre korkzieherartigen Bahnen etwas mehr auseinander zu dehnen. Wenn nun diese Dehnung beharrlich nach einer Richtung hin geschieht, so würde das gleichwertig erscheinen mit einer beschleunigten Bewegung des ganzen Körpers nach dieser Seite; und wenn nachgewiesen würde, dafs das eben die Seite ist, nach welcher hin sich in einiger Entfernung ein anderer Körper befindet, so wäre damit eine Art von Centripetalkraft konstruiert. Diesen Hauptteil seiner Theorie trägt D. folgendermafsen vor.[1])

„Indem die Gravitationswellen den frei beweglichen Körpern neue Bewegungen zuführen ... werden notwendigerweise gewisse Richtungsänderungen der inneren Bahnen der Körper hervorgebracht. Lassen sich nun diese Richtungsänderungen in einem freibeweglichen Körper als eine Zunahme des Steigungswinkels seinen inneren, nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten, schraubenförmigen Bewegungen darstellen, so erkennt man leicht, dafs die unmittelbare Folge davon eine relative Bewegung des Körpers in Bezug auf die Erde sein mufs. Durch die Zunahme des Steigungswinkels wird nämlich ... seine Bewegung in derselben Richtung beschleunigt. Wiederholt sich dieser Vorgang beständig von neuem, so ... wird (der Körper) dadurch in eine gleichförmig beschleunigte, nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtete Bewegung versetzt, d. h. in eine Bewegung, die wir als das Fallen der Körper bezeichnen. Die Beschleunigung der fallenden Körper ist somit (!) eine unmittelbare Folge der Formveränderungen, welche die inneren Bewegungen unter dem Einflusse der Gravitationswellen erleiden ...“

Diese ganze Beweisführung ruht auf den Schultern der beiden Sätze: „Lassen sich ... darstellen“ und: „Wiederholt sich dieser Vorgang beständig von neuem.“ Beide stehen aber, wie man sieht, blos als Bedingungssätze da, und ob und warum diese Bedingungen wirklich zutreffen, ist weder ausgeführt, noch durch den Ort, wo diese Ausführung zu finden wäre, begründet worden. Daher finde ich das „somit“ am Schlusse unberechtigt und kraftlos. — Die Möglichkeit, dafs umgekehrt die Schrauben von ihren eigenen „longitudinalen Komponenten“ einen Betrag an die Wellen abtreten könnten, hat D., soviel ich sehe, gar nicht besprochen, also auch nicht ausgeschlossen. Solange aber keine mechanischen Gründe dafür angegeben werden, warum dieser Komponentenaustausch immer in dem von

---

1) a. a. O. S. 40.

ihm vorausgesetzten Sinne stattfinden mufs, schwebt der Nachweis einer centripetalen Wirkung der Absorption in der Luft.

Die eben angeführten Sätze stehen dort, wo es sich um die Konstruktion der irdischen Schwere handelt. In einem späteren Abschnitte, nämlich da, wo die kosmische Seite der Frage ins Auge gefafst wird, mufste der vorliegende Punkt No. 3 natürlich wieder zur Sprache kommen. Aber bei dieser Gelegenheit wird der gerügte Mangel nicht etwa gehoben, sondern es heifst dort[1]) einfach ohne Ortsangabe: „Wir fanden, dafs durch die Veränderungen der inneren Bewegungen, welche die Gravitationswellen in den freibeweglichen Körpern hervorbringen, diese in eine beschleunigte, nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtete Bewegung versetzt werden ... Genau denselben Einflufs ... üben die Gravitationswellen auch auf die einzelnen Weltkörper aus und versetzen dieselben dadurch in eine gegen einander gerichtete Bewegung."

4) Bezüglich der Frage nach der mathematischen Formulierung des absorbierten Energiebetrages ist wenig zu bemerken. Die Abhängigkeit desselben von der Energie des Mediums wird als einfache, direkte Proportionalität hingestellt.[2]) Die Abhängigkeit von der Entfernung wird durch das Verhältnis der Kugeloberflächen zum Radius in bekannter Weise begründet. Bei der Einführung der Massen finde ich folgenden Widerspruch. Dellingshausen sagt:

a) Die Gravitationswellen verlieren beim Durchgang durch die Körper an Energie.[3])

b) Der Betrag der von einem Körper absorbierten Energie ist proportional der Energie der ihn durchströmenden Gravitationswellen.[4])

c) Die Beschleunigung, welche ein Körper durch Gravitation bewirkt, ist proportional der von ihm absorbierten Energie.[5])

---

1) a. a. O. S. 64.

2) a. a. O. S. 67.

3) S. 41 heifst es: „... damit soll jedoch nicht gesagt sein, dafs die Gravitationswellen, indem sie die Körper durchströmen und ihnen einen Teil ihrer Bewegungen abgeben, nicht auch dabei einen entsprechenden Teil ihrer Energie einbüfsen." — So gering also auch nach D. dieser eingebüfste Teil sein mag, so ist er doch auf keinen Fall gleich Null.

4) S. 67 „... zugleich ist notwendigerweise die Menge der von ihnen (den gravitierenden Körpern) absorbierten ... Energie um so gröfser oder kleiner, je gröfser oder kleiner die Energie der ihn durchströmenden Gravitationswellen selbst ist."

5) S. 67. „Deshalb ist auch die Beschleunigung eines ponderablen Körpers stets der Energie der von ihm absorbierten oder ihn durchströmenden Gravitationswellen proportional."

Nun denke ich mir eine Bleikugel von dem Volumen $2v$, umgebe dieselbe mit einer bleiernen Hohlkugel, deren Volumen ebenfalls $2v$ ist, schneide das Ganze mitten durch und nehme aus der einen Hälfte den halbkugeligen Kern heraus, dann verhalten sich die übrig bleibenden Massen offenbar wie $2v$ Kubikmeter Blei zu $1v$ Kubikmeter Blei, also wie $2:1$. Nun stelle ich die gefüllte und die leere Schale so im Weltraume auf, dafs die ebenen Teile der Oberflächen einem und demselben, mitten dazwischen liegenden dritten Körper x zugewandt sind: Wie müssen sich dann die Beschleunigungen, welche letzterer von den beiden ersteren erfährt, zueinander verhalten?

Hierauf giebt Dellingshausen die Antwort: Wie die absorbierten Mengen von Energie.

Nun absorbieren zunächst die beiden gleichen Schalen gleichviel Energie, aber der Kern der einen Schale kann, eben weil diese letztere schon einen Teil der Energie der durchpassierenden Gravitationswellen absorbiert hat, trotz seiner ebenso grofsen Masse doch nicht mehr soviel Energie absorbieren, als die Schale, da ja nach dem vorhin unter b aufgeführten Satze das absorbierte Quantum dem durchpassierenden proportional ist. Daher kann nach Dellingshausen das Verhältnis der Beschleunigungen nicht gleich $2:1$, d. h. nicht gleich dem der Massen sein. Dennoch aber läfst er aus seinen eben angeführten Sätzen, ohne dabei über das Verhältnis der Wirksamkeit innerer Teile zu der der äufseren noch erst zu reden, sich sogleich den Schlufs ergeben, „dafs die Beschleunigung der Weltkörper zueinander der Masse des Centralkörpers direkt ... proportional ist.“

Dellingshausen setzt sich hier über die gröfste Schwierigkeit aller kinetischen Erklärungen der Schwere hinweg, ohne sie ernstlich ins Auge gefafst zu haben. Mit all seinen Bemühungen, das über dem Begriff der Masse lagernde Dunkel aufzuhellen, ist hier nicht viel geholfen. Denn bei gleichartigen Körpern tritt statt des Massenverhältnisses das Verhältnis der Volumina auf. Der dunkle Begriff ist dadurch vollständig eliminiert, aber die Schwierigkeit ist ganz so grofs geblieben, wie sie war. Wie kann nämlich die Absorption in den inneren Schichten genau ebensogrofs sein, als in den äufseren Schichten von gleichem Rauminhalt? (Der Versuch, die Absorption gleich Null zu setzen, ist natürlich auch aussichtslos; denn mit Annulierung der Ursache, und wenn sie nach D. auch nur eine „veranlassende Ursache“ sein sollte, wird auch die Wirkung einfach annulliert.)

Ich glaube, darauf verzichten zu können, einige andere Punkte in den Dellingshausenschen Erörterungen, welche mir ungereimt erscheinen und welche speziell mit seiner Unterscheidung zwischen den blos veran-

lassenden und den eigentlichen Ursachen der Schwere zusammenhängen, noch besonders zu besprechen und wende mich nunmehr zu den in den letzten Jahrzehnten immer mehr und mehr entwickelten Stofstheorien.

C. Lesage, W. Thomson, Tolver Preston.

Vorab ist hier zu bemerken, dafs es unter den Vertretern der auf Stofswirkungen gegründeten Erklärungen der Schwere einige giebt, welche gegen die Einfügung ihrer Systeme in die allgemeine Klasse der „Absorptionstheorien“ vielleicht lebhaften Widerspruch erheben würden, weil sie von Energieabsorption nichts wissen wollen und des Glaubens sind, sie hätten auch ohne solche ihr Ziel erreicht. Allein diese Meinung scheint mir — was ich im Späteren noch begründen werde — irrig und verdankt ihre Entstehung wohl nur einem Mangel an Klarheit und Anschaulichkeit, der den betreffenden Theorien an gewissen wichtigen Punkten anhaftet.

Zwar gehen alle Stofstheorien von der Annahme aus, dafs es einen gasförmigen Äther gebe, d. h. ein Medium, bestehend aus unermefslich vielen, sehr kleinen Körperchen, welche mit aufserordentlich grofser Geschwindigkeit nach allen Richtungen hin den Weltraum durchfliegen. Wenn wir nun aber schon unsere erste Hauptfrage aufstellen und sagen: Ist denn nun die in diesen Körperchen vorhandene lebendige Kraft diejenige Energie, deren Absorption die Erscheinungen der Schwere zur Folge hat? Dann gehen die Meinungen schon sehr auseinander. Unbedingt bejahen können wir dies nur bezüglich derjenigen Theorien, welche die Ätherteilchen als unelastische Körper behandeln. So oft diese letzteren nämlich mit den gravitierenden Massen zusammenstofsen, geht nach bekannten mechanischen Gesetzen lebendige Kraft verloren, und dieser absorbierte Betrag steht, sobald die Frage nach der Herkunft der Energie fallender Körper erhoben wird, zur freien Verfügung. Freilich wird man dabei nicht umhin können, sich wegen der Benutzung unelastischer Stöfse mit dem Gesetz von der Erhaltung der Energie auseinander zu setzen. — Ich habe über diesen Punkt an mehreren Stellen meines Buches über „das Rätsel von der Schwerkraft“[1]) sowie in meiner Schrift über die Fernkraft und das Ignorabimus von Paul du Bois-Reymond[2]) eingehend gesprochen. Zwar schon Redecker 1736

---

1) u. a. in der Vorrede, S. 70 Anm. S. 73 Anm. S. 152.

2) S. 15 Anm. Ich will hier noch den Hinweis auf einen naheliegenden Gedanken beifügen. Man kann den Versuch unternehmen, einerseits auf Grund der blofsen Trägheit und Undurchdringlichkeit, also unter Verzicht auf jede elastische Kraft solche Bewegungen der sinnfälligen Materie zu konstruieren, welche sich von dem nach den Newtonschen Gesetze erfolgenden unmerkbar wenig

und etwas später Lesage[1]) hatten mit unelastischen Atomen die Absorption begründet, allein in jener Zeit war die bezeichnete Schwierigkeit natürlich noch nicht vorhanden, weil damals ja die Möglichkeit eines Verlustes an lebendiger Kraft bei manchen physikalischen Vorgängen nicht bestritten wurde. Alle übrigen Stofstheoretiker aber, soviel mir bekannt, haben geglaubt mit dem Energiegesetz dadurch in Frieden auszukommen, dafs sie entweder die Ätherteilchen elastisch machten oder dieselben zwar unelastisch liefsen, aber dennoch die für elastische Körper geltenden Stofsgesetze zur Anwendung brachten. Letzteres geschieht z. B. von Fritsch, welcher übrigens seine in meinem Rätsel[2]) kritisierten Deduktionen seitdem aufgegeben und durch andere ersetzt hat.[3]) Zu den Anhängern der elastischen Atome aber gehören u. a. Schramm, Thomson, Tolver Preston, Rysáneck.

---

unterscheiden, also innerhalb der jetzigen Grenzen unserer Naturbeobachtung „konservativ“ sind, sodann andererseits auf Grund dieses konservativen Charakters der Bewegungen die Herrschaft des Energiegesetzes in den bezeichneten Grenzen abzuleiten, und man würde hiernach einen Widerspruch dieses Gesetzes, sowie der physikalischen Empirie überhaupt nicht mehr zu befürchten haben.

1) Die hier gebotene Gelegenheit möchte ich benutzen, um einen in meinem „Rätsel“ S. 72 geäufserten Zweifel zu beseitigen. — Aus den dort angegebenen Quellen war nicht mit Bestimmtheit zu ersehen, ob Lesages „corpuscules ultramondains“ elastisch oder unelastisch waren. Dafs letzteres aus der von mir damals citierten Stelle Thomsons: „Auf diese Weise wird die von Lesages Theorie geforderte Bedingung erfüllt, ohne die neuere Thermodynamik zu verletzen“ schon mit Gewifsheit hätte erschlossen werden müssen, wie eine Hallenser Dissertation von Herrn Wilhelm Stoss (S. 19) behauptet, scheint mir irrig. Denn wenn Herr Stoss meint, auf die Frage: „Was ist das, womit Lesage nach Thomsons Ansicht die neuere Thermodynamik verletzt?“ wäre nur die Antwort möglich gewesen: „Ohne Zweifel die absolute Härte der Atome“, so ist, ganz abgesehen davon, ob dies wirklich die einzig mögliche Antwort gewesen wäre, in obigen Worten Thomsons die Berechtigung dieser Fragestellung überhaupt nicht enthalten. Thomson behauptet darin ja gar nicht, dafs Lesage die Thermodynamik verletzt habe, sondern sagt einfach, Lesages Theorie fordere eine Bedingung, und diese Forderung verletze die Thermodynamik nicht. Übrigens führt Thomson in dem oben citierten Satze unmittelbar fort mit den Worten: „und in Übereinstimmung mit Lesage mögen wir uns hierbei beruhigen etc.“ Da nun Thomson selbst mit elastischen Gebilden arbeitete, so schien mir wohl die Wahrscheinlichkeit, wenigstens aber doch die Möglichkeit vorzuliegen, dafs Lesage dasselbe thue. — Aus dessen eigenen Schriften und hinterlassenen Manuscripten geht aber hervor, dafs seine „corpuscules“ unelastisch waren. Auch hat W. Thomson an anderen Stellen, die mir damals nicht vorlagen, hierüber keinen Zweifel gelassen.

2) S. 96 u. ff.

3) Programm des Realgymn. in Königsberg 1886.

Schramm läfst die Ätheratome nach ihrem Zusammenstofs mit den Körpermolekülen ebenso schnell zurückfliegen, wie sie angekommen sind. Er hält also die für vollkommen elastische Körper übliche Vorstellung fest; zu der gewünschten Absorption aber gelangt er nur mit Hülfe eines Rechenfehlers.[1])

Tolver Preston hat sich um den Nachweis der Absorption weiter keine Mühe gegeben. Er steht in dieser Beziehung einfach in den Schuhen W. Thomsons und spricht sich darüber folgendermafsen aus[2]): „Thomson hat zuerst (Philosophical Magazine Mai 1873 S. 329) die Erklärung von diesem Geschwindigkeitsverlust in Einklang mit der vollkommenen Elasticität der Atome, resp. mit der Erhaltung der Kraft gebracht. Seine Erläuterung könnte principiell folgendermafsen in etwas veränderter Form gegeben werden. Wegen der verhältnismäfsig sehr grofsen Dimensionen des groben Moleküls kann das kleine Gravitationsatom bei seinem Anprall nur gewissermafsen einen einzigen Punkt der Oberfläche des groben Moleküls berühren. Deshalb wird natürlich die innere Bewegung des groben Moleküls durch den Stofs kaum afficiert (oder das Molekül wird kaum erschüttert). Dagegen kann das Gravitationsatom seiner Kleinheit wegen voll mit seiner ganzen Fläche auf das grobe Molekül anschlagen, und das Atom wird dadurch heftig erschüttert — resp. in starke innere Bewegung (Vibration und Rotation) versetzt. Diese innere Bewegung des Atoms kann aber selbstverständlich nicht aus Nichts erzeugt werden. Deshalb verliert das Atom beim Stofse einen Teil seiner translatorischen Bewegung durch Umwandlung derselben in innere Bewegung. Man könnte diese Thatsache leicht experimentell illustrieren beim Werfen irgend eines kleinen elastischen Körpers, z. B. eines Stahlringes gegen die Oberfläche eines harten Ambosses. Der Stahlring springt mit einer Verminderung seiner translatorischen Bewegung zurück — wegen Umwandlung derselben in Vibrationsbewegung. Wenn man also nur die ungeheure Verschiedenheit der Dimensionen (und deshalb die Verschiedenheit der Biegsamkeit oder Starrheit) zwischen Atom und Molekül in Rechnung zieht, so wird man ersehn, dafs der Verlust an translatorischer Bewegung schon im Voraus als eine notwendige Deduktion sich ergiebt, auch wenn die Erklärung der Gravitation nicht zu dieser Annahme führen würde."

Bevor ich diese Darlegung vom rein mechanischen Standpunkte aus in Betracht ziehe, möchte ich nicht versäumen, zuerst in aller Schärfe noch

---

1) „Rätsel etc." S. 77.

2) Sitzungsb. der k. Akad. der Wissensch. II. Abt. Aprilheft 1883. S. 7 Anmerkung.

einmal darauf hinzuweisen, welche Hypothese es eigentlich ist, die unter der Flagge der „Elasticität" hier fast unvermerkt eingeschmuggelt wird.

Nach Thomson fliegt das Projektil nach dem Stofse weg mit kleinerer translatorischer Geschwindigkeit, aufserdem aber rotiert und vibriert es. — Dafs es abfliegt mit irgend einer Geschwindigkeit und dafs es rotiert: beides läfst sich bekanntlich aus der Undurchdringlichkeit und der Trägheit der Materie in aller Strenge ableiten, auch ohne Elasticität. — Warum aber vibriert es?

Nehmen wir z. B. einen kreisförmigen T. Prestonschen Stahlring oder noch einfacher eine elastische Kugel und denken uns, diese sei infolge ihres Anstofses zu einem (Rotations-) Ellipsoid abgeplattet worden. Nach dem Abprallen vibriert sie nun, d. h. ihre Form wird abwechselnd ellipsoidisch, rundet sich wieder zur Kugel ab, wird darauf entgegengesetzt ellipsoidisch, rundet sich nochmals ab, und wechselt in dieser Weise ihr Thun unaufhörlich. — Fassen wir jetzt einmal den Moment ins Auge, wo die Hauptaxe des Ellipsoids eben ihre gröfste Ausdehnung hat. Was verhindert den Körper, grade so, wie er eben ist, zu bleiben? — Welche Ursache, welcher Kobold, könnte man fast sagen, steckt denn in diesem Ellipsoid und bewirkt, unzufrieden mit der augenblicklichen Form desselben, dafs die Endpartikel der längeren Axe einander sich wieder nähern müssen? — Paul du Bois-Reymond meint, diese Ursache könne nur wieder eine Fernkraft sein, und daher laufe die Benutzung der Elasticität bei der Konstruktion der Schwere lediglich darauf hinaus, dafs man eine Fernkraft durch eine andere Fernkraft erkläre. — Ich möchte nicht soweit gehen, aber ich sage, wenn die Ursache der Vibrationen auch vielleicht keine Fernkraft, keine *„actio in distans"* zu sein brauchte, wie die Gravitation, so ist sie doch erstens eine *„qualitas occulta"*, grade wie die Gravitation, und zweitens eine „veränderliche Ursache", ebenfalls wie die Gravitation. — Letzteres könnte man zu bezweifeln geneigt sein, aber es folgt sofort aus dem Umstande, dafs bei der oscillierenden Kugel die Geschwindigkeitskomponenten der einzelnen Teile periodische Funktionen der Zeit sind. In den extremen Lagen nämlich ist die Geschwindigkeit all dieser Teile (bezogen auf ein mit dem Mittelpunkt fest verbundenes Koordinatensystem) gleich Null, kehrt daselbst ihr Vorzeichen um, wächst nachher so lange, bis die Kugelform erreicht ist, nimmt dann wieder ab etc.[1]) Es bleibt also für die

---

1) So würde es wenigstens den Bewegungsgesetzen der gewöhnlichen elastischen Körper entsprechen. Allein vielleicht nimmt ein Vertreter der elastischen Stofstheorie sich die Freiheit, über die vibrierende Bewegung seiner Projektile eine andere Hypothese zu ersinnen. Wie er sich die aber auch zurechtlegen mag:

Forschung nicht blos die Frage übrig: Welche Ursache bewirkt, dafs die Teilchen nach dem Stofse fortfahren, sich relativ zu einander zu bewegen, sondern auch die weitere Frage: welche Ursache bewirkt, dafs die erstere Ursache in ihrer Wirkungsweise sich verändert, dafs nicht etwa blos die Geschwindigkeiten, sondern auch die Beschleunigungen jener Teilchen gröfser und kleiner werden, dafs sie bald diese, bald die entgegengesetzte Richtung haben?

Auf diese Fragen wird vom Standpunkte aller Atom-Elastiker nur die Antwort geboten: Solche Ursachen können wir nicht näher angeben. Wir behaupten nur, dafs sie existieren, legen ihnen den Namen Elasticität oder elastische Kraft bei und kümmern uns nicht weiter darum. Herr Tolver Preston fügt noch hinzu: „Die Erklärung dieser Elasticität mag wohl ein sehr interessantes Problem für die Zukunft sein.“[1]) —

Nun aber wollen wir von alledem ganz absehn und, zur rein mechanischen Betrachtung zurückkehrend, die Frage aufwerfen, ob Thomson durch die vorhin mitgeteilte Erörterung denn wirklich „die Erklärung von diesem Geschwindigkeitsverlust in Einklang mit der vollkommenen Elasticität der Atome . . gebracht“ hat. — Wann nennen wir eine Elasticität denn vollkommen? — Thomson denkt sich die Moleküle der sinnfälligen Materie ungeheuer grofs und ungeheuer starr im Vergleich mit den Gravitationsatomen. Nehmen wir also, um die Sache zu veranschaulichen, eine sehr grofse starre Wand und lassen gegen dieselbe eine Kugel anfliegen. Diese möge einen gewissen Grad von Elasticität haben, fliegt also mit irgend einer Geschwindigkeit zurück, und je mehr diese letztere der Fluggeschwindigkeit vor dem Stofse sich annähert, desto gröfser schätzen wir den Grad von Elasticität, den die Kugel besitzt. Wann aber nennen wir diese Elasticität eine vollkommene? — Nach dem in der Mechanik bisher üblichen Sprachgebrauch, soviel ich weifs, nur dann, wenn die Geschwindigkeit nach dem Stofs der ursprünglichen gleichkommt. Der Unterschied dieser beiden Geschwindigkeiten müfste gleich Null sein, wenn die Elasticität eine vollkommene genannt werden soll, und der Tolver Prestonsche „Einklang“ zwischen Geschwindigkeitsverlust und dieser Vollkommenheit der Elasticität ist hiernach einfach begrifflich ausgeschlossen; seine Herstellung kann überhaupt versucht werden nur auf Grund einer Umänderung des Begriffes der vollkommenen Elasticität.

---

an der Veränderlichkeit kommt er auf keine Weise vorbei, da es ja im Wesen der Vibrationsbewegung liegt, dafs die Komponenten der Geschwindigkeit in gewissen Augenblicken ihr Vorzeichen umkehren.

1) a. a. O. S. 2. — Sein Ausspruch S. 3: „Ich wende (bei der Erklärung der Gravitation) keine Kräfte an“, ist offenbar irrig.

Es nützt nichts, zur Entgegnung darauf hinweisen zu wollen, wie in Wirklichkeit alle bekannten Körper nach dem Stofse einen Geschwindigkeitsverlust zeigen, und wie man diese Thatsache mit dem Gesetze von der Erhaltung der Energie ja doch auf einfache Art in Einklang zu bringen gewufst habe. Denn eben die Thatsache, dafs bei jedem Stofs translatorische Energie in Wärme, d. h. in eine andere Art von kinetischer Energie umgesetzt wird, pflegt man ja als einen Beweis von unvollkommener Elasticität zu betrachten und zu sagen: Vollkommen elastische Körper kennen wir nicht, keineswegs aber zu sagen: Wenn trotz des Geschwindigkeitsverlustes die Summe der äufseren und inneren kinetischen Energie erhalten bleibt, so dürfen wir die stofsenden Körper deswegen vollkommen elastische nennen.

Also die Leistung, welche nach Tolver Preston Herrn W. Thomson „zuerst" gelang, involviert notwendig eine Begriffsumänderung, und es fehlt auch nicht an Anhaltspunkten dafür, dafs dieser Umstand Herrn Thomson nicht entgangen sei. Tolver Preston beruft sich nämlich auf einen Artikel im Philosophical Magazine, und in diesem Artikel wird von Thomson selbst der § 301 des bekannten Lehrbuches beigezogen, welches er mit Tait unter dem Titel: „Natural Philosophy" herausgegeben hat. Nun ist aber für die vorliegende Frage weniger § 301, als vielmehr § 302 wichtig, welcher die Überschrift: „Verteilung der Energie nach dem Stofse" trägt. Dort wird mit klaren Worten gesagt, dafs bei aufeinander stofsenden elastischen Körpern „stets ein Teil der früheren kinetischen Energie in der Form von Vibrationen zurückbleibe", und dafs man diesen Verlust **„unpassend** die Wirkung der unvollkommenen Elasticität **nenne**".[1]) — Nun mögen Thomson und Tait ja wohl ihre guten Gründe haben, wenn sie es im allgemeinen passend finden, auch solche Körper noch vollkommen elastisch zu nennen, welche nach dem Stofse langsamer fliegen, als vor dem Stofse, jedenfalls aber leuchtet ein, dafs die Lösung des Rätsels von dem „Einklang", welche auf diese Weise Herrn W. Thomson „zuerst gelungen" ist, in der bezeichneten terminologischen Änderung ihre eigentliche Wurzel hat. Wir wollen daher von dieser Wortfrage im Folgenden ganz absehn und unser Augenmerk auf den mechanischen Kern richten.

Wenn die gesamte Energie jedes Thomsonschen Ätheratoms aus den drei Summanden: translatorische, rotatorische, vibratorische Energie besteht, so können diese einzelnen Summanden durch das Zusammenprallen mit den

1) Zitiert nach der von Helmholtz und Wertheim besorgten deutschen Ausgabe I. S. 237.

Körpermolekülen zwar offenbar auf mannigfache Weise verändert und ineinander übergeführt werden, ohne dafs die Summe selbst sich zu ändern braucht. Allein die von Thomson vertretene Theorie hätte vor allem, weil sie ja darauf baut, den Nachweis zu liefern, dafs diese Umwandlung — im Durchschnitt gerechnet — wesentlich auf Kosten des ersten Summanden geschieht. Ein solcher Nachweis aber ist zunächst bei Tolver Preston nicht vorhanden. Ferner ist er in der von ihm angeführten Thomsonschen Abhandlung im Philosophical Magazine nicht vorhanden, vielmehr finde ich dort den Satz: „Selbst für den einfachsten Fall, nämlich den der weichen elastischen Kugeln, hat noch niemand durch abstrakte Dynamik das schliefsliche (d. h. nach dem Stofse stattfindende) mittlere Verhältnis der vibratorischen und rotatorischen Energie zu der translatorischen ermittelt.“[1]) — Das läfst schon vermuten, dafs der fragliche Beweis überhaupt noch fehlt. An der entscheidenden Stelle jenes Artikels, dort nämlich, wo die Behauptung von der verlangsamten Geschwindigkeit nach dem Stofse aufgestellt ist, wird der vorhin schon erwähnte § 301 beigezogen. Ich habe aber weder in diesem Paragraphen, noch überhaupt in dem Buche von Thomson und Tait jenen Beweis finden können. Dagegen steht in § 305 der Satz: „die mathematische Theorie der Vibrationen fester elastischer Kugeln ist noch nicht ausgearbeitet worden, und ihre Anwendung auf den Fall der durch einen Stofs erzeugten Vibrationen bietet beträchtliche Schwierigkeiten dar.“

Hierdurch wird die Vermutung, dafs die oben erwähnte unterste mechanische Grundlage bisher noch nicht gelegt sei, wiederum bestärkt. Weiterhin kommt aber noch eine Stelle in Betracht, worin Thomson von der Möglichkeit spricht, dafs der verminderte translatorische Energie-Summand auch wieder auf Kosten der beiden anderen vermehrt werden könne, nämlich durch die Zusammenstöfse der Ätheratome mit ihresgleichen. Er spricht dies aus in Form des Satzes: „Das Verhältnis der Gesamtenergie der Körperchen zu dem translatorischen Teil ihrer Energie ist im Durchschnitt nach dem Zusammenstofs mit mundaner Materie gröfser, als nach dem Zusammenstofs mit ultramundanen Körperchen“, und diesen Satz bezeichnet er ausdrücklich als eine blofse Annahme („supposition“), keineswegs aber als das Resultat irgend einer mechanischen Deduktion. Dafs er nicht im Besitze einer solchen war, scheint daher wohl angenommen werden zu dürfen, und wenn wir mit Rücksicht hierauf die Frage stellen, in welcher

---

1) Even for the simplest case — that namely of smooth elastic globes — no one has yet calculated by abstract dynamics the ultimate average ratio of the vibrational to the translational energy.

Weise die Grundlagen der Gravitationstheorie Lesages durch Thomson umgestaltet worden sind, so ist, wie mir scheint, zu sagen, dafs Letzterer den Hypothesen des Ersteren noch drei weitere beigefügt hat, nämlich erstens: es giebt eine unbekannte, veränderliche Ursache, welche die Ätheratome fortdauernd in Stand setzt, alle erlittenen Formveränderungen wieder auszumerzen; zweitens: die Ätheratome sind weicher als die Körperatome; drittens: die „mathematische Theorie“ des Zusammenstofses elastischer Kugeln wird das Resultat ergeben, dafs der translatorische Teil ihrer Energie durchschnittlich einen kleineren Bruchteil der gesamten Energie ausmacht nach Zusammenstöfsen mit härteren, als nach Zusammenstöfsen mit weicheren Körpern. —

Auf diesen Annahmen ruht der unterste Grundstein der Thomsonschen und Tolver Prestonschen Gravitationstheorie, aber dieselben reichen doch noch nicht einmal aus, um unsere erste Hauptfrage: aus welcher Quelle stammt die Energie, die ein fallender Körper gewinnt? zu beantworten. — Soviel ich weifs, hat Lesage die Frage überhaupt nicht prägnant gestellt, aber die Antwort würde ihm, wie Allen, welche unelastische Stöfse zu Grunde legen, nicht schwer gefallen sein, weil ja nach dieser Theorie die Ätheratome aus den gravitierenden Massen mit Energieverlust heraustreten. Thomson aber hat sich diese Quelle ausdrücklich verstopft, indem er sagt, die austretenden Körperteilchen müfsten dieselbe Energie wieder mit herausnehmen, die sie auch hereingebracht haben (must carry away the same energy with them, as they brought. S. 329). — Unter diesen Umständen wird die Frage nach der Herkunft der Fallenergie sehr unbequem und in der That habe ich weder bei Thomson noch bei Tolver Preston eine Antwort darauf gefunden. Es ist aber ebenso interessant als wichtig zu untersuchen, auf welche Antwort eine konsequente Durchführung dieser Theorie hinauslaufen mufs.

Wenn z. B. der vom Gipfel eines Felsens losgebröckelte Stein herabsaust, und wenn er die kinetische Energie, welche er während des Fallens erwirbt, nicht von der Anziehungskraft der Erde enthält, die ja *per hypothesin* ausgeschlossen ist; wenn er sie zweitens nicht von dem Äther erhält, der ja ohne Energieverlust[1]) aus dem Steine wieder heraustritt; wenn drittens nach der Theorie Erde, Äther und Stein die einzigen bei

1) Hierdurch wird auch der etwa noch denkbaren Annahme, dafs die Fallenergie zwar nicht von der Anziehung, aber vielleicht von irgend einem anderen in der Erde steckenden geheimnisvollen Energiequantum herrühren und durch den Äther nach dem Steine transportiert würde, ein Riegel vorgeschoben. Der Äther soll ja seine gesamte in den Stein hineingebrachte und transportierte Energie auch wieder aus ihm mit hinwegnehmen.

der Erklärung des Phänomens in Betracht kommenden Faktoren sind, so bleibt offenbar nur übrig zu sagen: die lebendige Kraft des fallenden Steines stammt aus dem Steine selbst, mit anderen Worten: sie steckte schon vor dem Falle in demselben, und während des Fallens wird ein gewisser Prozentsatz dieser früher verborgenen Energie umgewandelt in diejenige kinetische Energie, mit welcher der Stein auf der Erde anlangt.

Die Notwendigkeit einer solchen Annahme scheint mir unausweichlich, und Dellingshausen hat sich ja auch schon zu derselben bekannt, obschon bei ihm der Äther noch mit einigem Energieverlust aus dem fallenden Körper heraustritt. Bei Thomson hingegen, der dies leugnet, bleibt, soviel ich irgend absehe, keine andere Fundgrube für die Fallenergie übrig.

Was folgt nun aber aus der Notwendigkeit, eine solche Hypothese der Theorie Thomsons unter die Füfse zu schieben? — Zunächst die weitere Notwendigkeit, irgend eine mechanische Ableitung dafür zu geben, wie durch die Stöfse des elastischen Äthers die in einem fallenden Körper verborgen vorhandene Energie in die lebendige Kraft der Fallbewegung umgewandelt wird. Eine solche Ableitung ist aber gar nicht möglich, wenn nicht eine bestimmte mechanische Vorstellung von der Natur jenes verborgenen Energievorrats zu Grunde gelegt wird, und diese fehlt, soviel ich sehe, bei Thomson sowohl, wie bei Tolver Preston.

Wäre aber auch diese mechanische Grundlage wirklich gelegt, so würde jeder, der wie Thomson den Anspruch erhebt, die Stofstheorie mit dem Gesetz von der Erhaltung der Energie in Einklang gebracht zu haben, noch eine andere und gröfsere, in den näheren Beziehungen der Gravitationswirkungen zu Zeit und Raum begründete Schwierigkeit hinweggeräumt haben müssen. Er müfste — um zunächst ganz einfache Fragen anzuführen — mechanisch abgeleitet haben, warum in dem Apfel, der am Stiele hängt, die durchpassierenden Ätheratome alle innere Energie in ihrem Zustande belassen, warum sodann bei der Loslösung vom Baume der Umwandlungsprozefs seinen Anfang nimmt und sich in der Weise vollzieht, dafs im ersten Zeitteilchen ein gewisser Energiebetrag, im zweiten deren aber drei, im dritten fünf umgewandelt werden etc.; warum der Knabe, welcher den Apfel aufhebt und zu seiner alten Stelle wieder heraufbringt, durch diese Arbeit — mag sie in beliebiger Zeit und auf beliebigem Wege ausgeführt werden — eben jene während des Fallens in lebendige Kraft umgewandelte Energie in dem Apfel wieder in ihren ursprünglichen latenten Zustand zurückverwandelt. Er müfste sodann bezüglich der kreisenden und Wurfbewegungen gezeigt haben, warum die Umwandlung der inneren Energie im allgemeinen weder der Zeit, noch dem Wege, noch der Ge-

schwindigkeit proportional ist; er müfste die enge Beziehung derselben zum Radiusvektor dargelegt haben, müfste überhaupt in jener bekannten Gleichung, welche das Gesetz von der Erhaltung der Energie ausdrückt, denjenigen Summanden, welcher bei der bisherigen Attraktionshypothese unter dem Namen der „potentiellen Energie“ aufgeführt wird, durch eine andere Energie ersetzen und die Schwankungen dieses Summanden aus seiner mechanischen Theorie heraus so begründen, dafs bei allen Schwankungen der „kinetischen Energie“, wie sie die auf Gravitation beruhenden Fall-, Wurf- und Rotationsbewegungen mit sich bringen, dennoch die erwähnte Gleichung stets befriedigt bleibt. — Da dies alles bei Thomson und Tolver Preston fehlt, so scheint mir die Behauptung, ihre Theorie sei mit dem Gesetze von der Erhaltung der Energie in Einklang gebracht, irrig. —

Hiermit sind wir an dem Punkte angelangt, wo wir die Besprechung der von diesen Forschern vertretenen Theorie mit einem Rückblick auf unsere fünf kritischen Fragen zum Abschlufs bringen können.

1) Wo die Energie fallender Körper vor dem Falle gewesen ist, bleibt dunkel.

2) Wie die Umwandlung in Fallenergie, und zwar

3) mit centripetaler Richtung sich vollzieht, dafür wird keine genügende mechanische Ableitung gegeben.

4) Ein bestimmter Ausdruck für die Beziehung der Fallenergie zu der Gesamtenergie, von welcher sie stammt, ist nicht vorhanden. Bezüglich des Einflusses der Entfernung und Masse bewendet es bei den Resultaten Lesages.

5) Abweichungen von dem Newtonschen Gesetze bleiben aufser Betracht.

D. Rysáneck und Paul du Bois-Reymond.

Im 24. Bande von Exners „Repertorium der Physik“ hat Prof. Adalbert Rysáneck unter dem Titel „Versuch einer dynamischen Erklärung der Gravitation“ eine Theorie veröffentlicht, welche der Lesage-Thomson-Tolver Prestonschen sehr verwandt ist, aber doch in einzelnen Punkten davon abweicht und namentlich in Bezug auf die mathematische Durchführung wesentlich über dieselbe hinausgeht.

Was zunächst die mechanische Grundlage dieser Theorie betrifft, so heifst es darüber gleich in der Einleitung (S. 90) folgendermafsen: „Um . . . auf das Gravitationsgesetz zu kommen, nahm ich meine Zuflucht zu der . . . Annahme, dafs der Schweräther auf dem Wege durch die Himmelskörper einen Teil seiner Energie, und zwar proportional der im Körper

zurückgelegten Strecke und der daselbst vorhandenen Massendichte verliere. ... Die absorbierte Energie geht teils auf die Atome der groben Materie, teils auf die des Lichtäthers über, wobei Schweräther und Lichtäther als voneinander verschiedene Stoffe aufzufassen sind."

Hiermit ist nicht nur im allgemeinen die Zugehörigkeit zu den Absorptionstheorien deutlich ausgesprochen, sondern auch schon unsere erste Frage bestimmt beantwortet, und zwar in dem Sinne, dafs die Energie der fallenden Körper in dem postulierten Schweräther ihre Quelle haben soll.

Stellen wir nun aber die zweite Frage: auf welche Weise denn die Energieabsorption eigentlich vor sich gehe, dann stehen wir auch bei Rysáneck sofort wieder vor dem alten Rätsel. Ich lese darüber Folgendes: „Damit nun dieses Medium den Himmelskörpern Bewegung mitteilen könne, soll angenommen werden, dafs es selbst in Bewegung sei und dafs diese Mitteilung durch Stöfse geschehe. ... Auf dem Wege (durch die Himmelskörper) stöfst ein Teil des Schweräthers mit der groben Materie zusammen, wobei es zu einem Verluste der kinetischen Energie desselben kommt, welche eine Erwärmung des durchdrungenen Körpers zur Folge hat. Wenn es sich nun um die Berechnung des Energieverlustes handelt, so kann man die Betrachtung so anstellen, als ob man es mit dem Stofse unvollkommen elastischer Atome zu thun hätte. Damit soll aber durchaus nicht die vollkommene Elasticität des Schweräthers aufgegeben werden; denn durch diese Stöfse geht von der Gesamtenergie nichts verloren."

Wie wird denn nun trotz der vollkommenen Elasticität der Verlust an kinetischer Energie mechanisch begründet? — Einfach gar nicht; und so steckt denn ziemlich das ganze Hypothesen-Nest, welches wir vorhin bei Thomson bez. Tolver Preston fanden, auch in der Theorie von Rysáneck.[1])

Eine kleine Polemik, welche letzterer in seiner „Einleitung" gegen mich richtet, könnte übrigens einigermafsen geeignet sein, über diesen Mangel in der mechanischen Begründung den Leser hinwegzutäuschen, weshalb ich mit einigen Worten darauf eingehen mufs. Es heifst u. a. dort (S. 91):

„Wenn Wärmestrahlen von einem Körper absorbiert werden, oder wenn zwei Bleikugeln zusammenstofsen, so erfolgen die Stöfse zwischen den Körper- und Ätheratomen so, dafs dabei an Energie nichts verloren geht. Wir können diese Eigenschaft der Atome mit dem Namen Elasticität be-

1) Herr Rysáneck äufsert bezüglich einer Theorie von Odstrčil, welche er auf S. 92 seiner Abhandlung kurz bespricht: „die Schwerkraft tritt hier wieder als *qualitas occulta* in der Elasticität auf". — Diese Bemerkung trifft, wie mir scheint, ihn selbst nicht weniger, als Herrn Odstrčil.

zeichnen, jedoch würden wir die Grenzen der Physik überschreiten, wollten wir auch auf die inneren Vorgänge in den Atomen bei dieser Bewegungsübertragung eingehen. (Ich meine im Gegenteil, die Physik würde Herrn R. vermutlich dafür dankbar gewesen sein, wenn er diese Vorgänge auf eine plausible mechanische Grundlage gestellt und damit auch seiner Theorie ein solides Fundament gegeben hätte.) Zur Annahme unelastischer Atome liefs sich Isenkrahe durch die Betrachtung verleiten, dafs unter der Voraussetzung vollkommener Elasticität die Gegenwart eines Körperatoms auf den Bewegungszustand des ringsumherfliegenden Schweräthers keinen Einflufs ausübt. Denken wir uns ein Körperatom an der Grenze eines Moleküls zwar ringsumher von Schweräther, aber auf einer Seite in der nächsten Nähe auch von Körper- und Lichtatomen umgeben, so werden die Stöfse, die es auf der einen Seite vom Schweräther empfängt, auf der anderen Seite nicht immer wieder auf den Schweräther übergehen, sondern auch zum Teil an die Licht- und Körperatome, und diese übertragene Energie kann als Wärme entweichen."

Ich weifs nicht, was Herr Rysáneck mit dieser Überlegung dargethan zu haben glaubt. Gegen denjenigen Teil meiner Entwickelung (Rätsel von der Schwerkraft S. 135 u. 136), wonach „unter der Voraussetzung vollkommener Elasticität die Gegenwart eines Körperatoms auf den Bewegungszustand des ringsumherfliegenden Schweräthers keinen Einflufs ausübt", wendet er ja nichts ein. Nun unterscheidet er bei einem solchen Körperatom, welches „an der Grenze des Moleküls" liegt, die eine und die andere Seite; die Stöfse, die es auf der einen empfängt, sollen — so behauptet er — auf der anderen nicht immer wieder auf den Schweräther übergehen. Um die andere Seite handelt es sich aber zunächst gar nicht, sondern um die eine. Warum gehen die Stöfse, die das Grenzatom bekommt, eben an derselben Seite, wo es sie bekommt, nicht wieder auf den Schweräther über? — Bei der vorausgesetzten „vollkommenen Elasticität" bedürfte ein solcher Verlust eines besonderen Grundes; den finde ich aber bei Rysáneck nicht. Fehlt dieser Grund, so bleibt die Stofsenergie an der einen, der auswendigen Seite, dem Schweräther erhalten. Und wenn ich nun diese Betrachtung auf sämtliche Grenzatome des ganzen Moleküls ausdehne, so springt in die Augen, dafs der Äther um das ganze Molekül herum seine Energie einfach beibehält.

Es wäre also gar nicht nötig, die andere, inwendige Seite der Grenzatome überhaupt in Betracht zu ziehen. Zieht man sie aber, wie Rysáneck es thut, wirklich in den Kreis der Deduktion hinein und behauptet, die von auswärts herkommende Stofsenergie ginge auf der Innenseite zum Teil an die benachbarten Licht- und Körperatome über, so fragt sich doch,

warum diese denn das, was sie erhalten, da sie doch vollkommen elastisch sind, nicht auch wieder weiter und weiter geben, bis schliefslich am entgegengesetzten Ende das dort liegende Grenzatom die Rückgabe jenes Energiebetrages an den umgebenden Äther besorgt. — Und wenn man ferner behauptet, ein Teil dieser Energie ginge in Wärme über und könne als solche entweichen, so wird der Mechaniker natürlich fragen: Wie geschieht denn die Umwandlung der Atomstöfse in die wellenförmige Bewegung desjenigen Stoffes, vermittelst dessen die Wärmestrahlen „entweichen?"

Das alles ist dunkel, und ich darf demgemäfs auf unsere zweite kritische Frage wohl nur die Antwort geben: Wie und warum in den gravitierenden Körpern Energie absorbiert wird, ist in der Theorie Rysánecks nicht entwickelt worden. Da dieselbe aber in ihrem ganzen Aufbau eben auf dieser Absorption beruht, so fehlt es ihr an der nötigsten mechanischen Grundlage.

Was die dritte Frage, die Ableitung der Centripetalkraft aus der Absorption betrifft, so ist diese bei Rysáneck dieselbe, wie bei den vorhin erörterten anderen Stofstheorien.

Bezüglich des vierten Punktes jedoch, nämlich der Entwickelung eines mathematischen Ausdrucks für diese Kraft finden wir eine Reihe von Formeln, auf die näher eingegangen werden mufs. — Zuvörderst ist zu bemerken, dafs Herr Rysáneck seine Ätheratome mit Geschwindigkeiten fliegen läfst, welche nach dem Maxwellschen Gesetze verteilt sind. Unter einer hinreichend grofsen Anzahl N von Atomen besitzen also „eine zwischen v und $v + dv$ liegende Geschwindigkeit $N(v)$ Atome, welche gegeben sind durch die Gleichung:

$$N(v) = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(2 \frac{G^2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{3 v^2}{2 G^2}} \cdot v^2 dv \text{."}$$

So oft es sich aber um irgend eine Schlufsformel handelt, welche für die Gravitationstheorie Geltung haben soll, wird dieser Ausdruck natürlich nach v integriert von 0 bis ∞. Hierdurch kommen sämtliche Ätheratome in Rechnung, und statt $N(v)$ tritt dann einfach die Gesamtzahl N in die Formel ein, während gleichzeitig statt der Einzelgeschwindigkeit v irgend ein Mittelwert derselben auftritt. Demnach hat die Einführung des Maxwellschen Gesetzes auf die Schlufsresultate der Rechnung gar keinen Einflufs. — Dieses zeigt sich denn auch in dem für die centripetale Kraft abgeleiteten Ausdruck (S. 105)

$$k = h \cdot N \cdot \frac{v G^2}{2} \cdot \varrho_1{}^2 \pi \cdot \frac{\varrho_2{}^2 \pi}{v_2} \cdot dw \cdot \int\limits_{l_1}^{l_2} d_2 \cdot dl,$$

worin ja die Funktion $N(v)$ fehlt.

Indem wir diesen Ausdruck nun nach den früher angegebenen drei Gesichtspunkten einer näheren Erörterung unterziehen, haben wir zuerst die Beziehung dieser centripetalen Energie zu derjenigen Energie ins Auge zu fassen, aus welcher sie durch Absorption oder Umwandlung entstanden ist, also zur Energie des Äthers.

Diese Beziehung liegt in dem Faktor $N \frac{v G^2}{2}$, einer Gröfse, für welche auf S. 106 das einfache Symbol E eingeführt wird, und die nichts anderes, als „die mittlere kinetische Energie des Schweräthers in der Raumeinheit" bedeutet. Der in obiger Gleichung bezeichnete Wert von k ist also dieser mittleren Energie, und damit auch dem Quadrate der mittleren Geschwindigkeit[1]) der Ätheratome proportional.

In den Ausdrücken, welche ich selbst (Rätsel S. 174 u. ff.) für die Centripetalkraft abgeleitet habe, erscheint dieselbe (nach Ausscheidung des Einflusses der Entfernung und Masse) proportional dem Produkte $\nu \cdot c$, wobei c ebenfalls die mittlere Geschwindigkeit der Ätheratome bedeutet. Diese Gröfse tritt also bei Rysáneck in der zweiten, bei mir in der ersten Potenz auf, und es könnte deshalb scheinen, als ob eines von diesen beiden Rechnungsresultaten falsch sein müsse. Dies ist indessen nicht der Fall, vielmehr stimmt Rysáneсks Resultat in diesem Punkte mit dem meinigen vollständig überein, wie sich leicht zeigen läfst. Die Konstante ν bedeutet nämlich bei mir „die Anzahl von Ätheratomen, welche in der Zeiteinheit durch eine beliebig im freien Raume fixierte Ebene von der Gröfse 1 hindurchpassieren" (S. 143). Im Anschlufs daran habe ich (S. 169) das Resultat abgeleitet: „In der Raumeinheit befinden sich durchschnittlich $\frac{2\nu}{c}$ Ätheratome." Aus $N = \frac{2\nu}{c}$ folgt aber $\nu = \frac{cN}{2}$, und wenn dieser Wert in das Produkt νc eingesetzt wird, so erscheint ebenfalls die Geschwindigkeit c in der zweiten Potenz. — Es ist also gleichgültig, ob man sagt, die Schwere sei der mittleren Geschwindigkeit der Ätheratome, oder dem Quadrat dieser Geschwindigkeit proportional, wenn man nur im ersten Falle die Zahl der in der Zeit Eins durch die Fläche Eins hindurchpassierenden, im anderen Falle die Zahl der im Raume Eins vorhandenen Atome als zweiten Faktor hinzufügt.

1) Auf die in der kinetischen Gastheorie gebräuchlichen verschiedenen Mittelwerte und deren Unterschiede brauchen wir hier nicht näher einzugehen.

Was nun ferner den Einfluſs des Abstandes betrifft, so ist bei allen Stoſstheorien der Nachweis der Übereinstimmung mit dem Newtonschen Gesetz, wenigstens für gröſsere Entfernungen, leicht zu führen. In der vorhin angegebenen Formel Rysánecks tritt diese Beziehung nicht so klar hervor, weil die negative zweite Potenz des Abstandes nicht ausdrücklich darin auftritt. Dieselbe ist aber, wie sich leicht zeigen läſst, in dem letzten Faktor der Formel enthalten. Kurz nach Entwickelung derselben heiſst es nämlich bei Rysáneck (S. 106): „Das Körperelement .. hat .. die Masse $l^2 dw\, d_2\, dl$.“ Wenn man hierüber das Integral nach l nimmt zwischen den Grenzen l_1 und l_2 und die dadurch entstehende Masse mit M bezeichnet, so entsteht:

$$dw \int_{l_1}^{l_2} d_2\, dl = \frac{M}{l^2},$$

und die Einführung dieser Substitution an das Ende der Rysáneckschen Formel ergiebt die Newtonsche Beziehung der Gravitation zur Entfernung; denn l kann bei Rysáneck, sobald die Dimensionen der Körper im Verhältnis zu ihrem Abstande klein sind, als das Maſs des letzteren betrachtet werden.

Wir kommen nun zum dritten und wichtigsten Punkte, zur Frage nämlich, wie die Centripetalkraft zu der Masse der Körper sich verhält. In dieser Beziehung stützt sich die Deduktion der Rysáneckschen Kraftformel (S. 105) ausdrücklich auf eine frühere Überlegung (S. 100), worin der Satz vorkommt: „Die (an die Körpermoleküle) anstoſsende Schweräthermasse ist der Dichte des durchdrungenen Körpers und dem in ihm zurückgelegten Wege proportioniert.“ — Der mathematische Ausdruck dieses Satzes ist enthalten in der Gleichung:

$$\mu' = \mu \cdot N_2 \cdot \varrho_2{}^2 \pi \cdot l.$$

Letztere aber entstand aus der Gleichung:

$$\mu' = \mu(1 - e^{-N_2 \varrho_2{}^2 \pi l})$$

dadurch, daſs in der Exponentialreihe auſser dem absoluten und linearen Gliede alle übrigen vernachlässigt wurden.

Was nun die Ableitung der Funktion $e^{-N_2 \varrho_2{}^2 \pi l}$ angeht, so hatte Herr Rysáneck den anziehenden Körper ebenso, wie ich es im 16. Kapitel meines Buches schon gethan, senkrecht zur Richtung der Anziehung in Molekülschichten zerlegt. Die geometrische Reihe, welche sich ihm wie mir dabei ergiebt, hat er sodann dadurch, daſs er wiederum einige Gröſsen, namentlich auch den gegenseitigen Abstand der Schichten, als verschwindend klein vernachlässigt, mit Hülfe einer Reihe von Rechnungsoperationen in

die obige Exponentialfunktion umgewandelt. — Der mathematische Kern dieser Summation einer Reihe, bei welcher die Glieder schliefslich unendlich dicht aneinander gerückt werden, ist, wie man leicht erkennt, eine Integration, und die entsprechende physikalische Anschauung läuft darauf hinaus, dafs die Körper nicht mehr betrachtet werden als aus Molekülen bestehend, die durch verhältnismäfsig grofse Zwischenräume voneinander getrennt sind, sondern einfach als eine absorbierende Masse, welche zwischen den Grenzen jener Integration den Raum stetig erfüllt. In der That gelangt man auf Grund einer solchen Anschauung sehr rasch zu derselben Exponentialfunktion.

Läfst man nämlich durch irgend ein stetiges, homogenes Medium in einer bestimmten Richtung irgend ein absorbierbares Etwas (sei es ein Stoff, sei es Wärme, Licht oder eine andere Form der Energie) hindurchgehn, teilt senkrecht zu dieser Richtung das Medium in unendlich dünne, gleiche, ebene Schichten von der Dicke dl, setzt dann die Absorption proportional einerseits dieser Dicke, andererseits einer konstanten Gröfse k, so hat man dafür das Produkt $k \cdot dl$. Bezeichnet man ferner das ursprüngliche Quantum jenes absorbierbaren Objekts mit a, den vor seinem Anlangen an einer beliebig ausgewählten Schicht schon absorbierten Teil desselben mit x, den wirklich anlangenden Rest also mit $a - x$ und den in der Schicht selbst zur Absorption kommenden kleinen Betrag mit dx, so folgt aus der Homogenität des Mediums, dafs das Verhältnis zwischen diesem Betrag und dem anlangenden Quantum überall dasselbe ist, mithin hat man die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{a-x} = k \cdot dl, \quad \text{woraus:} \quad \log(a - x) = -kl + \text{Konst.}$$

Da mit l auch x zu Null wird, ist die Konstante gleich $\log a$, und man findet sehr rasch:

$$x = a(1 - e^{-kl}),$$

ein Resultat, worin man die Rysáneckscho Funktion wiedererkennen wird.

Bei dieser Überlegung waren die Schichten eben und von gleicher Ausdehnung gedacht. Läfst man aber das absorbierbare Etwas von allen Seiten her nach einem Centrum sich bewegen, giebt dem absorbierenden Körper die Form eines Kugelschalenstücks von beliebiger Dicke und Umgrenzung, so kommt man zu genau demselben Resultat. Denn wenn auch die Schichten dieses Körpers in der Richtung nach dem Mittelpunkte hin an Flächenausdehnung abnehmen, so wächst doch andererseits die Koncentration des absorbierbaren Objekts genau in demselben Verhältnis, und die Differentialgleichung bleibt dieselbe. — Einen singulären Fall hiervon, bei

welchem es sich um einen abgestumpften Kreiskegel mit parallelen sphärischen Grundflächen handelt, hat Herr Paul du Bois-Reymond im dritten Jahrgang der Naturwissenschaftlichen Rundschau (S. 27 u. 28) behandelt. Er ist natürlich zu dem gleichen Resultate gekommen und betrachtet dasselbe als einen wesentlichen Beweispunkt für die Unmöglichkeit einer mechanischen Erklärung der Schwerkraft. Auf seine diesbezüglichen Argumente bin ich in meiner Schrift: „Über die Fernkraft und das durch Paul du Bois-Reymond aufgestellte dritte Ignorabimus" S. 24 u. ff. ausführlich eingegangen. Herr Rysáneck erblickt in ganz derselben Exponentialfunktion keine Instanz gegen seine Theorie und geht über die darin liegende Schwierigkeit hinweg mit den Worten: „Falls aber $N_2 \varrho_2^2 \pi l$ eine sehr kleine Zahl ist, so kann man auch setzen: $\mu' = \mu N_2^2 \varrho_2^2 \pi l$. Die anstofsende Schweräthermasse ist also (!) der Dichte des durchdrungenen Körpers und dem in ihm zurückgelegten Wege proportional. Dieses Resultat führt dann in seinen weiteren Folgen zum Newtonschen Gravitationsgesetze." (l. c. S. 100.) —

Fassen wir nunmehr die Antwort auf unsere vierte kritische Frage knapp zusammen, so können wir sagen: Die Theorie Rysáneck's bietet bezüglich der Abhängigkeit der Fallenergie von der Energie des Äthers und von der Entfernung der gravitierenden Körper nichts wesentlich Neues. Bezüglich ihrer Abhängigkeit von der Masse aber wird unter Vernachlässigung einiger kleinen Werte zunächst eine Exponentialfunktion entwickelt und sodann aus dieser, um die Übereinstimmung mit dem Newtonschen Gesetze zu erzielen, ein einfaches Produkt abgeleitet, und zwar dadurch, dafs die Exponentialreihe schon gleich hinter dem linearen Gliede abgeschnitten wurde.

Hiermit ist auch schon ein Teil der fünften Frage, welche, wie früher bemerkt, die Abweichungen vom Newtonschen Gesetze zum Gegenstande hat, beantwortet. Ein zweiter Teil dieser Frage betrifft diejenige Abweichung, welche durch die Bewegungen der gravitierenden Massen begründet wird. Ich selbst habe schon im 18. Kapitel meines Buches über diesen Punkt gesprochen. Herr Rysáneck nun stellt eine Reihe von, wie mir scheint, nicht ganz einwandfreien Rechnungen an, welche in ihrem Verlauf und auch in ihren Schlufsresultaten noch so kompliziert sind, dafs es kaum thunlich sein würde, in Kürze darauf einzugehen. Ich mufs also in dieser Hinsicht auf die Abhandlung selbst verweisen und kann nur hervorheben, dafs — wie ja vorauszusehen war — der Einflufs der Bewegung auf das Kraftgesetz um so mehr verschwindet, je gröfser die Geschwindigkeit des Äthers angenommen wird.

Schlufs.

Wir stehen nunmehr zunächst vor der Aufgabe, das Resultat der Entwickelungen Rysánecks, welche unter den mir bekannt gewordenen die am weitesten durchgeführten sind, mit den in meinem Buche abgeleiteten Formeln zu vergleichen und darzulegen, wieweit jene in diesen als Spezialfälle schon enthalten sind.

Die von mir im 17. Kapitel entwickelte „vierte Annäherung" schliefst ab mit der für die einzelnen Schichten aufgestellten Reihe:

$$\Delta v \cdot \Delta c \left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)^0 + f(n)$$

$$\Delta v \cdot \Delta c \left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)^1 + f(2n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta v \cdot \Delta c \left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)^{p-1} + f(pn),$$

deren Summe gleich

$$\frac{\Delta v \cdot \Delta c \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)^p\right]}{1 - \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)} + \sum_1^p f(pn)$$

oder gleich $$v \cdot c \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)^p\right] + \sum_1^p f(pn)$$ ist.

Fassen wir den zweiten Summanden zuerst ins Auge. Die Einführung desselben beruhte auf der Überlegung, dafs eine gewisse, wenn auch kleine Zahl von Ätheratomen bei ihrem Wege durch den gravitierenden Körper möglicherweise an mehreren Atomen einer und derselben Schicht anstofsen, auch sogar auf vorhergehende Schichten zurückgeworfen werden, überhaupt gewisse „überschüssige Reflexionen" und damit auch überschüssige Energieschwächungen erleiden könnten, welche in dem ersten Summanden nicht berücksichtigt worden sind.[1]) Herr Rysáneck läfst diese Art von Stöfsen ganz aufser Betracht, also werden wir unserem zweiten Summanden in seinen Rechnungen nicht begegnen.

Was nun den ersten betrifft, so kann der in der Klammer enthaltene Ausdruck (auf den es bezüglich des Masseneinflusses allein ankommt) ersichtlicherweise, weil ja identisch $x = e^{\log x}$ ist, ohne Weiteres auch so aufgeschrieben werden:

---

1) Rätsel etc. S. 194.

$$1 - \left[e^{\log\left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)} \right]^p \quad \text{oder} \quad 1 - e^{p \cdot \log\left(1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\Delta c}{c}\right)}.$$

Hier bezeichnet $\frac{\Delta v}{v}$ das Verhältnis zweier Zahlen, von welchen die erstere angiebt, wieviel Atome bei den Molekülen der ersten Körperschicht anstofsen, die letztere, wieviel Atome bei dieser Schicht überhaupt anlangen. Um dieses Verhältnis in den Konstanten Rysáneck's auszudrücken, nennen wir mit ihm den Radius der Wirkungssphäre zwischen Körpermolekül und Ätheratom ϱ_2, die mittlere Entfernung der ersteren δ, die Zahl der in der Raumeinheit vorhandenen Moleküle N_2, dann ergiebt sich leicht, u. a. schon aus meiner Entwickelung S. 169[1]), dafs:

$$\delta = \left(\frac{c}{2v}\right)^{\frac{1}{3}} = N_2^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{N_2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

zu setzen ist. Sodann ist klar: wenn in jeder, also auch in einer würfelförmigen Raumeinheit N_2 Moleküle angetroffen werden, dann befinden sich längs der Kante deren $N_2^{\frac{1}{3}}$, also in der Grenzfläche deren $N_2^{\frac{2}{3}}$. Diese sperren dem Ätherhagel von jeder Flächeneinheit einen Teil ab, welcher gleich $N_2^{\frac{2}{3}} \cdot \varrho_2^2 \pi$ ist, also haben wir

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{N_2^{\frac{2}{3}} \cdot \varrho_2^2 \pi}{1} = N_2^{\frac{2}{3}} \cdot \varrho_2^2 \pi.$$

Was nun den zweiten Bruch $\frac{\Delta c}{c}$ betrifft, so drückt dieser das Verhältnis des Geschwindigkeitsverlustes, welchen ein stofsendes unelastisches Ätheratom erleidet, zur ganzen Geschwindigkeit aus, welche dasselbe vor dem Stofse hatte. Diesen Verlust habe ich in meinem 14. Kapitel bestimmt und als eine einfache Funktion der beiden Massen dargestellt.

Da Rysáneck vollständige Elasticität voraussetzt und dennoch zu seinen Rechnungen einen Geschwindigkeitsverlust gebraucht, so ist sein dafür abgeleiteter Ausdruck unbestimmt und enthält eine nicht genügend fundierte, willkürliche Gröfse q. Dazu kommt, dafs er in seinen Rechnungen die Fälle nicht mit einschliefst, wo die durch den gravitierenden Körper hindurchpassierenden Ätheratome mehr als einmal gegen Moleküle anprallen. Dadurch wird der von diesem Geschwindigkeitsverlust herrührende Faktor von der Schichtenzahl unabhängig und scheidet sich aus der

---

1) Da ja Ruhe und Bewegung, so lange weder Verdichtung noch Verdünnung eintritt, in Bezug auf diese Konstanten keinen Unterschied begründen, die Gleichungen also für ruhende Körpermoleküle dieselben bleiben, wie für die durcheinanderfliegenden Ätheratome.

hier in Rede stehenden Klammer heraus. Innerhalb derselben fehlt aus diesem Grunde bei Rysáneck eine unserem Bruche $\frac{\varDelta c}{c}$, den wir übrigens im Folgenden der Kürze halber mit ζ bezeichnen wollen, entsprechende Gröfse.

Nach diesen Substitutionen geht unsere letzte Formel über in:

$$1 - e^{p \cdot \log(1 - N_2^{\frac{2}{3}} \varrho_2^2 \pi \zeta)}.$$

Will man nun statt der Schichtenzahl p noch die Ausdehnung derselben in der Richtung der Centripetalkraft, d. h. die Rysáneck sche Gröfse l einführen, so ist dies leicht, weil ja längs der Längeneinheit $N_2^{\frac{1}{3}}$ Moleküle sind, demnach längs einer Strecke von l Einheiten auch $N_2^{\frac{1}{3}} \cdot l$ Moleküle angetroffen und daher ebensoviele Schichten gebildet werden müssen. Hiernach hat man:

$$1 - e^{N_2^{\frac{1}{3}} l \cdot \log(1 - N_2^{\frac{2}{3}} \varrho_2^2 \pi \zeta)}$$

oder auch, was dasselbe ist:

$$1 - e^{\frac{l}{\delta} \log\left[1 - \left(\frac{\varrho_2}{\delta}\right)^2 \pi \zeta\right]}.$$

Von diesem Ausdruck nun enthält die oben angeführte Rysáneck sche Formel denjenigen Spezialfall, welcher entsteht, wenn man (nach Ausscheidung von ζ) den Logarithmus in eine Reihe entwickelt und diese schon gleich hinter dem linearen Gliede abbricht. In der That ergiebt sich dann:

$$1 - e^{-\frac{l}{\delta}\left(\frac{\varrho_2}{\delta}\right)^2 \pi},$$

oder, was wiederum dasselbe ist:

$$1 - e^{-N_2 \varrho_2^2 \pi l}.$$

Dieses sein Resultat (vgl. die Klammer auf S. 197) geht daher nicht über die von mir abgeleitete Reihe hinaus, sondern hat vielmehr eine eingeschränktere Gültigkeit. —

Gehen wir nunmehr dazu über, das Ergebnis der im vorigen Abschnitte unter Voraussetzung einer stetigen und homogenen Raumerfüllung innerhalb des absorbierenden Körpers ausgeführten Integration mit der unter Voraussetzung einer diskontinuierlichen Raumerfüllung berechneten Summenformel zu vergleichen, so zeigt sich, dafs der Bau der in beiden Fällen erhaltenen Funktionen keinen Unterschied aufweist, und dafs nur statt des im ersten Falle benutzten konstanten Koefficienten k im zweiten Falle der Ausdruck

$$\frac{1}{\delta} \cdot \log\left[1 - \left(\frac{\varrho_2}{\delta}\right)^2 \pi \zeta\right]$$

auftritt. Diese Gröfse ist abhängig erstens von der mittleren Entfernung δ der Körpermoleküle, zweitens von dem Radius ϱ_2 der Wirkungssphäre zwischen den Körper- und Äthermolekülen, drittens von dem in der Gröfse ζ steckenden Massenverhältnis dieser beiden. Will man nun noch den Schritt, der von Manchen als notwendig, ja als selbstverständlich hingestellt worden ist, thun und in letzter Instanz die Einerleiheit aller Materie annehmen, dann tritt statt dieses Massenverhältnisses das Volumverhältnis ein, und damit ist dann überhaupt der dunkle und vielumstrittene Begriff der Masse aus dem Gravitationsgesetze weggeschafft. Alle noch darin vorkommenden Gröfsen sind räumliche und zeitliche Bestimmungen.

Dies gilt auch von denjenigen Faktoren, welche vor der zuletzt in Rede stehenden Klammer sich befinden. Von diesen sind vorhin schon die Gröfsen ν und c erörtert worden; dazu müfste allerdings noch das Symbol μ für die Masse der Äthermoleküle hinzukommen, allein statt dessen kann ebensogut das Volumen derselben eintreten, wenn wir dasselbe mit irgend einem konstanten, von der Wahl der Einheiten abhängigen Koefficienten multiplizieren. — —

Die geometrische Reihe[1]), deren Summe nach der Multiplikation mit μ von der Funktion:

$$\mu \cdot \nu \cdot c \left[1 - e^{\frac{l}{\delta} \log\left(1 - \left[\frac{\varrho}{\delta}\right]^2 \pi \zeta\right)}\right]$$

gar nicht verschieden ist, wurde von mir zwar unter bestimmten, in meinem Buche angegebenen Voraussetzungen abgeleitet. Es ist aber leicht einzusehen, dafs ihr Gültigkeitsbereich weiter geht.

Das Produkt $\mu \cdot \nu \cdot c$ bedeutet die Bewegungsquantität derjenigen Menge von Ätheratomen, welche in der Zeiteinheit von allen Seiten her durch eine in den Raum beliebig hineingelegte Ebene von der Gröfse Eins hindurchpassieren. Wegen der Substitution:

$$N = \frac{2\nu}{c}, \quad \text{also} \quad \mu \cdot \nu \cdot c = N\frac{\mu c^2}{2} = E$$

bedeutet es ebensowohl die lebendige Kraft der in der Raumeinheit durchschnittlich vorhandenen Äthermenge. Wir dürfen uns als Besitzer dieser Energie aber auch statt der durcheinanderschwirrenden Atome irgend etwas anderes vorstellen (wenn wir das können), z. B. irgend eine Substanz, welche wellenförmige oder sonst wie beschaffene Bewegungen macht. Lassen wir

---

1) Siehe „Rätsel“ S. 194.

dann diese Energieform koncentrisch durch ein absorbierendes Kugelschalenstück von der Dicke l und von stetigem, homogenem Stoffe hindurchpassieren und bezeichnen den Absorptionskoefficienten mit k, so resultiert daraus eine Schein-Anziehung, welche nach dem Früheren proportional ist dem Ausdrucke:

$$E(1 - e^{-kl}).$$

Wird das Kugelschalenstück jedoch nicht als ein stetig den Raum erfüllender Körper betrachtet, läfst es sich aber in unter sich gleichartige Schichten zerlegen, welche um den Abstand δ von einander entfernt sind, und bezeichnet man in diesem Falle den durch den Bau der einzelnen Schichten begründeten Absorptionkoefficienten mit $\varkappa$, so ergiebt sich das Resultat:

$$E \cdot \left[1 - e^{\frac{l}{\delta}\log(1-\varkappa)}\right].$$

Zwischen den Konstanten k und $\varkappa$ besteht die Relation $\varkappa = 1 - e^{-k\delta}$.

Für das Gravitationsproblem stellen diese Formeln aber offenbar immer nur eine mehr oder minder enge Annäherung dar, da bei ihrer Ableitung die Voraussetzung zu Grunde liegt, einerseits dafs jede Schicht in ihrer ganzen Ausdehnung durchaus gleichmäfsig absorbiere, die am Rande liegenden Teile nicht mehr noch weniger als die inneren, andererseits dafs die Wirkung einer Schicht (aufser von ihrer eigenen Ausdehnung und Struktur) lediglich abhängig sei von denjenigen Schichten, welche dem angezogenen Objekte abgewandt sind, von den übrigen aber nicht. Dafs letzteres, wenn auch in verhältnismäfsig geringem Betrage, dennoch der Fall sein könne, ist aber durch die Grundannahmen der Theorie keineswegs ausgeschlossen. Daher hatte ich meinen Formeln am Schlusse die unbestimmte, vorhin in dem Ausdruck $\sum_{1}^{p} f(pn)$ zusammengefafste Funktion beigefügt, um über den allen vorhergegangenen Rechnungen (wie überhaupt allen bisherigen Gravitationstheorien) anhaftenden Charakter der blofsen Annäherung meinerseits keinen Zweifel zu lassen.

$\varphi = +49^{\circ}$.

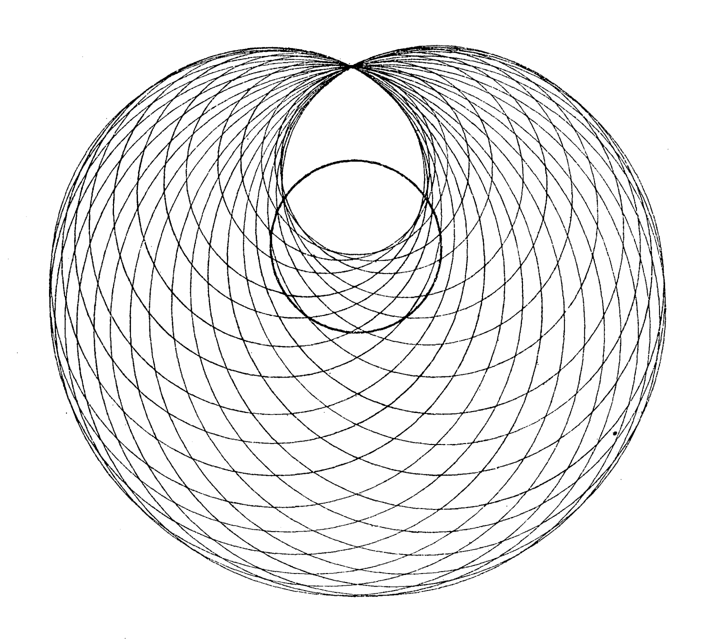
März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	August.	September.	October.	November.	December.	Januar.	Februar.

♓ ♈ ♉ ♊ ♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐ ♑ ♒ ♓

I

II

III



Lith. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

Supplement zum vierzigsten Jahrgang.

Der Supplemente zwölftes.

Zugleich der

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik

siebentes Heft.

Mit einer lithogr. Tafel und 16 Figuren im Text.



Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1895.

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

Siebentes Heft.

Mit einer lithogr. Tafel und 16 Figuren im Text.

Inhalt:



Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1895.

PTOLEMÄUS DE ANALEMMATE.

VON

J. L. HEIBERG

IN KOPENHAGEN.

MIT 10 TEXTFIGUREN.

Dass der bekannte Mailänder Palimpsest Ambros. L 99 sup. saec. VII u. a. auch Ueberreste des sonst verlorenen griechischen Textes von Ptolemäus' Schrift *Περὶ ἀναλήμματος* enthält, habe ich in dieser Zeitschrift (Abhandlungen z. Gesch. d. Mathematik V S. 4 Anm. ** Schluss) mitgetheilt. Während eines längeren Aufenthalts in Mailand habe ich jetzt das meiste von diesen Bruchstücken entziffert, soweit es mir ohne Reagentien möglich war, und lege hier meine Lesung vor, ohne vorläufig auf die vielen Fragen einzugehen, wozu das recht schwierige Schriftchen Anlass giebt; zu einem Verständniss im allgemeinen reicht der Commentar von Commandinus aus (Claudii Ptolemaei liber de analemmate a Federico Commandino Urbinate instauratus et commentariis illustratus, qui nunc primum eius opera e tenebris in lucem prodit. Ejusdem Federici Commandini liber de Horologiorum descriptione. Romae MDLXII. Apud Paulum Manutium Aldi f., 4to); vgl. auch Delambre, Histoire de l'astronomie ancienne II S. 458 ff.

Ueber die Art der Herausgabe bemerke ich nur folgendes. Die unsicheren, nur mit Wahrscheinlichkeit zu erkennenden Buchstaben sind in ( ) eingeschlossen. Wo absolut nichts zu lesen war, habe ich mit Hülfe der lateinischen Uebersetzung den Text restituirt; meine Ergänzungen sind in ⟨ ⟩ gesetzt; dabei ist von einer Zeile von 32 bis 36 Buchstaben ausgegangen. Wo die Ergänzung mir unsicher schien, habe ich den Defect durch Punkte angedeutet; die Zahl der fehlenden Buchstaben lässt sich nach der angegebenen Mittelzahl ungefähr berechnen. | bedeutet Schluss der Zeile in der Handschrift, || Schluss der Seite; die Seitenzahlen der Handschrift sind am Rande angegeben; auf die Seite kommen 28—29 Zeilen.

Dem griechischen Text gegenüber (wo er fehlt, allein) gebe ich die lateinische Uebersetzung Wilhelms von Moerbek nach cod. Ottobon. lat. 1850 saec. XIII fol. 55—57 (nach der modernen Zählung der Blätter fol. 62—64) nach einer Photographie. In der angeführten Abhandlung habe ich S. 8 ff. nachgewiesen, dass wir in dieser Handschrift die eigenhändige Originalübersetzung Wilhelms vor uns haben, eine Auffassung, die auch durch dieses Stück ihre Bestätigung findet; ich habe deshalb alles so gegeben, wie es in der Handschrift steht, bis auf einige orthographische Kleinigkeiten; nur habe ich natürlich die vielen Compendien aufgelöst. Die Figuren sind

nach denen der Handschrift bis auf die Buchstaben calquirt. Dem Wilhelm lag eine griechische Handschrift vor, wie die Randbemerkungen zeigen, ohne Zweifel die in dieser Zeitschrift Hist. Abtheilung XXXVII S. 97 nachgewiesene (in der Bibliothek des Papstes von 1311 nr. 608).

Nach dieser Handschrift hat Commandinus die Uebersetzung herausgegeben (Abhandl. z. Gesch. d. Math. V S. 4 Anm. **), aber stark daran corrigirt, wie er selbst in seiner Vorrede sagt (locos . . . deprauatos, quantum coniectura sum assecutus, restitui ac correxi; deinde quaecunque deerant, iis suppleui, quae cum antecedentibus Ptolemaei sententiis consentire iudicaui. quamuis nihil pro certo affirmauerim etc.); die Aenderungen gehen meist darauf hinaus, das mittelalterliche Latein des Uebersetzers etwas classischer zuzustutzen, was zuweilen nicht ohne missverständliche Aenderung des Sinnes abgeht. Jedenfalls haben diese Aenderungen für unsere Zwecke keinen Werth; ich habe sie daher nicht aufgeführt, von einigen wirklichen Emendationen abgesehen, die zur Erleichterung des Verständnisses in den Anmerkungen erwähnt sind. Ich mache besonders darauf aufmerksam, dass die Tabelle am Schluss, so wie sie hier nach der Handschrift gegeben ist (an den vier leeren Stellen 2, 3, 4, 5 ist natürlich $^2/_3 = 40'$ einzusetzen; *Γο* kommt für $^2/_3$ in den Handschriften der Syntaxis oft vor; es ist eine Verstümmelung von $\Gamma\beta = \gamma^{\beta}$), dem richtigen bedeutend näher kommt (vgl. Delambre II S. 471).

Zum Schluss schalte ich noch eine Beschreibung des palimpsesten Theils des Ambrosianus L 99 sup. ein.

Die obere Schrift ist aus dem VIII. Jahrhundert, die untere aus dem VII.; sie ist sehr schwer lesbar, wo die obere Schrift mit ihr zusammenfällt, viel besser geht es, wo diese zwischen den ausradirten Zeilen steht. Angelo Mai hat mit seiner Galläpfeltinctur grossen Schaden angerichtet; sie ist jetzt dunkelbraun geworden und hat auch die gegenüberstehenden Seiten überklekst. Die rescribirten Seiten sind:

113—114 (114 nicht beschrieben), veröffentlicht von Belger Hermes XVI S. 261 ff., verbessert von Cantor-Wachsmuth ebend. S. 637 ff. und von mir in dieser Zeitschrift XXVIII S. 121 ff., wo sie dem Anthemius vindicirt werden. Eine Nachvergleichung hat folgendes ergeben: S. 113, 23 *προυδεδει|γμένον* d. i. *προϋποδεδειγμένον*. 28 sicher: *οἱ μὲν οὖν* (Compendium) *παλαιοί*, darauf *δ . . λαβον*, also *δ⟨ιέ⟩λαβον*. 31 ist zwischen dem unsicheren *ἐν τῷ* und dem ganz klaren *πρὸς* noch ein *Γ*\` (*γὰρ*) zu erkennen, also vielleicht: *τοῦτο δὲ ψεῦδος Ἀπολλώνιος μάλα δεόν* | ⟨*τως λέγει*⟩· (*ἐν τῷ γὰρ*) *πρὸς τοὺς κατοπτρικοὺς κτλ.*, was bei den vielen Compendien zur Buchstabenzahl stimmt. S. 114, 23 ist zwischen

den sicheren Worten οὖσα und δὲ τοῦ nur für 4 Buchstaben Raum; αἵ ist nothwendig, mein Supplement ὑπόκειται also kaum richtig, wenn nicht υ'κ^τ geschrieben werden konnte; das Δ bei Belger habe ich nicht gesehen. 24 steht τῆς ηζεθ καὶ τῆς εγ γ^ω, also τῆς ηζ εὐθείας καὶ τῆς ηγ γωνία ohne περιφερείας. 25 ist εὐθείας nicht ευ^θ, sondern ε^υ geschrieben. 29 ist περιενεχθέν deutlich zu lesen.

117—118 unten herausgegeben (περὶ ἀναλήμματος).

119—120 ebenfalls; 119 fast unlesbar wie 118 gegen Ende.

123, fast unlesbar, weil die Schrift von S. 124 stark durchgeschlagen hat. Am Anfang lese ich: ειργασμενο(ς οια) ε' ϱ ⁒ [1]) ως ο εγ κιων ⊓ τ^ν [2]) α(ι) κιο|να ο α' ϡ [3]) ϱγ κυβος ⊓ τ' α' ϡ [4]) νι κυβον ⁒ η ϱγ ⊓ τ | .. φανερον ... ⸖ [5]) και ως ο εγ κιων ⊓ τ' αι κιονα | .... ⊓ ..... ⊓ ... τον αυτον τω δοθ^ς [6]) | .... | τον τω δο [7]). ως δε οι ϱη αι κιονες προς αλληλους | ... και οι να .... | Folgt Fig. 10. Zu ⁒ am Rande: ⁒ ως δε ο α' τῆς ϱγ κυβος προς τ' α' της νι κ^υ. Wie dieser Satz mit S. 124 in Verbindung gesetzt war, ist mir unklar.

124, nicht rescribirt, = Wattenbach, Scripturae Graecae specimina[2] tab. VIII.

129—130, s. unten (περὶ ἀναλήμματος).

139—140 ebenso.

143—144 ebenso.

157—158 ebenso.

189—190 (das Blatt ist umzukehren), fast ganz unlesbar, namentlich 189. Auf S. 190 lese ich:

.... τινα τροπον επεσκεπται ον ..... | .... τας τε καταβατικας και αντι .... | ... σκιους; nach der Mitte: ... του τε μεσημβρινου και του ..... | νου ουν οτι .... | Schluss: ... του κατα κορυφην επι τελ .. | — was dem Ptolemäus ähnlich sieht, doch finde ich in der Uebersetzung keine entsprechende Stelle. Sollte sie am Ende unvollständig sein, wie Delambre vermuthete?

195—196 (umzukehren), 195 unlesbar, auf 196: ... τουτεστιν εως αν η ακτις συμπεση | τη κοινη αυτων τομη τουτου δε γινομ⟨ενου⟩ .... ενδοτερον γιγνε⟨ται⟩ — Ptolemäus?

197—198, 198 unlesbar, 197 Anfang: ε' ϡ νδ =' εφ ..... ⟨β⟩αρυ και παλιν κ' ... | μξ ... τα των ...... | λαβοντες και δια τ(ων)

1) d. i. ἐπ(ε)ὶ οὖν ἐστιν. 2) πρὸς τὸν. 3) ἀπὸ τῆς. 4) πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς. 5) ἔσται. 6) δοθέντι. 7) δοθέντι.

.... *γενομεν̄ σημ* | .... *κανονιω δι αν* | .... *α γνωμων* | . *δε η δ* . *του ημικυ(λ)* . *η γδ* .... | ... *ποιας δε λου* .... | . *λομεθα δε* .....; etwas weiter unten | *λομεθα δια*....

235—236, 235 unlesbar, 236 Anfang: *θω ε* .... | ..... *ημερα του ηλιου με* ...... | *ρον τμημα του οριζοντος ετι δε* ...... *τες* | *του εαξ λαμβανομεν* .... |; weiter unten: *οι μεν γαρ* .... | und | *φερωμεν* ... . | *το νω* .... | — Ptolemäus?

241—242, 242 unlesbar, 241: ...... *ας* | .... *εν* | .... *απεχει*... | .... *τερον ε(μ)* | *τη* .... (*ενπ*) *α*|*ροδω* ...... *του ισημε*|*ρινου* .... *α εμαυτο(ν)* |; weiter unten: ⟨*π*⟩*αροδους και τα επι* | — Ptolemäus?

249—250, 249: ... *αμφοτερων των πλευρων* ..... | ... *λλη* ... *ου και του φεροντος συνκε* | *κ* ... *μεν* ..... *εν μονω τω φεροντι προς τα* | *του μεσημβρινου κατα τα εξαρματα των* | *πολων παραφορας απαρεγκλιτων* | — Ptolemäus?

251—252, 251: *εντομας ο τε πολευων και ο ζωδιακος ωστε* | *προς ορθας τ ακριβως ειναι και μιαν επιφα*|*νειαν ποιειν των τε κυρτων εμμερει και των* | *κοιλων επιφανειων τη αυτη μεν* ... | — Ptolemäus?

Aus den bezeichneten Seiten ist vielleicht mehr herauszubringen.

Der grosse Unterschied in der Verwendung der Compendien, indem im Ptolemäus (sowie S. 190, 196, 236, 241, 249, 251, die dadurch ebenso wie durch den Inhalt ihre Zugehörigkeit beweisen) fast nur der *ν*-Strich am Schluss der Zeile zur Verwendung kommt, während im „Anthemius" (S. 113—14, 123—24, 197) allerlei Compendien besonders zahlreich sind, erklärt sich wohl nur so, dass der spätere Schreiber zwei verschiedene Handschriften zerschnitt und verwendete. Dass man also im VIII. Jahrh. zwei solche alten Handschriften griechischer Mechanik und Astronomie in Italien besass und für werthlos hielt, ist eine interessante Thatsache.

Claudii Ptolemei liber de analemmate incipit.

Consideranti mihi, o Syre, angulorum acceptorum in locum gnomonicum quod rationale et quod non habitum quidem virorum illorum in lineis accidit admirari etiam in hiis et ualde acceptare, non coattendere autem ubique, et eam que secundum naturam in metodis consequentiam, ipsarum rerum non solum clamantium, quod et naturali theorie aliqua coassumptione magis mathematica et mathematice magis naturali, nullatenus exprobrauimus; non enim licitum est quod tale uiro amanti addiscere pure, sed obseruare, ut non propter dictam cogitationem unumquemque tractatuum ali-

qualiter imperfectiorem accidat fieri. qve itaque certitudinaliter deprehensa sunt michi[1]) secundum expositum locum, misi tibi consideraturo summatim, si quid tibi uidemur ad intellectum coauxisse et ad rationabilitatem suppositionum et ad promptitudinem usus eius qui per[2])

Qvoniam igitur eas que secundum unamquamque molem dimensiones consequens est determinatas esse et positione et multitudine sicut et magnitudine, declinationum autem que ad rectos angulos sole hunc habent modum; omnes enim alie et indeterminate secundum speciem et infinite secundum numerum; consequtum est tres solas esse tales secundum unamquamque molem dimensiones, quoniam et solas tres rectas ad rectos angulos inuicem constitui possibile est, plures autem hiis est impossibile; propter quod quidem et in spera sole tres diametri construuntur ad rectos angulos inuicem, et maximi circuli soli tres in recto angulo faciunt declinationes ad inuicem acceptorum in spera mundi, et uno quidem ipsorum intellecto secundum distinguentem quod sub terra emisperium ab eo quod super terram, uocatum autem orizontem, secundo autem penes distinguentem orientale emisperium ab occidentali, uocatum autem meridianum, reliquus et tertius erit penes separantem boreale emisperium ab eo quod ad meridiem, uocatum autem secundum verticem. et dictarum autem diametrorum communis quidem orizontis et meridiani uocatur meridiana, communis autem sectio meridiani et eius qui secundum verticem uocatur gnomon, communis autem sectio eius qui secundum verticem et orizontis uocetur equinoctialis, quoniam et ipsius equinoctialis ad ipsos fit communis sectio. simul translatis itaque cum sole hiis circulis circa manentes communes sectiones ut circa axes duas quidem possibile est intelligere lationes orizontis quidem circa equinoctialem diametrum ut ad id quod super terram et sub terra et circa meridionalem ut ad orientem et occasum, meridiani autem circa meridionalem diametrum ut ad ortus et occasus et circa diametrum gnomonis ut ad aquilonem et meridiem, eius autem qui secundum verticem circa diametrum gnomonis ut ad aquilonem et meridiem et circa equinoctialem ut ad id quod super terram et sub terra. sed quoniam non est possibile eundem simul duabus ferri lationibus, conuenientiorem et priorem duarum dictarum assignandum unicuique, hoc est orizonti quidem eam que circa equinoctialem diametrum, ut rursum determinet positionem ad id quod sub terra et super terram, meridiano autem eam que circa meridianum, ut notet distinctionem que ad ortum et occasum, ei autem qui secundum verticem eam que circa gnomonem, ut insinuet transitum ad aquilonem et

1) Hier durchstrichen: misi tibi. 2) Folgt eine Lücke, am Rande: ἀναλήμματ^{o}.

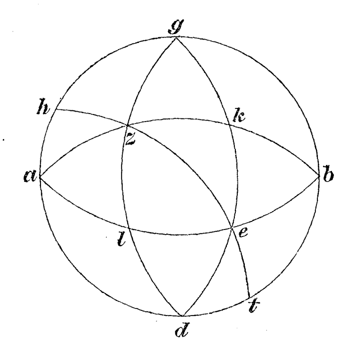
meridiem. facit autem orizontis quidem latio circulum, quem uocamus ektimoron, id est sex partium, quia altitudinem usque ad sextam horam manifestat, latio autem meridiani circulum, quem uocamus horarium, quia longitudini que secundum unamquamque horam comprogreditur, latio autem eius qui secundum verticem circulum, quem uocamus katauaticum, id est descensiuum, quia notificat descensionem ab altissimo ad humillimum. rursum unusquisque dictorum circulorum in coexaltatione cum solari radio super terram facit duas declinationes, quibus datis et positio radii determinatur, quoniam una ad tale non sufficit, harum autem alteram quidem a rectis contentam, scilicet a delata et manente, hoc est a radio et a diametro, circa quam fertur, alteram autem ab ipsis planis[1]) similiter a moto et a manente, ita ut duorum circulorum utriusque una sola declinationum data determinetur et positio radii. et eorum quidem qui ab[2]) ektimoro circulo fiunt angulorum consistentem quidem apud radium et apud diametrum equinoctialem non uidemus ab antiquis acceptum in locum gnomonicum, eum autem, qui ab ipsius declinatione ad orizontem fit, uocant ektimoron. factorum autem a circulo horario duorum angulorum eum quidem, qui apud radium et apud diametrum equinoctialem consistit, uocant horarium, eum autem qui ab ipsius declinatione ad meridianum in plano eius qui secundum verticem. factorum autem a circulo descensiuo duorum angulorum hic quidem apud radium et apud gnomonem consistit iterum[3]), hic autem ab ipsius declinatione ad eum qui secundum verticem; utuntur autem non hiis, sed pro angulo quidem, qui a gnomone et a radio continetur, utuntur deficiente ad unum rectum et uocant ipsum descensiuum, pro angulo autem, qui ab ipsius declinatione ad eum qui secundum verticem continetur, utuntur eo, qui constituitur a declinatione ipsius ad meridianum, vocant autem et hunc antiskion, id est contraumbralem. sextum autem angulum inserunt pro relicto eum, qui fit ab equinoctiali diametro et a communi sectione circuli horarii et equinoctialis, quem uocant in equinoctialis plano, et quidem equinoctiali non in omni climate eandem seruante positionem aliter passus est et orizon et meridianus et qui secundum verticem.

Ut autem sub uisu nobis magis cadat consequentia angulorum et quod supponitur, sit meridianus quidem circulus qui $abgd$, recti autem super ipsum et orientales semicirculi orizontis quidem qui aeb, eius autem qui secundum verticem qui ged, et supposita positione radii alicuius penes z describantur per ipsum trium circulorum orientales semicirculi circumdelati cum radio circa proprias diametros, ipsius quidem orizontis aeb facti ektimori

---

1) Hier similiter getilgt. 2) ex ausgelöscht. 3) Unsicher.

semicirculus *hzet* circa diametrum que apud *e* et per oppositum sibi diametraliter, ipsius autem meridiani *agb* facti horarii semicirculus *azkb* circa diametrum que per *a* et *b*, ipsius autem *ged* qui secundum verticem facti descensiui semicirculus *gzd* circa diametrum que per *g* et *d*. et accipiantur differentie angulorum in periferiis propriorum circulorum subtensis unicuique propter simpliciorem ostensionem. angulis quidem itaque, quos dicebamus constitui a radio et ab axe, periferie subtenduntur que *ze* ektimori periferia et que *za* horarii et que *zg* descensiui, angulis autem, qui fiunt a declinationibus planorum manentis circuli et transcidentis ipsum subtenduntur que *ah* meridiani periferia continens declinationem orizontis et ektimori et que *gk* eius qui secundum verticem periferia continens declinationem meridiani et horarii et que *el* orizontis periferia continens declinationem eius qui secundum verticem et descensiui.



Huius itaque consequentie subicientis angulosque et periferias conuenientes nature circulorum unam secundum unumquemque manentium et motorum antiqui ipsam quidem *ez* ektimori praetermiserunt, ut diximus, ponentes pro ipsa, quem uocant in equinoctialis plano, ipsam autem *az* seruant et uocant proprie horariam, pro ipsa autem *zl* assumpserunt[1]) nominantes ipsam descensiuam et rursum ipsam quidem *ah* seruant et uocant ektimoron, similiter autem et ipsam *gk* uocantes ipsam in plano eius qui secundum verticem, pro ipsa autem *el* assumunt ipsam *al* uocantes ipsam antiskion id est contraumbralem. differentia quidem igitur rationabilitatis penes id, quod supponitur, ad eos qui ante nos manifesta.

Qvoniam autem omnis angulus facit aliquas magnitudines ex utraque parte declinationis et quandoque quidem equales, ut in positione recta, quandoque autem inequales, ut in reliquis, necessarium utique erit et in angulis expositis aut periferiis condeterminari principium secundum unamquamque speciem, a quo acceptio et contrarietates declinationum earum que ad ortus uel occasus et earum que ad aquilonem uel meridiem. proposito igitur nobis existente acceptiones et expositiones et appellationes periferiarum facere secundum ordinem a ratione productum consequens erit et suppositionibus determinatio propria secundum unamquamque speciem. nominationes enim facimus ab ipsis circulis, quorum sunt periferie, et uocamus eas quidem que in motis ektimoriales et horarias et descensiuas,

1) Hier können (am Schluss der Zeile) noch zwei Buchstaben haben stehen sollen; vielleicht ist am Rande etwas verwischt. Zu lesen: autem *zg* assumpserunt *zl*.

eas autem que in manentibus similiter meridionales et secundum verticem et orizontes. et in magnitudinibus semper eligimus acutum angulum consistentium ex utraque parte, si non sint recti, et principia acceptionum facimus earum quidem que in circulis motis ab altero polorum circulationis, ad quam declinatio, hoc est in hiis quidem que ipsius ektimori[1]) a termino diametri equinoctialis ante mediationem quidem celi ab orientali, post mediationem autem ab occidentali, in hiis autem que horarii a termino diametri meridiani, quando quidem positio radii fuerit borealior circulo qui secundum verticem ab arctico, quando autem australior, a meridiano, quod et ipsum oportet obseruare, quoniam non eandem habet determinationem; in hiis uero que descensiui solum a termino gnomonis qui super terram. earum autem que in circulis manentibus ab altero termino tanquam communi sectione uniuscuiusque et suppositi plani, ad quem faciens angulum declinatio, hoc est in hiis quidem que meridiani a[2]) termino recte meridiane radio quidem existente borealiori quam circulus qui secundum verticem ab arctico, australiori autem a meridiano; et hoc enim rursum oportebit determinare; in hiis que eius qui secundum verticem a termino qui super terram gnomonis solum, in hiis autem que orizontis a termino diametri equinoctialis ante mediationem quidem celi ab orientali, post mediationem autem celi ab occidentali vel borealiori quidem existente radio quam circulus qui secundum verticem ut ad aquilonem, australiori autem ut ad meridiem; quod et ipsum oportebat[3]) obseruare, et quia uniuersaliter eas que ex utraque parte positiones earum, que in ortibus uel occasibus determinantur, dico autem earum que horarii et earum que descensiui et earum que eius qui secundum verticem, mediatio celi simpliciter designat, earum autem que versus aquilonem aut meridiem, dico autem earum que descensiui rursum et earum que ektimori et earum que meridiani et earum que orizontis, positio radii ex utraque parte circuli qui secundum verticem, et has ipsas non habentes unum et eundem terminum.

Premissis itaque hiis exponemus instrumentales acceptiones secundum unamquamque speciem subiacentium nobis angulorum exempli gratia, ut promptam habeamus methodum, que erit in .[4]) prius autem[5])

119	(fast ganz unlesbar)	secundum se superueniemus super
	τ⟨ὴ⟩(ν) τῆς παραλελειμμένης τοῖς πα-	anguli[1]) praetermissi ab antiquis,
120	λαιοῖςγωνίας,[1]) | ⟨ἣν⟩(ἡ)μ(εῖς)καλοῦμεν	quem nos uocamus ektimorum, ac-

1) Hier scheint ein *i* ausradirt. 2) ab die Hds. 3) Aus oportet corrigirt. 4) Lücke freigelassen, am Rande: *αναλημματε*. 5) Ein *δε* ist im Ambros. S. 119 am Anfang der Zeile sichtbar.

1) *γωνιᾶ*.

1) Folgt eine Rasur von 1 Buchstaben.

ἑκτήμορον, λῆψιν[1]) ⟨ὀργ⟩αν⟨ι⟩ | κ⟨ήν⟩, ⟨ἐπει⟩ δὴ καὶ τὴν ἀπόδειξιν[2]) ταύτης ἀναγκαῖ|ον ἂν εἴη συνάψα(ι) τ⟨οῖς⟩[3]) ἄλλως ἐκείνοις ἐ(φ)ω|δευμέν⟨οις⟩.

Ὅτι μὲν οὖν ἐν ταῖς ἰσημε|ρίαις αἱ ἐπιζητούμεναι γωνίαι αἰεὶ αἱ αὐταὶ | (γ)ί(γ)νονται ταῖς ἐν τῷ τοῦ ἰσημερινοῦ ἐπιπέ|δῳ, δῆλον αὐτόθεν· ἐφαρμόζει γὰρ αὐτῷ[4]) τό|τε δι' ὅλης τῆς ἐπιφορᾶς καὶ ὁ ἑκτήμορος κύκλος ἴσας[5]) δὲ[6]) ἀλλήλαις ποιοῦντι τάς τε καθ' ἑ|κάστην ἰσημερίαν ὡριαίαν περιφέρειαν|⟨ἐκ⟩ πεντεκαίδεκα χρόνων συνισταμένα(ς καὶ) | τὰς ἀκολούθους αὐταῖς γωνίας ἑκτημόρια πε|ριεχούσας μιᾶς ὀρθῆς.

Ἕνεκεν δὲ τῶν λοιπῶν[7]) | μηνιαίων ἔστω μεσημβρινὸς κύκλος ὁ αβγδ, | ἐν ᾧ ὁρίζοντος μὲν διάμετρος ἡ αβ, πρὸς ὀρθὰς | δὲ αὐτῇ καὶ κατὰ τὸν γνώμονα ἡ γδ, καὶ κέν|τρον μὲν τῆς ἡλιακῆς σφαίρας τὸ ε, ἑνὸς δὲ | τῶν βορειοτέρων[8]) τοῦ μεσημβρινοῦ μηνι|αίων παραλλήλων ἡ ζηθ διάμετρος, ἐφ' ἧς ἀ|νατολικὸν ἡμικύκλιον ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ | νοείσθω[9]) τὸ ζκθ, καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ζθ|ἡ κη, ὥστε τὸ ζκ τμῆμα τοῦ παραλλήλου[10]) ποιεῖν | ὑπὲρ γῆς, καὶ ἀποληφθείσης[11]) τῆς κλ περιφερεί|ας ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν (ζ)θ ἡ λμ, | καὶ κέντρῳ τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μλ εἰ|λήφθω σημεῖον ἐ⟨πὶ⟩ (τ)οῦ μεσημβρινοῦ τὸ ξ|,

1) ληψειν. 2) αποδιξιν. 3) των? 4) αυτων? 5) ισαις. 6) Zu tilgen? 7) λοιπῶ. 8) βορειωτερων. 9) νοεισθαι. 10) παραλλον. 11) απολειφθισης.

ceptionem instrumentalem, quoniam et demonstrationem huius necessarium utique erit coniungere hiis, que ab illis aliter tractata[1]) sunt. quod quidem igitur in equinoctiis anguli inquisiti semper iidem fiant hiis qui in plano equinoctialis, palam ex se; congruit enim ipsi quod per totam circulationem et circulus ektimorus facienti equales inuicem periferias que secundum unamquamque equinoctialem horam ex 15 gradibus consistentes et angulos ipsi consequentes continentes ektimoria, id est sextas partes unius recti.

Gratia autem reliquorum mensilium esto meridianus circulus qui *abgd*, in quo orizontis quidem diametrus qui *ab*, ad angulos autem rectos ipsi et secundum gnomonem que *gd* et centrum quidem solaris spere *e*, unius autem parallelorum mensilium magis borealium quam equinoctialis diametrus sit que *zht*, super quam orientalis semicirculus in eodem plano intelligatur qui *zkt*, et ducatur ad rectos angulos ipsi *zt* que *kh*, ita ut *zk* portio parallelli sit super terram, et absumpta periferia *kl* ducatur perpendicularis ab *l* super *zt* que *lm*, et centro quidem *m*, distantia autem que *ml* accipiatur signum in

1) trasctata.

καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἡ[1]) ελ καὶ ἡ μν καὶ ἡ εξ | καὶ ἡ μξ, ἀνήχθω τε τῇ 139 εν πρὸς ὀρθὰς ἡ εο. || λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν (ο)εξ[2]) γωνία ἴση ἐστὶν τῇ γωνίᾳ[3]) | τῇ ζητουμένῃ. νοείσθω γὰρ ἐπεστραμμένον | τὸ ζλϑ ἡμικύκλιον ἐπὶ τὴν οἰκείαν θέσιν |, τουτέστιν τὴν ὀρθὴν πρὸς τὸν τοῦ μεσημβρι|νοῦ ἐπίπεδον, καὶ ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ ε ὀρθὴ πρὸς | τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀντὶ τῆς ἰσημερινῆς διαμέ|τρου ἡ επ. ὅτι μὲν οὖν ὀρθῆς οὔσης καὶ τῆς λμ|(π)ρὸς τὸν μεσημβριν(ὸ)ν αἱ εν καὶ μλ καὶ επ ⟨εὐθεῖαι⟩ | ⟨εἰσιν⟩ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ⟨ὀρθῷ⟩ (π)ρ(ὸ)ς τὸ τοῦ (αβγδ) | ἐπίπεδον,[4]) δῆλον. ⟨ὁμοίως⟩ δέ, ὅτι καὶ ἡ εν[5]) κ(ο)ι|νὴ τομή ἐστιν τοῦ ἐκτημόρου κύκλου καὶ | τοῦ ἰσημερινοῦ, ἡ δὲ λε ἐπ' εὐθείας τῇ ἡλια|κῇ ἀκτῖνι,[6]) ἡ δὲ ἐπιζητουμένη γωνία, πε|ριεχομένη δὲ ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς ἰσημε|ρινῆς διαμέτρου ἡ ὑπὸ λεπ. δεικτέον (δέ,[7]) ὅ|τι) ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ξεο γωνία (τῇ ὑπὸ) ⟨λεπ⟩. | ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ελ τῇ ⟨ε⟩ξ, ⟨ἡ⟩ δὲ ⟨μλ τῇ | μξ⟩, κοινὴ δὲ ἡ εμ, κ⟨αὶ⟩ . . . .,[8]) ⟨ἡ ὑπὸ | μελ⟩ τῇ ὑπὸ μεξ[9]) ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ μεπ | καὶ ἡ ὑπὸ τῶν μεο,[10]) ἐπεὶ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν εμλ· | καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν λεπ λοιπῇ τῇ ὑπὸ μεξ, | τουτέστιν τῇ ὑπὸ τῶν ξεο, ἴση ἐστίν· ὅπερ | ἔ(δ)⟨ει δεῖξαι⟩.[11])

β. Ἑξῆς δὲ καὶ τὰς κοινὰς | αὐτῶν λήψεις ἐκθησό|μεθα τὰς γινομένας[12]) |

1) αι. 2) Oder εξο. 3) γ mit übergeschriebenem ω. 4) επιπεδω. 5) Lies ἡ μὲν εν. 6) ακτεινη. 7) δε unsicher; lies δή. 8) Undeutliche Spuren, etwa λιπ.(ιαν)....ξ̄. 9) μξ(ε). 10) μεξ. 11) Hier Fig. 2 (t = ϑ). 12) γενομενας.

meridiano, quod sit *x*, et copulentur que *el*, *emn* et *ex*[1]) et *mx*, ducatur autem ipsi *en* ad rectos angulos que *eo*. dico, quod angulus qui sub *xeo* est equalis quesito. intelligatur enim semicirculus *zlt* conuersus ad propriam positionem, hoc est rectam ad planum meridiani, et producatur ab *e* recta ad idem planum pro equinoctiali diametro que *ep*. quod quidem igitur et ipsa *lm* existente recta ad meridianum que *en* et *ml* et *ep* recte sunt in uno plano recto ad *abgd*, palam. similiter autem quod[2]) et que quidem *en* est communis sectio circuli[3]) ektimori et meridiani, que autem *el* in recta ad solarem radium, quesitus autem angulus, contentus autem a radio et a diametro equinoctiali qui sub *lep*. demonstrandum igitur, quod angulus qui sub *xeo* est equalis ei qui sub *lep*. quoniam enim equalis est[4]) que quidem *el* ipsi *ex*, qve autem *ml* ipsi *mx*, communis autem que *em*, et angulus ergo qui sub *mel* est equalis ei qui sub *mex*. rectus autem qui sub *mep* et qui sub *meo*, quoniam et qui sub *eml*; et reliquus ergo qui sub *lep* reliquo ei qui sub *mex*, hoc est ei qui sub *xeo*, equalis est; quod quidem oportebat demonstrare.

Consequenter autem et communes ipsorum acceptiones exponemus, que

1) So, am Rande: *tz*. 2) Uebergeschrieben. 3) Folgt ex getilgt. 4) ē̤i.

140 χωρὶς ἐπί τε τοῦ ἰση ‖ μερινοῦ καὶ πάλιν ἐπί τινος τῶν βορειοτέρων | ἢ νοτιωτέρων αὐτοῦ[1]) παραλλήλων. ἔστω (τοίνυν) | μεσημβρι(ν)ὸς κύκλος ὁ αβγδ, ἐν ᾧ ὁρίζοντο(ς) | μὲν διάμετρος ἡ αβ, πρὸς ὀρθὰς δὲ αὐτῇ καὶ | κατὰ τὸν γνώμονα ἡ ⟨γδ⟩ καὶ κέντρον (τῆς) | ἡλιακῆς σφαίρας τὸ ε, ἡ δὲ τοῦ (κλίμ)⟨ατος⟩ | περιφέρεια ἡ γζ, καὶ διήχθω πρότερον | ἰσημερινὴ διάμετρος ἡ ζεη, ἐφ' ἧς τὸ ⟨ζθη⟩ | ἡμικύκλιον (κεί)σθω μὲν ἐν τῷ τοῦ μεσημ|βρινοῦ ἐπιπέδῳ, νοείσθω δὲ ἐν τῷ πρὸς ἀ|νατολὰς ἡμισφαιρίῳ, γραφέτω τε ὁ ἥλιος | πρὸς αἴσθησιν ἐν τῇ μιᾷ περιπολήσει τούτων[2]) | τε καὶ τῶν ἄλλων μηνιαίων (ἕκασ)τον, καὶ ἀνα-|χθείσης (τ)ῆς ε⟨θ⟩ καθέτου πρὸς τὴν ζη, ὥστε (τὸ) ζ(θ) | τεταρτημόριον ποιεῖν ὑπὲρ γῆ(ν). ἀπειλήφθ(ω)|(ἡ) θ(κ) περιφέρεια δοθεισῶν ὡρῶν, καὶ προ|κείσθω τὰς ἐν τῇ θέσει ταύτῃ γωνίας λαβεῖν.[3]) | ἤχθωσαν μὲν δὴ κάθετοι ἀπὸ μὲν τοῦ κ ἐπὶ|τὴν ζη ἡ κλ, ἀπὸ δὲ τοῦ λ ἐπὶ μὲν τὴν ε(α) | ἡ μλν, ἐπὶ[4]) δὲ τὴν εγ ἡ ξλο,[5]) καὶ τῇ (λ)κ ἴσαι | κείσθωσαν ἥ τε ξπ καὶ ἡ ρμ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν[6]) | ἡ εκ καὶ ἡ εν καὶ ἡ εο[7]) καὶ ἔτι ἡ επσ καὶ ε(ρτ). | ὅτι μὲν οὖν (ν)οτιωτέρα ἐστὶν ἡ ἀκ(τ)ὶς τοῦ | κατὰ κορυφὴν κύκλου

1) νοτειοτερων ων. 2) τουτῶ. 3) λαβεῖ. 4) επει. 5) ξολ. 6) επεξευχθωσᾶ. 7) εθ?

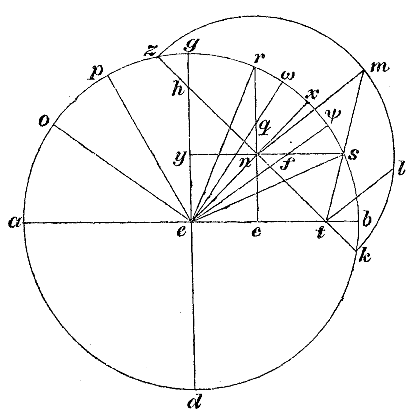
fiunt seorsum super equinoctialem et rursum super aliquem boraliorem aut australiorem ipso parallelorum mensilium. sit igitur meridianus circulus qui *abgd*, in quo orizontis quidem diameter qui *ab*, ad rectos autem ipsi et secundum gnomonem que *gd* et centrum quidem solaris spere *e*, climatis autem periferia que *gz*, et producatur prius equinoctialis diameter que *zeh*, super quam semicirculus *zth* iaceat quidem in plano meridiani, intelligatur autem in emisperio ad orientem, describaturque sol ad sensum in una circumuolutione horum et aliorum mensilium parallelorum,[1]) et producta que *et* perpendiculari ad *zh*, ita ut quod *zt* tetartimorion, id est quarta pars, sit supra terram. absumatur que *tk* periferia datarum horarum, et intendatur angulos qui in hac positione accipere. ducantur itaque perpendiculares a *k* quidem super *zh* que *ek*, ab *l* autem super *eh* que *mln*, super *eg* autem que *xlo*, et ipsi *lk* equales iaceant que *xp* et que *rm*, et copulentur que *ek* et *en* et *eo* et adhuc que *eps* et *erc*. quod quidem igitur australior est radius circulo qui secundum verticem per

1) Hierzu am Rande: ἑκαϛ.

δι' ὅλης τῆς ὑπὲρ γῆν[1]) | περιφορᾶς ἐπί τε τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τῶν[2]) | νοτιωτέρων[3]) αὐτοῦ παραλλήλων διὰ τὸ | τὴν κλίσιν τῆς σφαίρας ἐν τῇ καθ' ἡμᾶς | οἰκουμένῃ τετράφθαι πρὸς μεσημβρίαν, | καὶ δεῖ τὰς προσνεύσεις ἀκολούθους αὐτῆς ||

totam circulationem supra terram in equinoctiali et in parallelis borealioribus[1]) ipso, quia inclinatio spere[2]) in habitata secundum nos versa est ad meridiem, et oportet adnuitiones consequentes positioni ipsius determinare, manifestum.

continet autem angulus qui sub *ekl*, hoc est qui sub *tek*, angulum[1]) circuli ektimori, qui sit idem, ut diximus, hic ei qui in plano equinoctialis, angulus autem qui sub *aen* eum qui horarii, qui autem sub *geo* eum qui descensiui, et rursum qui quidem sub *aez* eum qui meridiani, qui autem sub *gec* eum qui orizontis.



Exponatur itaque rursum qui *abgd* meridianus cum diametris *ab* et *gd*, et protrahantur in ipso diametri parallelorum mensilium borealiorum equinoctiali *zhtk*, super quam similiter describatur semicirculus orientalis qui *zlk*, et ad rectos angulos ipsi *zk* ducatur que *tl*, ita ut *zl* portio paralleli sit super terram. absumpta autem *lm* periferia datarum horarum ducatur ab *m* perpendicularis super *zt* que *mn* ipso *n* faciente uidelicet positionem radii borealiorem quidem circulo qui secundum verticem, quando fuerit super *ht*, australiorem autem, quando fuerit super *zh*. protrahatur etiam rursum que *enx*, et recta ad ipsam erigatur que *eo*. accipiantur igitur in meridiano signa tria, centro quidem *n*, distantia autem *mn* quod *p*, centro autem *t*, distantia uero *tm* quod *r*, centro etiam *h*, distantia autem *hm* quod .[2]) deinde productis *rnc* et *sny* — ipse enim sunt per *n* accepte perpendiculares ad *eb* et *eg* — absumantur in ipsis similiter equales ipsi *mn* que *ynf* et *cnq*, et copulentur que *ep* et *er* et *es* et *mt* et adhuc que *efψ* et que *eqω*. continet itaque et hic angulus quidem qui sub *peo* angulum circuli ektimori, qvi autem sub *ber* eum qui horarii, qvi uero sub *geo* eum qui descensiui, et rursum qui quidem sub *bex* eum qui meridiani, qvi autem sub *geψ* eum qui eius qui secundum verticem,

1) γῇ. 2) τῶ. 3) νοτ(ει)οτερων (muss heissen: βορειοτέρων).

1) Am Rande: australioribus in greco. 2) ſpe.

1) Hier getilgt: qui. 2) Folgt eine kleine Lücke, am Rande: ϱψ.

qvi vero sub *geω* eum qui orizontis, angulo qui sub *tmn* faciente eum qui in plano equinoctialis.

Instrumentales quidem igitur acceptiones hunc continent modum assumpta simili consequentia in omnibus positionibus; in expositione autem quantitatum consistentium secundum unumquodque clima et signum et gradum sufficient quidem in ipsis solis periferiis subtendentibus angulos facere mensurationes, ut promptas ipsas habeamus in numeris et non

157 καταγραφὰς διωρισμένας τῇδε καθάπαξ | ἀναγκα(ζ)όμεθ⟨α⟩ ⟨πραγματεύσασθαι⟩ ἀπὸ τοῦ ἀ|ναλήμματος τὰς ⟨ἐπιζητου⟩-μένας γωνίας | τῶν εὐθειῶν σχεδὸν πάν⟨τη . . . .⟩ (ι)νομένων,[1] | ἀλλ' ἐφ' . . . . ἑνί τινι τεταρτη-|μορίῳ κύκλου διῃρημένῳ εἰς τὰ τῆς (μι)ᾶς | ⟨ὀρθῆς μοίρας⟩ τὰ(ς) ἐνενήκοντα τὸ ἴσον ἐνγρά|φοντες ἢ περιγράφοντες ὁμόκεντρον τῷ | δεδομένῳ πρὸς τὴν κατασκευὴν καὶ λαμβά|νοντ(ες) ἀπὸ τοῦ διῃρημένου τὰς τὸν οἰκεῖον | ἀριθμὸν τῶν . . . ορισμ . . . . ⟨με⟩ | ταφέρομεν[2] ἐπὶ τὸ ἴσον αὐ⟨τῷ τεταρτημόρι⟩|ον καὶ διὰ τῶν λαμβαν⟨ομένων περάτων⟩ | καὶ τοῦ κοινοῦ κέντρου τῶν κύκλων ἄγοντες | εὐθείας εὑρίσκομεν τὰς τῶν δεδομένων | μειζόνων ἢ ἐλαττόν⟨ων⟩ κύκλων γωνίας τε | καὶ περιφερείας. ἡ δὲ τοιαύτη λῆψις[3] ὑ|πάρχ(ο)ι (μὲν)[4] ἂν καὶ διὰ τῶν γραμμῶν ἐπὶ | τὸ ἀκριβέστατον τοῖς προαιρουμένοις, γένοι|το δ' ἂν εὐποριστοτέρα καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ ἀνα-|λήμματος, κἂν μὴ ἀπαράλλακτο(ς) τῇ ⟨διὰ⟩ | γραμμικ⟨ῶν ἀποδείξεων⟩ . . . . | . . . . ⟨πρὸς ἣν τὸ χρη⟩στικὸν (τ)⟨έ⟩|⟨λος⟩ ἀνάγεται ⟨τῆς⟩ προκειμένης πραγματεί|ας. ὃν

1) ινομενῶ. 2) ταφερωμεν. 3) ληψεις. 4) η μεν?

descriptiones determinatas scilicet secundum semel cogimur negotiari per[1] inquisitos angulos rectarum fere ubique confusarum, sed in unaquaque oportunitatum una quadam[2] quarta parte circuli diuisa in unius recti portiones 90 equale inscribentes et circumscribentes concentricum cum dato ad[3] et accipientes a diuiso distantias continentes numerum conuenientium graduum transferimus ad equalem sibi quartam partem et per deprehensos terminos et per commune centrum circulorum producentes rectas inueniamus angulos et periferias in datis circulis maioribus uel minoribus. talis autem acceptio exstabit quidem utique et per lineas ad certissimum uolentibus, fiet autem utique facilius acquisibilis et per ipsum[4] , et si non sit eque inuiciabilis[5] ei que per lineares demonstrationes, tamen usque ad examinationem que ad sensum, ad quam reducitur finis usualis suppositi negotii. qvo autem modo uterque processuum ad promptissimum nobis accipietur, ostendemus in parte summatim premissa consideratione que per numeros ita se habente.

1) Lücke, am Rande: αναλημματ (ο über τ). 2) d aus l. 3) Lücke, am Rande: κατασκεωμ (vHv darüber). 4) Lücke, am Rande: αναλημματ (ο über τ). 5) Am Rande: ἀπαραλ|λακτ (ο über τ).

δὲ τρόπον ἑκατέρα τῶν ἐφόδων ἐπὶ|τὸ προχειρότατον ἡμῖν ἐκληφθήσεται, δεί-| ξομεν ἐν μέρει κεφαλαιωδῶς προτάξαν-| τες τὴν διὰ τῶν γραμμῶν ἐπίσκεψιν ἔχου(σ)|⟨αν οὕτως . κείσθω⟩ ὁ αβγδ
158 μεσημβρινὸς περὶ || κέντρον τὸ ε, ἐν ᾧ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλή|λαις τῆς κοινῆς τομῆς ⟨αὐτοῦ⟩ καὶ τοῦ ὁρίζον-| τος ἡ αβ, ⟨τοῦ δὲ γνώμονος ἡ γδ, ἔστω τε δοθὲν τὸ ἔ⟩|ξαρμα τ⟨οῦ πόλου καὶ περιεχέσθω ὑπὸ τῆς αζ⟩ περιφε-ρε⟨ίας, καὶ ἤχθω ἄξων μὲν ὁ ζεη, ἰσημερινὴ⟩ | (δ)ὲ (πρό)⟨τερον⟩ διάμετρο⟨ς ἡ θεκ, καὶ ἀπειλή⟩φ⟨θω⟩ | δοθεῖσα περιφέρεια ⟨ἡ ζλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἤχθωσαν⟩ | κάθετοι ἐπὶ μὲν τὴν εζ ἡ (μλ), ἐπὶ δὲ τὴν ⟨εκ ἡ λν⟩, | ὁμοίως δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ ν ἐπὶ μὲν τὴν (εβ) ἡ ξν⟨ο⟩, | ἐπὶ δὲ τὴν εδ ἡ πνρ. ἐπεὶ[1]) ⟨τοί⟩νυ⟨ν⟩ δέδοται ἡ αζ | περιφέρεια, τουτέστιν ἡ (δ)κ, δοθεῖσα ἔσται | καὶ ἡ ὑπὸ τῶν πεν[2]) γωνία. ὀρθὴ δὲ (ἡ) πρὸς τῷ π· | δέδοται ἄρα καὶ ⟨ὁ τῆς εν ὑποτεινούσης λόγος⟩ | πρὸς ἑκατέραν τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, τουτέστιν | τὰς (ε)π καὶ πν καὶ τὰς ⟨ἴσας αὐταῖς τὰς νξ καὶ εξ⟩. | καὶ πάλιν ἐπεὶ[3]) δέδοται ἡ λ⟨ζ⟩ περιφερε⟨ια, τεταρ⟩ | τημορίου[4]) δέ ἐστιν ⟨ἡ κζ, ὥστε καὶ τὴν⟩ | λοιπὴν τὴ⟨ν⟩ κλ δεδόσθαι,

1) επι. 2) Corrigirt aus πνε. 3) επι. 4) Hier folgt ὀρθή (also getilgt).

Exponatur meridianus qui *abgd* circa centrum *e*, in quo diametri ad rectos angulos inuicem, communis quidem sectionis ipsius et orizontis que *ab*, gnomonis autem que *gd*, sitque data eleuatio poli et contineatur a periferia *az*, et protrahatur axis quidem qui *zeh*, equinoctialis autem prius diameter que *tek*, et absumatur data periferia que *zl*, et ab *l* ducantur perpendiculares super *ez* quidem que *lm*, super *ek* autem que *ln*, similiter autem et ab *n* super *eb* quidem que *xno*, super *ed* autem que *pnr*. quoniam igitur data est periferia *az*, hoc est que *dk*, datus[1]) erit et angulus qui sub *pen*. rectus autem qui apud *p*; data est ergo et ipsius *en* subtense proportio ad utramque earum que circa rectum, hoc est ad ipsas *ep* et *pn* et ad equales ipsis scilicet *nx* et *ex*. rursum quoniam data est que *lz* periferia, qvarte autem partis est que *kz*, quare et reliqua que *kl* data est, subtenditur autem duple ipsius *lz* periferie dupla ipsius *lm*

1) data, aber in datus corrigirt.

ὑπο(τεί)ν(ει) ⟨δὲ⟩ τὴν μὲν | διπλῆν τῆς ζλ περιφερείας ἡ διπλῆ τῆς ⟨λμ⟩ | εὐθείας, τὴν δὲ διπλῆν τῆς λκ περιφερείας | ⟨ἡ⟩ διπλ⟨ῆ τῆς λν⟩ εὐθείας, δοθήσεται καὶ ὁ λόγος | ἑκατέρας τῶν λμ καὶ ⟨λν⟩ πρὸς τὴν τοῦ μεσ⟨ημ⟩ | βρινοῦ διάμετρον. (ὥσ)τε καὶ ὁ τῆς εν, ⟨ἥ ἐστιν ἴση⟩ | τῇ λμ, καὶ ὁ τῶν τοῦ επ ⟨νξ τετραγώνου[1]) πλευρῶν⟩. | ἀπειλήφθωσαν δὴ τῇ λν ἴσαι ἥ (τε) π(σ)[2]) καὶ ⟨ἡ ξτ⟩, καὶ διήχθωσαν (α)ἱ εο καὶ ε(ρ)[3]) καὶ εσυ καὶ ετφ|. ἡ μὲν τοίνυν ζλ περιφέρεια ἴση οὖσα τῇ | τοῦ ἑκτημορίου καὶ ἔτι τῇ ἐν τῷ τοῦ | ἰσημερι⟨νο⟩ῦ ἐπιπέδῳ αὐτ(όθεν) δέδοται. ||

recte, duple autem ipsius *lk* periferie dupla ipsius *ln* recte, data erit et proportio utraque ipsarum *lm* et *ln* ad diametrum meridiani. quare et proportio ipsius *en*, que est equalis ipsi *lm*, et proportio ipsarum *ep*, *nx* laterum tetragoni. sumantur itaque ipsi *ln* equales que *ps* et que *xc*, et protrahantur que *oe* et *er* et *esy* et *ecf*. qve quidem igitur *zl* periferia existens equalis ei que circuli ektimori et adhuc ei que in plano equinoctialis ex se data est.

143 ⟨ἐπεὶ δὲ καὶ τοῦ εξο ὀρθο⟩γωνίου τριγώνου | δέδοται ἡ ⟨εξ καὶ ἡ ξο⟩, καὶ ἡ ⟨εο⟩ ὑποτείνουσα[4]) δοθήσε(ται) | ⟨καὶ ἡ ὑπὸ οεξ γωνία. ὥστε⟩ καὶ ἡ βο[5]) περιφέρει|(α) περιέχουσα ⟨τὴν τοῦ ὡριαίου κύ⟩κλου. ὁμοίως | ⟨δὲ ἐπεὶ καὶ τοῦ επρ ὀρθογωνίου⟩ δέδοται ἥ τε επ | καὶ ἡ ⟨πρ⟩[6]), δοθήσεται καὶ ἥ τε ⟨ερ⟩ ὑπο⟨τείνουσα καὶ⟩ | ⟨ἡ ὑπὸ ερπ γωνία καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ⟩ (π)ερ αὐτή τε καὶ | ἡ δρ περιφέρεια ἴση οὖσα τῇ τοῦ καταβατι|κοῦ. πάλιν ἡ μὲν ηκ[7]) περιφέρεια ποιοῦσα τὴν | τοῦ μεσημβρινοῦ αὐτόθεν δέδοται. ἐπεὶ δὲ καὶ | τοῦ π⟨εσ⟩ ὀρθογωνίου δέδοται ἥ τε επ καὶ ἡ π(σ), | δοθήσεται καὶ ἥ τε εσ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ὑπὸ | ⟨πσε γωνί⟩α αὐτή τε καὶ ἡ (δ)υ περιφέρεια ἴση οὖ|⟨σα τῇ⟩ (τοῦ) κατὰ κορυφήν. ὁμοίως δὲ ἐπεὶ[8]) καὶ τοῦ | (τ)ξ(ε)

quoniam et ipsius *exo* rectanguli trigoni data est que *ex* et que *xo*, et que *eo* subtendens dabitur et angulus qui sub *eox* et reliquus qui sub *oex*. quare et que *bo* periferia continens eum qui circuli horarii. similiter autem quoniam et ipsius *epr* rectanguli data est que *ep* et que *pr*, et que *er* subtendens dabitur et angulus qui sub *erp*[1]) et reliquus qui sub *per*, simul cum ipso et que *dr* periferia existens equalis ei que circuli descensiui. rursum que quidem *hk* periferia faciens eum qui meridiani ex se data est. quoniam et ipsius *eps* rectanguli que *ep* et que *ps*, dabitur et que *es* subtensa et angulus qui sub *pse*[2]) ipseque et que *dy* periferia existens equalis ei que circuli qui secundum verticem. similiter autem

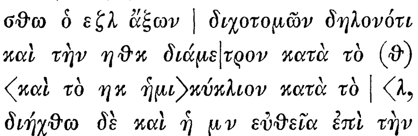
---

1) Die Spuren führen eher auf κυκλον. 2) πε? 3) εκ? 4) υποτινουσα. 5) αο? 6) Hier scheint Raum für mehr Buchstaben zu sein. 7) ακ? 8) επι.

1) *eprp*. 2) Hier fehlt: et reliquus *pes*.

ὀρθογωνίου δέδο⟨ται ἥ τε⟩ εξ καὶ ἡ ξ(τ), δοθή|σεται καὶ ἥ τε ε(τ) ὑποτείνουσα καὶ ἡ ὑπὸ τεξ | γωνία, (τουτέσ)τιν ἡ ὑπὸ τῶν δε(τ)[1] *αὐτή τε καὶ ἡ | (δ)φ περιφέρεια ἴση οὖσα τῇ τοῦ ὁρίζοντος.»* —

ε̄. *κ(αὶ) τῶν ἄλλων δὲ μη|νιαίων*[2] *ἕνεκεν ἐκκεί|(σ)θω*[3] *ὁ αβ(γδ) μεσημβρι|νὸς μετὰ τῶν πρὸς ὀρθὰς | ἀλλήλα(ι)ς διαμέτρων | καὶ τοῦ εζ ἄξονος, καὶ δι|ήχθω τινὸς*[4] *τῶν νοτιω|τέρων τοῦ ἰσημερινοῦ | μηνιαίων παραλλήλων*[5] *| διάμετρος ἡ ηθκ, (ἐ)φ' ἧς | ⟨τὸ⟩ πρὸς ἀνατολὰς νοούμενον ἡμικύκλιον γεγρά-‖* 144 *φθω*[6] *τὸ ηλκ, καὶ προσεκβεβλήσθω ὁ εζλ ἄξων | διχοτομῶν δηλονότι καὶ τὴν ηθκ διάμε|τρον κατὰ τὸ (θ) ⟨καὶ τὸ ηκ ἡμι⟩κύκλιον κατὰ τὸ | ⟨λ, διήχθω δὲ καὶ ἡ μν εὐθεῖα ἐπὶ τὴν*



quoniam et ipsius *exc* rectanguli data est que *ex* et que *xc*, dabitur et subtensa que *ec* et angulus qui sub *cex*,[1] hoc est qui sub *dec* ipseque et que *df* periferia existens equalis ei que orizontis.

Et aliorum autem mensilium gratia exponatur qui *abgd* meridianus cum diametris ad rectos inuicem et cum axe *ez*, et producatur unius rursum australiorum equinoctiali mensilium parallelorum diameter que *htk*, super quam ad orientem intellectus semicirculus describatur qui *hlk*, et usque ad ipsum educatur axis *ezl* in duo equa uidelicet secans ipsam *htk* diametrum penes *t* et semicirculum *hk* penes *l*. producatur autem et que *mn* recta super *ht* determinans *hn*[2])

---

1) δεζ? 2) Hier Fig. 5, die Buchstaben σ und υ nicht erkennbar, λ und ζ unsicher. 3) εκκη⟨σ⟩θω? 4) τινος übergeschrieben, im Text εως, vielleicht τέως τινός. 5) παραλληλω̄. 6) Am oberen Rand steht hier ein Scholion: ☍ εαν γ́ προσεκβληθη επ εὐθ η . ε εως τ̋ π'φεριας τ̆ κ̆ κ) ε'ζεν . . . . . . | ηκ εὐθ τις ορθοῦ γινεται △ . . . κιως η . . . . ηκη . . . . τ̋ εγγυτ . . . . . | ημισια δε η ηθ της ηκ ημισ . . . . . η γε . . . . νης.

1) Zu lesen: *ecx*. 2) Darauf getilgt: s (der Uebersetzer wollte anfangs segmentum).

η θ⟩ (διορί)|ζουσα τὸ ην ὑπὲρ γῆν τ⟨μῆμα τοῦ ἡμικυκλίου⟩ | ἀπὸ τοῦ ὑπὸ γῆν, καὶ ληφθείσης τῆς ν ξ περι|φερείας ⟨δοθ⟩εισῶν ὡρῶν ⟨ἤχθω⟩ ἀπὸ τοῦ ξ κά|θετος (ἐ)πὶ τὴν ⟨η⟩μ ἡ ξο, καὶ διὰ τοῦ ο (δι)ήχθω|σαν κάθετ⟨ο⟩ι πρὸς μὲν τὴν (αε) ἡ π ο ρ, πρὸς δὲ | τὴν γε ἡ σ ο τ. ἐπεὶ τοίνυν δέδοται ἡ . . τοῦ | μεσημβρινοῦ περιφέρεια, τὴν δὲ λείπουσ⟨αν⟩ | εἰς τὸ ἡμικύκλιον ὑποτείνει[1] (ἡ διπ)λῆ τῆς | ε θ εὐ⟨θε⟩ίας, δεδομένος ⟨ἔσται ὁ τῶν η θ κ καὶ ε θ λό⟩|⟨γος πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ μεσημβρινοῦ. ὁμοίως⟩ | ⟨ἐπεὶ δο⟩θεῖσα . . . . | . . . . τε . . . . | . . . . ὥστε | δοθήσεται καὶ ὁ τῆς ε θ λόγος πρὸς ἑκατέραν τῶν[2] | ε μ καὶ μ θ καὶ ἔτι ὁ τῆς η κ διαμέτρου πρὸς ἑκάσ|την αὐτῶν. ἀλλὰ ἡ τῆς μ θ εὐθείας διπλῆ ὑπο|τείνει[3] τὴν τῆς λ ν περιφερείας διπλῆν. ὥστε | καὶ ἥ τε λ ν περιφέρεια ⟨δοθήσεται καὶ ἡ λοιπὴ⟩ | ⟨εἰς τὸ τεταρτημόριον ἡ ν⟩ξ ⟨η. δέδο⟩(ται) δὲ καὶ ⟨ἡ | ν⟩ξ· δ⟨οθήσεται ἄρα ἥ τ⟩ε ⟨λ⟩ξ καὶ ἡ ξ⟨η. ὑποτείνει | δὲ τὴν⟩ μὲν διπλῆν τῆς (η)ξ[4] περιφερείας | ἡ διπλῆ τῆς (ξ ο) εὐθείας, τὴν δὲ διπλῆν τῆς ⟨ξ λ⟩ | περιφερείας ἡ διπλῆ τῆς ο θ εὐθείας. ὥστε δε|δομένος ἔσται καὶ ὁ τῶν ξ ο καὶ ο⟨θ⟩ λόγος πρὸς | τὴν η κ διάμετρον, διὰ τοῦτ⟨ο δὲ καὶ πρὸς τὴν τοῦ⟩ ||

portionem semicirculi super terram ab ea que sub terra, et accepta ipsa *nx* periferia datarum horarum ducatur ab *x* perpendicularis super *hm* que *xo*, et per *o* producantur perpendiculares super *ae* quidem que *por*, super *ge* autem que *soc*. quoniam igitur data est *zl*[1] meridiani periferia, residue autem in semicirculum subtenditur dupla ipsius *et* recte, data erit proportio ipsius *htk* et proportio ipsius *et* ad diametrum meridiani. similiter quoniam data est que *az* periferia eleuationis, datus erit et ipsius *met* trigoni rectanguli angulus qui sub *met*. qvare data erit proportio ipsius *et* ad utramque ipsarum *em* et *mt* et adhuc proportio ipsius *ek*[2] diametri ad unamquamque ipsarum. sed ipsius *mt* recte dupla subtenditur duple ipsius *ln* periferie. qvare et que *ln* periferia data erit et residua in quartam partem que *nxh*. data est autem et que *nx*. data ergo erit et que *lx* et que *xh*. subtenditur autem duple quidem ipsius *nx*[3] periferie dupla ipsius *xo* recte, duple autem ipsius *xa*[4] periferie dupla ipsius *ht*[5] recte. qvare data erit ipsarum *xo* et *ot* proportio ad diametrum *hk*, propter hoc autem et ad eam que

1) υποτινει. 2) τῶ. 3) υποτινει. 4) ν ε ξ?

1) Zu lesen *hzk* (Commandinus). 2) Lies *hk*, wie im Griechischen. 3) Lies *hx* (Command.). 4) Lies *xl* (*lx* Command.). 5) Lies *ot*, wie im Griechischen. Dass die Buchstaben hier verkehrt sind, ist durch ein ! am Rande (zu 2) 4) 5)) angedeutet.

meridiani. quoniam autem et ipsius tm data est proportio, data erit et proportio ipsius mo. et est, ut que em ad mo, ita que tm ad mp et que et ad op; equiangula enim sunt trigona emt et opm. data ergo erit et ipsarum mp et op proportio ad diametrum meridiani. propter hoc autem et proportio ipsius es et proportio ipsius emp totius, hoc est ipsius os. hiis igitur demonstratis sumatur centro o et distantia ox signum in meridiano scilicet g,[1]) et absumantur rursum ipsi ox equales que pq et que sf,[2]) et copulentur que ey et er et et et xm et adhuc que eo et $ef\psi$ et $eq\omega$. quoniam igitur in praecedentibus angulus qui sub eoy demonstratus est esse rectus, data est autem et que ey subtensa existens ex centro meridiani et que oy existens equalis ipsi ox, data erit et angulus qui sub eyo continens eum qui circuli ektimori. similiter autem quoniam et rectanguli xmo data est que xo et que om, data erit et que mx subtensa et angulus qui sub mxo faciens eum qui in plano equinoctialis. rursum quoniam ipsius epr rectanguli date sunt que ep et pr, data erit et que er subtensa et angulus qui sub per et que gr[3]) periferia. rursum quoniam ipsius esc rectanguli date sunt que es et que ec subtensa, data erit et angulus qui sub ces et que cg[4]) periferia descensiui. consequenter autem quoniam et ipsius eop rectanguli date sunt que op et que ep, data erit et que eo subtensa et angulus qui sub oep faciens meridiani periferiam. rursum quoniam ipsius sfe rectanguli date sunt que es et que sf, data erit et que ef subtensa et adhuc angulus qui sub sef et que $g\psi$ periferia eius qui secundum verticem. restat autem, quoniam et ipsius epq rectanguli date sunt que ep et que pq, data erit et que eq subtensa et[5]) adhuc angulus qui sub epq,[6]) hoc est qui sub qeg et[7]) que $g\omega$ periferia orizontis.

Qve quidem igitur per lineas acceptiones angulorum et subtensarum ipsis periferiarum sic utique nobis ad manum fient. in hiis autem que negociantur ex ipso[8]) maxime utique facile acquisibilis fiet expositionum unaqueque hoc modo. predemonstratur quidem igitur, quoniam eorum que inscribuntur in[9]) haec quidem in omni climate seruantur eadem, alia autem variantur; in hiis quidem igitur, que seruantur,

129 ἀρκεσθησόμεθα τῷ τε μεσημβρινῷ κύκλῳ | καὶ τῇ τοῦ ἰσημερινοῦ διαμέτρῳ καὶ ταῖς ἑ|τέραις μ(ό)ναις τῶν μηνιαίων παραλλήλων | σὺν τοῖς περιγραφομένοις αὐταῖς ἡμικυκλί|οις, τὴν

contenti erimus meridiano circulo et diametro equinoctialis et alteris solis mensilium parallelorum cum circumscriptis ipsorum semicirculis ipsam tamen tropicorum et eam que men-

1) Lies y. 2) Vor sf getilgt f (f). 3) Wohl zu lesen ar (Command.). 4) Am Rande: ǵs in greco, also gc. 5) Darauf getilgt ah. 6) Lies eqp (Command.). 7) Darauf getilgt: perifer. 8) Lücke, am Rande: αναληματ(τος). 9) Lücke, am Rande: αναλημμ...

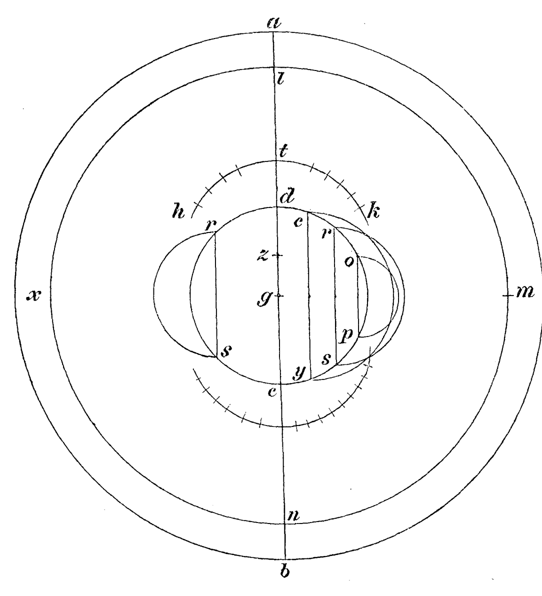
μέντοι τῶν τροπικῶν καὶ τὴν τοῦ | μετὰ τὸν ἰσημερινὸν μηνιαίου κατα-τάσσον|(τε)ς ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν πόλον, τὴν δὲ[1]) μετὰ τὸν | τροπικὸν ὡς πρὸς τὸν ἀντικείμενον πόλον, | ἵνα μὴ πλησίον (ο)ὖσ(α) τῆς τοῦ τροπικοῦ συν|χ(ύ)νῃ[2]) τὰς ἐπί[3]) τε αὐτῶν καὶ τῶν περιγραφο|μένων αὐτ(οῖ)ς ἡμικυκλίων σημειώσεις[4])· διὸ | καὶ τυμπανοειδεῖ χρησόμεθα τῷ δεξομένῳ[5]) | ⟨τὴν⟩ καταγραφὴν[6]) ἐπιπέδῳ πρὸς τὸ ἐπιστρε|φομένου τοῦ τυμπάνου ⟨τ⟩ὰ⟨ς⟩ (εἰ)ρημένας τῶν[7]) | ⟨μηνιαίων διαμέτρους⟩ μετὰ τῶν ἡμικυκλί|ων καὶ ⟨ταῖς⟩ (τῶν) κατὰ διάμετρον θέσ(ε)⟨σιν⟩ | ἐφαρμόζειν δύνασθαι. ἐπὶ δὲ τῶν καθ' ἕκαστον κλίμα προτεθὲν[8]) τασσομένων μόναις πάλιν[9]) | ἀρκεσθησόμεθα δυσὶ διαμέτροις τῇ τε κατὰ | τὴν (κοινὴν) τομὴν τοῦ μεσημβρινοῦ καὶ τοῦ | ⟨ὁρίζοντος καὶ τῇ⟩ κατὰ τὸν γνώμονα, χρησόμε(θ)α δὲ (καὶ) πλατ(ύ)μματι λεπτοτέρῳ πάνυ καὶ | ἀκριβῶς ὀρθογωνίῳ μὴ ἐλάττους ἔχοντι τὰς | περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου | (τ)οῦ μεσημβρινοῦ ἕνεκεν τοῦ τά τε (ἄ)λλα ση|μεῖα καὶ τὰς καθέτους δι' αὐτοῦ ῥαδίως λαμ|βάνειν τῆς μὲν ἑτέρας τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν | πλ(ε)υρῶν[10]) ἐφαρμοζομένης τῇ εὐθείᾳ[11]), πρὸς | ἣν ἡ κάθετος, τῆς δὲ
130 ἑτέρας προσαγομένη⟨ς⟩ || τῷ σημείῳ, δι' οὗ ⟨ἡ⟩ κάθετος. καὶ ὅλως δὲ ποιησό|μεθα τὰς λήψεις τῶν ἐπὶ τοῦ

silis post equinoctialem ordinantes ut ad eundem polum, eam autem que eius qui post tropicum[1]) ut ad oppositum polum, ne existens tropicum prope[2]) confundat eas[3]) que[3]) in[3]) ipsis[3]) notas semicirculorum ipsis circumscriptorum; propter quod et utemur tympanoydali plano suscepturo descriptionem ad hoc quod verso tympano dicte mensilium diametri cum semicirculis possint adaptari et positionibus eorum que ex opposito uel secundum diametrum. in hiis autem, que secundum unumquodque clima ordinantur, rursum contenti erimus solis duabus diametris, ea uidelicet que secundum communem sectionem meridiani et orizontis et ea que secundum gnomonem, utemur autem et quodam lato subtili ualde et examinate rectangulo non habente eas que circa rectum latus minores quam ea que ex centro meridiani gratia sumendi alia signa et perpendiculares per ipsum de facili[4]) altera quidem earum que circa rectum latus adaptata recte ad quam perpendicularis, altera autem adducta ad signum per quod perpendicularis. et totaliter autem faciemus acceptiones earum que in meridiano periferiarum per solum cancrum et per latum illud rectangulum nusquam conscribentes[5]) alteram rectam pre-

1) Lies δὲ τοῦ μετά. 2) συν-|χ(υ)ν(αι)η. 3) επει. 4) σημιωσις. 5) δεξαμενω? 6) καταγραφεν? 7) τῶ. 8) (προ)θεν. 9) παλῖ. 10) πλευραν. 11) της ευθειας.

1) tropic̄ọs. 2) Vor tropicum getilgt post, am Rande: cum tropicis. 3) Diese vier Worte am Rande. 4) Corrigirt aus facile. 5) Am Rande: πρ̊π⅄γραφοντ . . .

μεσημβρινοῦ περιφε|ρειῶν[1]) διὰ μόνου τοῦ τε καρκίνου καὶ τοῦ ὀρθο|γωνίου πλατύσματος μηδαμῆ προσπαραγρά-| φοντες ἑτέραν εὐθε(ῖα)ν τῶν προειρημένων, | ἀλλὰ γυμνὴν τηροῦντες τὴν καταγραφὴν | εἰς τὸ εὔληπτον τῶν ἐφεξῆς τῶν πρώτων | ὑ(πὸ) χ(εῖρ)α, καθ' ὃν εἰρήκαμεν τρόπον, (εἰς τὴν) |



ἐκ⟨θεσιν μετα⟩φ⟨ερομένων⟩. ἐκ(κ)είσθω γὰρ (αὐ)|τῆς π⟨αραδείξ⟩εως ἕνε(κεν) τὸ τυμπανοειδὲς | ἐπίπεδον περὶ διάμετρον (τὴν) (α)β καὶ κέντρον[2]) | τὸ γ, καὶ τῆς αγ τρίτου μέρους ἔγγιστα πρὸς τῷ | α ληφθέντος ὡς κατὰ τὸ δ κέντρῳ τῷ γ | καὶ δια-

dictarum, sed nudam seruantes descriptionem ad facilitatem acceptionis eorum que deinceps primis[1]) secundum modum, quem diximus in expositione, translatis. exponantur enim ipsius ostensionis gratia planum tympanoydale circa diametrum *ab* et centrum *g*, et ipsius *ag* tertia parte proxime versus *a* accepta ut penes *d* centro *g* distantia autem *gd* describatur[2]) qui *de*[3]) meridianus circulus ipsa *dge* diametro secundum eam que equinoctialis intellecta. deinde et ipsius *gd* tertia parte proxime versus *g* accepta ut penes *z* centro *z* distantia autem *gd* describatur circuli equalis meridiano quarta pars secta in duo equa ab *ag* que *htk* et diuidatur in 90 portiones equales diligenter. nichil autem prohibet et super alias partes diametri idem facere gratia conuersionis tympani. similiter autem et centro *g* distantia autem ea que a *g* ad sectionem in duo proxime ipsius *at* circulum describimus ut eum qui per quartas *l m n x*, quarum unam diuidentes similiter in 90 portiones

1) (περι)|φε|ριων. 2) κεντρō.

1) Lücke, am Rande: υποκειρα. 2) Darauf getilgt: circuli equalis meridiano quarta pars. 3) Lücke, am Rande: αναλημματ'... Auf Fig. 7 steht im inneren Kreis links: in greco hic erat iste semicirculus qui non ex alia parte (nml. der Halbkreis auf *rs*).

στήματι τῷ γδ γεγράφθω (ἐπὶ) τοῦ ἀνα|λήμματος μεσημβρινὸς κύκ(λος) ⟨ὁ δε τῆς δγε | διαμέτρου κατὰ τὴν τοῦ ἰσημερινοῦ νοου⟩|μένης. ἔπειτα καὶ ⟨τῆς γδ τοῦ⟩ τρίτον μέρους | ἔγγιστα πρὸς τῷ γ ληφθέντος ὡς κατὰ τ⟨ὸ⟩[1]) (ζ)[2]) | κέντρῳ κῷ ζ διαστήματι δὲ[3]) τῷ γδ γεγράφθω | τοῦ ἴσου[4]) τῷ μεσημβρινῷ κύκλου[5]) τεταρτη|μόριον[6]) διχοτομούμεν⟨ον⟩[7]) ὑπὸ ⟨τῆς αγ τὸ⟩ | ηθκ καὶ διῃρήσθω εἰς ἴσα⟨ς⟩ τὰ⟨ς⟩ ⟨ϙ μο⟩ί⟨ρας⟩[8]) ἀκρι|βῶς. οὐδὲν δὲ ⟨κωλύει καὶ κατὰ⟩ τὰ ἕτερα (μέ)|ρη τῆς διαμέτρου τὸ αὐτὸ ποιεῖν ἕνεκεν τῆς | τοῦ τυμπάνου ἐπιστροφῆς. ὁμοίως δὲ καὶ κέν|τρῳ[9]) τῷ γ διαστήματι δὲ τῷ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ | τὴν διχοτομίαν ἔγγιστα τῆς αθ κύκλου | γράψομεν ὡς τὸν διὰ τῶν ⟨λ μ⟩ ν ξ τεταρτη⟨μο⟩-| ρίων, ὧν τὸ ἓν διελόντες ὁμοίως εἰς
117 τὰ⟨ς⟩[10]) ‖ ⟨ϙ⟩ μοί(ρας καὶ) (ἐκ)βάλλοντες ἐν αὐτῷ[11]) τὰς καθ' ἕ|καστ(ο) ⟨ν κ⟩λίμα διαστάσει(ς) τῶν τοῦ ἐξάρματος | ⟨μοιρῶν κ⟩α⟨τα⟩γράψομεν τὰς ἴσας καὶ ἐπὶ τῶν | λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων ἀρχόμενοι μὲν |[12]) ἀπὸ τῶν λ μ ν ξ τομῶν, ἐκβάλλοντες δὲ ὡς ἐπ|ὶ τὰ δεξιὰ τῶν πρὸς ἀνατολὰς ἡμικυκλίων ὑπο|κειμένων αἰεὶ γεγράφθαι πρὸς ἡμᾶς. περιέ|χει[13]) δὲ τὸ ἔξαρμα τοῦ πόλου, ὅπου (μὲν ἡ με)γίστη | ἡμέρα καὶ νὺξ ὡρῶν ἐστιν ιγ, μοίρας ἔγγιστα ις γ̂ | ιβ, ὅπου δὲ ιγ ∟ ὡρῶν,

1) Nach τ Raum für drei Buchstaben. 2) Eher ξ. 3) Fehlt. 4) τω ισω. 5) κυκλω. 6) τεταρτημοριω. 7) Eher διχοτομουμενη⟨ν⟩. 8) Eher … ιαια. 9) κε̄|τρω. 10) Wie es scheint, Raum für mehr Buchstaben. 11) αυτον. 12) με. 13) Das dritte ε scheint corrigirt.

et excipientes in ipsa eas que secundum unumquodque clima distantias partium eleuationis asscribemus equales et in reliquis tribus quartis incipientes quidem a sectionibus *l m n x*, educentes autem ut ad dextram eorum qui ad orientem semicirculorum, qui[1]) supponuntur semper descripti esse ad nos. continet autem eleuatio poli, ubi quidem maxima dies et nox est horarum 13, partes proxime 16 tertiam et duodecimam, ubi autem est horarum 13 et s[2]), partes 23 dimidiam et tertiam, ubi autem horarum 14, partes 36, ubi uero est horarum 14 et dimidie, partes 43 et quartam, at ubi est horarum 15, partes[3]) , ubi autem est horarum 15 et dimidie, partes 45, ubi uero est horarum 16, partes 48 et dimidiam et decimam. copulabimus autem et diametros dictorum mensilium accipientes proprias ipsorum distantias ab equinoctiali in ipsa meridiani periferia uniuscuiusque diuisionis equalis ipsorum quarte. distat enim et que quidem tropici et secundum *op* ab equinoctiali partes proxime 23 dimidiam et tertiam, que autem continui tropico mensilis et secundum *rs* partes 20 et dimidiam, qve autem continui et secundum *cy* partes 13 et tertiam. circumscribimus

1) Hier getilgt: sub. 2) D. i. $^1/_2$. 3) Lücke offen gelassen.

$\overset{o}{\mu}$ $\overline{\varkappa\gamma}$ ∟ γ', ὅπου δὲ $\overline{\iota\delta}$ ὡρῶν, | $\overset{o}{\mu}$ λ[1]) ⟨κ⟩α⟨ι⟩ $\overset{\Lambda}{\gamma}$, ὅπου δὲ $\overline{\iota\delta}$ ∟ ὡρῶν, $\overset{o}{\mu}$ λ⟨ς⟩, ὅπου δὲ $\overline{\iota\varepsilon}$ ὡ|ρῶν, $\overset{o}{\mu}$ μ $\overset{\Lambda}{\gamma}$ δ′ ι′, ὅπου δὲ $\overline{\iota\varepsilon}$ ∟[2]) ὡρῶν, $\overset{o}{\mu}$ με, ὅπου δὲ | $\overline{\iota\varsigma}$ ὡρῶν, $\overset{o}{\mu}$ μη ∟[3]). ἐπιζεύξωμεν δ(ὲ) καὶ τὰς τῶν[4]) | εἰρημένων μηνιαίων διαμέτρους λαβόντες | αὐτῶν τὰς οἰκείας διαστάσεις ἀπὸ τῆς ἰσημε|ρινῆς ἐπὶ τῆς τοῦ μεσημβρινοῦ περιφερείας | ἑκάστης ἴσου ⟨αὐτῶν⟩[5]) τεταρτημορίου διαιρέσε|ως. ἀπέχει γὰρ καὶ (ἡ) μὲν τοῦ τροπικοῦ κύκλου | κατὰ τὴν οπ τῆς ἰσημερινῆς $\overset{o}{\mu}$ ἔγγιστα $\overline{\varkappa\gamma}$ ⟨∟ γ′⟩, | ἡ δὲ τοῦ συνεχοῦς τῷ τροπικῷ ⟨μηνιαίου κατὰ⟩ | τὴν ρσ $\overset{o}{\mu}$ $\overline{\varkappa}$ ∟, ἡ δὲ τοῦ συνεχοῦς . . . . | κατὰ τὴν συ $\overset{o}{\mu}$ ι(γ) Γο[6]). (π)εριγράφ⟨ομεν οὖν⟩ καὶ τὸ | ἐφ᾽ ἑκάστ(ης) αὐτῶν ἡμικύκλιον, καὶ ταῦτα | μὲν μετὰ τῶν οἰκείων διαμέτρων ἐάσο|μεν[7]) καθ᾽ αὑτά, τοῦ δὲ μεσημβρινοῦ τῶν[8]) περὶ τὴν | τοῦ ἰσημερινοῦ διάμετρον ⟨ἡμικυκλίων ἑκά-|τερον διελόντες εἰς ἴσας ὡριαίους διαστά|σεις $\overline{\iota\beta}$ σημειώσομεν κ⟩ατατομάς. ⟨ὁ⟩μ⟨οί⟩(ω)ς (δ)ὲ ⟨καὶ⟩ | ⟨τὰς ἐπὶ τῆς δγε γ⟩ινομένας ὑπ⟨ὸ τῶν ἐπ᾽ αὐτὴν⟩ ‖ 118 καθέτων ἀφ᾽ ἑκάστης τῶν ὡριαί⟨ων κατατομ⟩|ῶν, ἐπειδήπερ ταῦτα ⟨τηρεῖται⟩ κατὰ ⟨πάσας⟩ | τὰς ἐγκλίσεις. χαλκ⟨οῦ τοίνυν ὄντος ἢ ψη⟩-| φ⟨ί⟩(ν)ου τοῦ τυμπάνου οὐ⟨δεμιῶν ἔτι δεήσει⟩ | ἀ⟨πο⟩χαρά⟨ξ⟩εω⟨ν τού-⟩των μὲν ⟨ὑπαρχόντων⟩ . . . . . | . . . . τῶν κατ⟨ὰ κλίμα⟩ . . . .

itaque et semicirculum qui in unaquaque harum et hos quidem cum propriis diametris sinemus secundum se, meridiani autem eorum qui circa equinoctialem[1]) diametrum semicirculorum utrumque diuidentes in equales horarias distantias 12 signabimus sectiones. similiter autem et eas, que super *dge* fiunt a perpendicularibus ad ipsam ab unaquaque diuisionum horariarum[2]), quoniam quidem hec seruantur secundum omnes declinationes. tympano quidem igitur existente ereo uel[3]) nulla iam opus erit deletione caracterum[4]) hiis quidem existentibus in superlinitionibus eorum, que secundum clima ordinantur, ut duabus diametris et horariis diuisionibus. ligneo autem existente superliniendum[5])
nigro quidem colore alias omnes, rubeo autem meridianum et diametrum equinoctialis cum signis, et super totum tympanum cera consimiliter speris, ut non simul cum variandis superliniantur, que debent remanere.

---

1) Corrigirt. 2) $\overline{\varsigma}$? 3) Vielleicht μη∟⟨ι′⟩. 4) τῶ 5) Die ersten beiden Buchstaben vielleicht λα, jedoch sehr unsicher. 6) D. i. $^2/_3$. 7) εασωμεν. 8) Scheint gefehlt zu haben.

1) Darauf getilgt: circulum. 2) horariuriarum. 3) Lücke, am Rande: ψηφιν. 4) Hierzu am Rande: αποχαραξε. 5) Lücke, am Rande: τ αποχαραξεις.

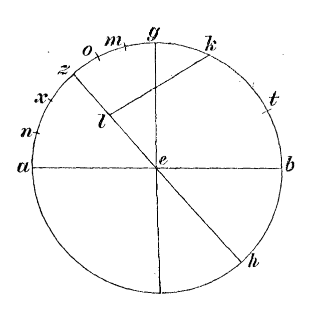
. . . .[1]) ⟨τὰς ἀποχαρά⟩|ξε(ις) μέ-
λανι ⟨μὲν⟩ . . . . ⟨ἐρυ⟩|θρῷ δὲ
τὴν[2]) τοῦ μεσημβ⟨ρινοῦ καὶ τοῦ ἰση-
μερι⟩ | ⟨ν⟩οῦ διάμετρ⟨ον⟩ . . . .
. . . . | ⟨ὅλον⟩τὸ τύμπανον κηρῷ
. . . . |[3])

Hiis autem suppositis facile in promptu nobis erit acceptionum unaqueque, si prius quidem ordine assequentes radici supposite eleuationis diametros copulauerimus orizontisque et gnomonis, deinde tropici semicirculi sectionem distinguentem quod supra terram ab eo quod sub terra et utrarumque harum portionum in sex equalia diuisiones acceperimus et in propria ipsius diametro factas a diuisionibus super ipsam perpendiculares. hiis enim solis contenti procedemus secundum modum ostendendum. primas quidem igitur rursum eas que ektimori circuli secundum quamlibet horam periferias, has quidem ex portione super terram consistentes proprii signi ea que mensilis positione, has autem ex ea que sub terra eius quod ex opposito sibi. deinde eas que horarii omnium horarum, postea eas que descensiui et rursum conuenienter eas que meridiani seorsum. deinde eas que eius qui secundum verticem, post quas eas que orizontis, et ultimas, si uoluerimus, eas que in plano equinoctiali. post hoc autem acceptas quidem designationes liniemus.[1]) similia autem faciemus in reliquis duobus mensilibus utroque in parte et similiter in equinoctiali. deinde et priores diametros simul ablinientes copulabimus eas que consequentis climatis et eodem ordine utentes pertransibimus omnes suppositas differentias. ceterum autem gratia modi acceptionis periferiarum subtensarum angulis exponatur meridianus qui in[2]) et sit *abgd* circa centrum *e*, et copulentur per regulam examinate rectam que quidem *ab* diameter secundum communem sectionem ipsius et orizontis, qve autem *gd* secundum gnomonem. subiaceatque prius que *zeh* diameter equinoctialis, et sit que quidem in duo equa sectio semicirculi *zth* penes *t*, qve autem super terram quarta *zt*, horariarum autem que in ipso sectionum una quidem que penes *k*, et[3]) quod a perpendiculari per ipsum[4]) ad *ze* fit in ipsa signum, sit *l*;

1) Hier scheint ein Stück im Griechischen gefehlt zu haben. 2) *τον*. 3) Der Rest der Seite unlesbar; hier stand Fig. 7, deren Buchstaben aber nicht zu erkennen sind.

1) abliniemus, am Rande: *απαλει!ψομ*. 2) Lücke, am Rande: *αναλημματ*. 3) Getilgt: signum. 4) Ueber ipsum: scilicet *k*.

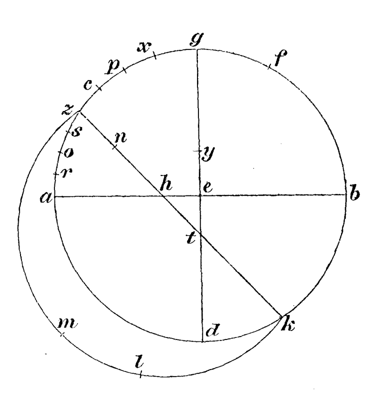
hec enim[1]) a principio accepta. eam quidem igitur que ektimori periferiam ex se ostendit que tk, super quam statuentes cancrum et postponentes super diuisam quartam exponemus gradus contentos a distantia. continet autem semper tot, quot multitudo subpositarum ab ortu horarum, tempora equinoctialia, eadem existens ei que in plano equinoctialis. eam autem que horarii accipiemus adducentes lati illius rectanguli alterum laterum ad signum l, ita ut reliquum adaptetur diametro orizontis ab, et secetur[2]) meridianus ab eo quod[3]) apud l latere penes m; qve enim am periferia faciet dictam. similiter autem, si unum laterum adduxerimus ad l, ita ut alterum adaptetur diametro gnomonis gd, et secetur meridianus ab eo quod apud l latere penes n, que gn periferia faciet eam que descensiui. rursum autem que quidem az ex se facit eam que meridiani. si autem statuerimus cancrum super signa k et l et unum lati illius laterum apposuerimus ad l altero adaptato ipsi ge, deinde alterum quidem terminum cancri apposuerimus ei que secus[4]) rectum angulum portioni ipsius ge, alterum autem apposuerimus lateri quod apud l, et manente ipso conuerterimus idem latus counitum similiter ipsi apud centrum e, ita ut secetur meridianus ab ipso[5]) ut penes x, que gx periferia faciet eam que eius qui secundum verticem. similiter autem, si unum laterum apposuerimus ad l altero adaptato ipsi ae et cancri[6]) eandem ipsi kl distensionem habentis[7]) alterum quidem terminum apposuerimus ei que secus rectum angulum portioni ipsius ae, alterum autem applicuerimus ei quod apud l lateri, deinde hoc manente conuerterimus rursum idem latus seruata coniunctione super centrum e, ita ut secet meridianum ut penes o, que go periferia faciet eam que orizontis. et in hiis quidem periferiis et in omnibus semper[8]) intelligendum, ut non idem repetamus, quod distensiones ipsarum[9]) simul cum acceptione per cancrum transferentes super diuisam quartam deprehense[10]) ab ipsis gradus debemus exponere.



Rursum supponatur alicuius aliorum mensilium parallelorum diameter et sit que $zhtk$, super quam orientalis semicirculus qui zlk, et centro quidem t distantia autem ta accipiatur signum in semicirculo zlk quod l,

1) Lücke, am Rande: εχ'εν! (d. i. ἔχομεν). 2) Darauf getilgt: qui a. 3) Corrigirt aus qui. 4) sec℈, davor getilgt: a. 5) Am Rande hierzu: latere scilicet. 6) Aus cancer, am Rande: cancri. 7) Aus habentes, am Rande: tis. 8) sīpʳ. 9) Getilgt: cum. 10) Fehler für deprehensos.

in quo distinguitur quod quidem *zl* super terram semicirculi et quod *lk* sub terra. accipitur autem signum *l* per platinam[1]) rectangulam, si angulus adductus fuerit ad *h*, ita ut alterum laterum adaptetur ipsi *zk*.[2]) secundum quod enim reliquum[3]) secat semicirculum, erit determinatum signum, quoniam quidem que ab *h*[4]) ipsi *hk*[5]) perpendicularis producta fit sectio planorum orizontis et circuli mensilis. diuidatur itaque portionum utraque in 6 equalia, et signatis ipsis accipiantur per appositionem[6]) platine rectangule et signa super *zk* facta a perpendicularibus ad ipsam ab acceptis diuisionibus in semicirculo. sit autem una earum que super terram que penes *m* et quod eiusdem ordinis cum ipso signum eorum que super *zh* quod *n*. centro quidem itaque ipso *n* et distantia *nm* accepto secundum meridianum signo *x* et latere[7]) adducto ad signa *e* et *h*, ita ut secet meridianum penes *o*, que quidem *zo* periferia faciet residuam in quarta periferie ektimori, que autem ab *x* super sectionem alterius[8]) ipsius[9]) et meridiani ipsam que ektimori. consequenter autem centro *h* et distantia *hm* accepto secundum meridianum signo *p* que *ap* periferia faciet eam que horarii. similiter autem centro *t* et distantia *tm* accepto secundum meridianum signo *r* que *gr* periferia faciet eam que descensiui. rursum que quidem *ao* periferia faciet eam que meridiani. si autem unum laterum[10])



apposuerimus ipsi *n* reliquo adaptato ipsi *ge*, et cancri[11]) distensionem habentis[12]) equalem ipsi *nm* alterum quidem terminum apposuerimus[13]) ei que penes angulum rectum portioni ipsius *ge*, alterum autem apposuerimus ei quod apud *n* lateri, deinde hoc manente conuerterimus latus quod ad ipsum seruata ipsorum coniunctione ad centrum *e*, ita ut secet meridianum penes *s*, que *gs* periferia faciet[14]) eam que eius qui secundum verticem. similiter autem rursum, si unum laterum apposuerimus ipsi *n* altero adaptato ipsi *ae* et cancri distensionem habentis eandem ipsi *nm* alterum quidem apposuerimus ei que secus rectum angulum portioni ipsius *ae*, alterum

1) Am Rande: πλατυσμα$\overset{o}{\tau}$. 2) Bei dieser Zeile am Rande: ńo. Ca. 3) Hierzu am Rande: 'scilicet latus. 4) Hierzu am Rande: ‹uel *n*. 5) Bei dieser Zeile am Rande: /. 6) Darauf: p. 7) Lücke, am Rande: πλατυσμα$\overset{o}{\tau}$. 8) Uebergeschrieben: scilicet lateris. 9) Lücke, am Rande: πλατυσμα$\overset{o}{\tau}$. 10) Lücke, am Rande: πλατυσ. 11) -i corrigirt aus o. 12) -is corrigirt aus e. 13) Darauf getilgt: portioni; ei ist übergeschrieben. 14) -t corrigirt.

autem applicuerimus ei quod apud *n* lateri, deinde hoc manente conuerterimus id quod apud *n* rursum seruata ipsorum coniunctione ad centrum *e*, ita ut secet meridianum penes *c*, que *cg* periferia faciet eam que orizontis. ceterum autem, si ipsam *mn* ponentes equalem ipsi *ey* apposuerimus ipsi *y* rectum angulum uno[1] laterum adaptato ipsi *ey* et cancri distensionem habentis eandem ipsi *nm* alterum quidem terminum apposuerimus penes *y*, alterum autem applicuerimus recto angulo ad latus *eg* et manente hoc rursum conuerterimus latus quod apud id ipsum seruata ipsorum coniunctione ad centrum *e*, ita ut secet meridianum secundum *f*, que *gf* periferia faciet eam que in plano equinoctialis.

Nunc autem, si diameter *zk* ad sinistras nostri partes positionem habens sit unius parallelorum mensilium australiorum equinoctiali, transuerso tympano ad positionem ex opposito et que *zk* et qui super ipsam semicirculus secus dextras nostri partes erunt in situ eodem cum mensili parallelo descripto per opposita signa, borealiora autem equinoctiali, et que quidem *kl* portio erit super terram, qve autem *zl* sub terra. qvare[2] nos facientes eadem ostensis in diuisionibus portionis *kl* inueniamus et eas que in oppositis signis consistentes periferias. nam secundum quidem eam que in hyemali diametrum accepta ipsa *zk* quod quidem *zg* faciet eas que a principio capricorni fiunt super terram angulorum periferias, quod autem *dk*[3] eas que a principio cancri. secundum eam autem que mensilis consequentis hyemali tropico diametrum supposita ipsa *zk* semicirculus quidem *zl* faciet eas que a principio sagittarii et aquarii consistentes super terram periferias, qvi autem *lk* eas que in principio geminorum et leonis. secundum eam autem que mensilis contigui equinoctiali diametrum accepta ipsa *zk* qui quidem *zl* semicirculus faciet eas que in principio scorpionis et piscium factas super terram periferias, qvi autem *lk* eas que in principio tauri et virginis. eas enim que in principio arietis et libre existentes easdem in una quacunque quartarum equinoctialis demonstratas esse accidit.

Et angulos uero ab antiquis determinatos, quoscunque non eodem modo nobiscum exposuerunt, ab hiis in promptu licebit transumere. eum quidem enim qui circuli ektimori secundum nos, ut diximus, non assumpserunt, aliorum autem qui quidem horarius et qui in plano circuli qui secundum verticem et qui in plano equinoctialis iidem sunt hiis qui apud nos, qvi autem ab ipsis uocatur ektimorus, est isdem cum apud nos meridiano, reliquorum autem descensiuum quidem facit residuus[4] ad unum rectum eius qui apud nos descensiui, eum autem qui antiskius, id est

---

1) Corrigirt aus uni. 2) Am Rande: vel ut. 3) Am Rande: ḷ'kc̣ in greco. Lies *lk*. 4) Am Rande: deficiens.

contraumbralis, rursum residuus[1]) ad unum rectum eius qui apud nos orizontis. quod autem distracto[2]) quidem plano equinoctialis accipitur, et per tale palam fit. ostendit quidem enim et hoc eam que circuli horarii positionem. hanc autem continet proprie que eius qui secundum verticem per polos horarii descriptorum[3]) et uno existente eorum qui a principio necessarie suppositorum trium circulorum seruantium ubique ad inuicem positionem ad rectos angulos, propter quod et ektimori quidem periferia, pro qua eam que equinoctialis assumpserunt, non solum cum ea que horarii ostendit positionem radii, set et cum ea que meridiani, qve autem equinoctialis cum sola ea que horarii et non adhuc neque cum ea que meridiani neque cum aliqua alia reliquarum. hoc autem quia neque secundum proprietatem ferentium radium comprehendit semper utique[4]) aut solum equinoctiis neque secundum proprietatem manentium eandem ubique seruat positionem ad reliquos non delatorum. exposuimus autem et non consistentes quantitates secundum illum, quem ostendimus, modum consequentium rationabilitati periferiarum.[5]) in subiectis autem[6]) septem parallelis et secundum unumquodque principium signorum et horarum in canonibus continentibus pertractatum a nobis ordinem in omnibus adiectionibus[7]) ad promptitudinem earum que in declinationibus acceptionum. adhuc autem quoniam periferias quidem in meridiano circulo determinatas prompte faciunt manifestas orientaliores ipso et occidentaliores positiones horarum[8]) eas autem que in circulo qui secundum verticem borealiores ipso et australiores casus radiorum, in quibus[9]) consequentiam diximus oportere coexquirere, asscripsimus singulis horarum signa, per que eam que ad borealia circuli[10]) qui secundum verticem et rursum ad australia radii positionem licebit considerare aliqualiter a conuenientibus hiis que predeterminata sunt principium facientes[11])
adiacentium quantitatum expressiones.[12]) promptum autem adhuc et coniugationes, a quibus positio radii determinatur[13]), sex numero esse accidit, tres quidem ab hiis que ad inuicem[14]) delatorum trium circulorum ektimorique ad horarium et ektimori ad descensiuum, tres autem eas que ab unoquoque delatorum cum eo, qui inclinationem ipsius continet, manentium, ektimori quidem ad meridianum, horarii autem ad eum qui secundum verticem, descensiui autem ad orizontem. habent autem et canones ita.

---

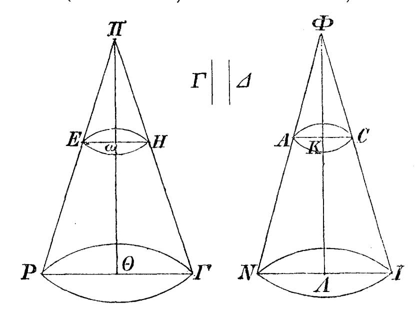
1) Am Rande: uel deficiens. 2) Folgt: p. 3) Am Rande: / 'ti. 4) Am Rande: /. Der Uebersetzer hat gelesen ἂν ἤ für ἀλλ' ἤ. 5) Am Rande: /. 6) ạūṭ, also getilgt. 7) Am Rande: επιβολα(ις). 8) Am Rande: των ρων. 9) Darauf q∂'. 10) Hier am Rande: /. 11) Lücke, am Rande: faciamus. 12) Am Rande: εκβολ˘. 13) Sehr unsicher; vielleicht eher: datur. 14) Folgt: feren, getilgt.

Cancri principium horarum 13.

	Hore		ektimori	horarie	descensiue	meridiane	secundum verticem	orizontis
	orizontis		24 15	65 5	90 0	0 0	90 0	24 15
bo	1	11	25 15	69 15	75[1]) 10	35 15	74 50	20 [2])
bo	2	10	31 20	73 0	60 55	59 5	60 0	18 50
bo	3	9	46 50	76 [3])	46 6	72 10	45 5	17 15
bo	4	8	60 10	79 10	31 [4])	78 30	30 10	18 [5])
bo	5	7	75 0	81 20	17 30	81 30	15 10	27 0
bo	meridies		90 0	82 35	7 25	82 35	0 0	90 0

1) ηч; 7 ist sonst ∧ geschrieben. 2) ′ und am Rande: Γ́o. 3) Ebenso. 4) Ebenso. 5) Ebenso. Am unteren Rande steht noch F̶ und fm̄ puto (d. i. wohl: finem puto oder finitum puto). Γo ist ²/₃.

Fig. 10.
(S. oben S. 5, zu S. 123 der Hds.)



EIN BEITRAG

ZUR

GESCHICHTE DER ALGEBRA IN DEUTSCHLAND

IM FÜNFZEHNTEN JAHRHUNDERT.

VON

MAXIMILIAN CURTZE.

Die von GERHARDT in den Monatsberichten der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*) behandelte Handschrift der königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München No. 14908 dürfte für die Geschichte der deutschen Algebra bei weitem wichtiger sein, als es aus der Abhandlung GERHARDTS hervorzugehen scheint. Einestheils ist die Beschreibung, welche er von ihr giebt, nichts weniger als ausreichend, und darin liegt jedenfalls anderntheils der Grund, weshalb sehr wichtige und das Können des Verfassers in helles Licht stellende Stücke des Manuscriptes von ihm übersehen und deshalb auch noch nicht einmal erwähnt sind.

Die Handschrift enthält nämlich aufser dem Bruchstück einer Algebra in deutscher Sprache, welches GERHARDT hat abdrucken lassen, zunächst (freilich räumlich davon getrennt, aber auf dasselbe Bezug nehmend) eine ganze Reihe zu demselben gehörige Beispiele in lateinischer Sprache, dann aber, nur vier Seiten hinter demselben, eine vollständige Abhandlung über den nämlichen Gegenstand auch in deutscher Sprache, welche durch ihre ganze Fassung zeigt, dafs sie nach einer italienischen Vorlage gearbeitet sein mufs, während das von GERHARDT herausgegebene Bruchstück aus dem Lateinischen geflossen zu sein scheint.

Der Titel dieser Abhandlung: *„Regule delacose secundum 6 capitula“* und die in ihr benutzten Namen für die Zahl, die Unbekannte und deren Potenzen ergeben den Ursprung unzweifelhaft. *Numerus, cosa, censo, censo di censo, cubo di cubo* sind Worte, welche nur aus dem Italienischen stammen können. Der unbekannte Verfasser — auch der Schreiber ist ein anderer als der der Algebra GERHARDTS — übersetzt *numerus* durch *zal, cosa* durch *ding* und benutzt für letzteres die auch sonst in späterer Zeit bekannte Abkürzung *∂*. *Censo* behält er bei. Noch eine Abkürzung ist vorhanden für multiplicieren: *aſ*. Sie ist aus der gewöhnlichern: *Maſ* zusammengezogen und wird auch in den lateinischen Theilen der Handschrift, und zwar überall für jede Form des Wortes benutzt. Im Abdrucke ist dieselbe aufgelöst worden.

Weil wir im Deutschen *das Ding* sagen, heifst es bei unserem Verfasser meistens auch *das cosa*; $+$ heifst ihm *mer*, — *mynder*, an einigen Stellen auch mit *minus* untermischt. Zwei Zahlen multiplicieren heifst: *aſ 6 wider 8*, dividieren heifst stets *tailen*, der Divisor steht dabei immer an letzter Stelle, z. B.: *tail* 6 *in* $\frac{25}{144}$, wo das Resultat $\frac{6 \cdot 144}{25}$ wird.

*) Jahrgang 1870, S. 141 u. ff.

Von der nämlichen Hand geschrieben befinden sich noch zwei Abhandlungen über den doppelten falschen Ansatz in der Handschrift. Da die *Regula falsi* jedenfalls der Algebra angehört, und die Beispiele, welche behandelt werden, geschichtliches Interesse besitzen, so lasse ich dieselben im Folgenden ebenfalls abdrucken.

Alle übrigen Stücke, welche durchweg datiert sind, sind sämmtlich von ein und demselben Schreiber, von welchem überhaupt eine ganze Reihe Münchener Manuscripte herrühren. Derselbe nennt sich auf Blatt 220′ *Frater Fridericus ordinis S. Benedicti professus Monasterii St. Emmerami Ratisponensis.* Seine Thätigkeit an der fraglichen Handschrift erstreckte sich von 1455 bis 1464

Der nachfolgende Abdruck enthält der Reihe nach Folgendes:

1. *De dubio proposito per posicionem duarum falsitatum veritatem indagare* (Bltt. 40′—47),
2. *Regula falsarum posicionum declaranda per 12 regulas sive questiones* (Bltt. 47′—54),
3. Die GERHARDT'sche Algebra (Bltt. 133′—134′),
4. *Regula delacose secundum 6 capitula* (Bltt. 136—146′),
5. Beispiele zu der GERHARDT'schen Algebra in lateinischer Sprache (Bltt. 146′—153),
6. *De regulis per algebram etc*[a] *ut supra dictum est* (Bltt. 153—154′).
7. Beispiele zu den *Regule delacose* (Bltt. 154′—157),
8. Zwei Beispiele zur 5. und 6. Regel der GERHARDT'schen Algebra (Bltt. 134′),
9. Desgleichen zu den *Regule delacose* (Bltt. 504),
10. Weitere Beispiele mit No. 6 zusammenhängend (Bltt. 90—90′).

Nöthige Erläuterungen in textlicher Hinsicht sowohl, als in geschichtlicher gebe ich als Fufsnoten des Textes.

Gelegentlich hier nur noch eine Notiz, welche auf die Quellen der Geometrie BRADWARDINS Bezug hat, zugleich aber auch die dem FRATER FRIDERICUS zugänglichen Schriften klarstellen dürfte:

„*Hoc opus geometricum continet fere omnes demonstrationes geometricas,*
„*quas adducit philosophus gracia exempli vel in loyca, vel physica, et est*
„*collectum ex libris Euclidis, Campani, Archymedy (!), Theodosy, Jordani*
„*et ex libro, qui intulatur ysoperimetrorum. 1456 Fr.*“

Die letzte Schrift ist natürlich diejenige, welche CANTOR*) als wahrscheinliche Quelle bezeichnete.

Thorn, 29. Oktober 1894. **M. Curtze.**

---

*) Vorlesungen über Geschichte der Mathematik II, S. 105.

I.

40′ | DE DUBIO PROPOSITO PER POSICIONEM DUARUM FALSITATUM VERITATEM INDAGARE.

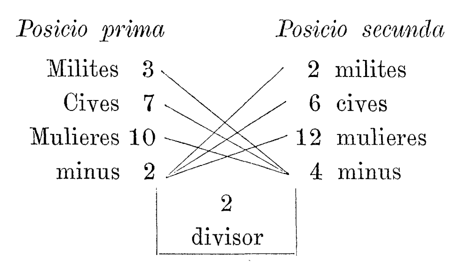
Regula falsi dicitur ista, que consistit in posicione duorum numerorum falsorum ad inveniendum veritatem hoc modo. *Ponam casus, quod sint 20 persone in una cecha, inter quos sunt milites, cives et mulieres, et omnes habent solvere 20 ₰ hoc modo: miles dabit 2 ₰, civis 1 ₰, et mulier $\frac{1}{2}$ ₰.* Si hoc vis scire et suum simile, pone duas falsas posiciones, et si in qualibet aliquid superfluit, tunc subtrahe numerum superfluum a maiore, et quod remanet erit divisor. Si vero in qualibet posicione aliquid defecerit, fac similiter subtrahendo minorem defectum a maiore, et quod remanet erit divisor. Si autem in una posicione aliquid superfluerit et in altera posicione defecerit, tunc defectus unius posicionis debet addi ad superfluum alterius posicionis, et productum erit divisor. Et conformiter | 41 agendum est in multiplicacione posicionis cuiuslibet per alterius defectum vel abundanciam, ita videlicet, quod sicut divisor invenitur per addicionem, ita debet addi, quod venit ex multiplicacione unius per defectum alterius et per abundanciam seu superfluum alterius, quod idem est. Sed quando divisor invenitur per subtractionem, tunc debet eciam subtrahi, quod venit ex multiplicacione unius per alterius defectum vel superfluum. Item cavendum est in predicta regula, ne superfluum vel defectus sunt numeri equales ita, quod unus delet alium facta subtractione unius ab alio. Item cavendum est, ne post subtractionem unius ab alio remaneat unitas pro divisore,

---

5—7. Aus dieser Stelle geht wohl unzweideutig hervor, dass die Ableitung des Ausdrucks *Regula coeci* von *Zeche* die richtige ist. Die hier vorliegende Aufgabe ist genau in derselben Form schon recht alt. In einer Handschrift aus dem 13. Jahrhundert wird dafür die gereimte Auflösung gegeben: *„In medio tetras, externis octo locentur“ (Clm. 14684, Blt. 30[a])*, welche mit der Auflösung unserer Abhandlung übereinstimmt. Es ist von gewisser Wichtigkeit, dass man auch Aufgaben der unbestimmten, sogenannten Diophantischen Algebra durch die *Regula falsi* zu lösen wusste. LEONARDO PISANO hatte sie als Mischungsrechnungen behandelt (siehe CANTOR, Vorlesungen II, S. 18). 22 bis S. 36 Z. 2. Diese Beschränkung ist in der zweiten Abhandlung über denselben Gegenstand nicht gemacht. Sie ist offenbar auch überflüssig.

vel eciam pro defectu vel superfluo, quia unitas multiplicando vel dividendo numerum minime variat. Et in proposito sit hoc exemplum prime regule.

Ponatur una falsa posicio, videlicet quod sunt tres milites | 7 cives 41′ et 10 mulieres, qui sunt persone 20, sed numerus denariorum, quem dant 5 simul, est 18, et sic deficiunt 2 a 20. Proponatur secundo, quod sunt 2 milites, 6 cives et 12 mulieres, que sunt 20 persone, sed numerus denariorum, quem dant, sunt 16, et sic deficiunt 4 ₰. Modo subtrahe 2, que defecerunt primo, a 4, que nunc deficiunt, et remanent 2, qui est divisor communis. Postea sic operabis: Multiplica primo 3 per 4 in 10 modum crucis, facit 12; multiplica iterum per modum crucis 2 per 2, et erunt 4, que subtrahe a 12, manentibus 8, que divide per divisorem communem, scilicet 2, exibunt 4 milites. Simili modo multiplica 7 per 4, fit 28; deinde 6 per 2 multiplica, facit 12, que subtrahe ab 28, remanent 16, que divide per divisorem, exibunt 8 cives. Ulterius multiplica 10 15 per 4, fit 40, similiter multiplica 12 per 2, exibunt | 24, que subtrahe a 40, 42 remanent 16, que divide per 2, et habebis 8 mulieres. Et habebis 4 milites, qui dant 8 ₰, et 8 cives, qui dant 8 ₰, et 8 mulieres, qui dant 4 ₰, et habebis 20 persone, que dant 20 ₰.



Eciam sunt 3 milites, 11 cives, 6 mulieres.[26] | 42′

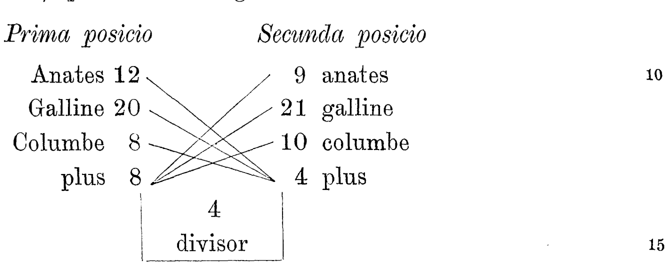
Exemplum secunde partis regule. Quidam emit pro 40 gl 40 volucres de triplice genere, anates, quarum una est vendita pro 2 gl, gallinas, quarum una est vendita pro 1 gl, columbas, quarum una vendita pro $\frac{1}{2}$ gl. 30 *Queritur, quot anates etc^a.*

Fac duas posiciones. Primo pone 12 anates, 20 gallinas, 8 columbas, que sunt 40 aves, et valent 48 gl. Sic sunt in superfluo 8 gl. Iterum pone secundo aliam certam eciam falsam posicionem, scilicet 9 anates, 12 gallinas, 10 columbas, que sunt 40 aves, sed valent 44 gl, et sic excedit 35 in 4 gl. Subtrahe ergo 4 ab 8, manent 4, qui est divisor communis.

---

26. Der Verfasser oder der Schreiber weiss also, dass es für die Aufgabe mehr als eine Lösung giebt. Die allgemeine Lösung heisst: n Soldaten, $20-3n$ Bürger, $2n$ Frauen; die speciellen Lösungen ergeben sich für $n = 3; 4$.

Postea multiplica 12 per 4 per modum crucis, facit 48; deinde iterum per modum crucis 9 per 8, facit 72, a quibus subtrahe 48, et remanent 24, que divide per 4, et habebis 6 anates. Postea multiplica 4 per 20, facit 80;
43 similiter 21 per 8 | facit 168, a quibus subtrahe 80, et remanent 88, que divide per 4, exibunt 22 galline. Similiter multiplica 8 per 4, facit 32, 5
et multiplica 8 per 10, exibunt 80, a quibus subtrahe 32, et remanent 48, que divide per 4, exibunt 12 columbae, et sic habes 6 anates, 22 gallinas, 12 columbas: 40 aves, que valent 40 gl.



10

15

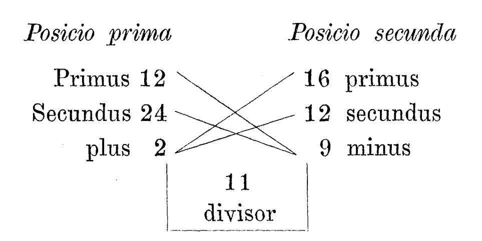
43′ Eciam sunt 12 anates, 4 galline, 24 columbe. |

Exemplum tercie partis regule. Sunt duo socii volentes emere duos equos: Primus 1 equum pro 20 fl, secundus pro 25 fl. Et dicit primus secundo: da mihi $\frac{1}{3}$ tue pecunie, tunc ego solvam equum precise pro 20 fl. Sed secundus dicit primo: da mihi $\frac{1}{4}$ tue pecunie, et ego solvam 25 fl precise. 20
Volo nunc scire, quot habuit quilibet.

Pono primo unam posicionem falsam, videlicet, quod primus habeat 12 fl, secundus 24. Modo dicit primus secundo: da mihi $\frac{1}{3}$ de tua pecunia, videlicet 24, et est 8, ad meas et facit 20 fl; sed secundus dicit primo: da mihi $\frac{1}{4}$ de tua pecunia, scilicet de 12, et constat, quod sunt 3. Adde 25
3 ad 24 fient 27, que 27 excedunt 25 in 2. Secundo pone, quod primus habeat 16 et secundus 12, tunc deficiunt 9 fl. Modo regula dicit, quando in una posicione est superabundancia et in altera defectus, debent simul
44 addi, et aggrega|tum ex eis est divisor communis. Adde ergo 2 ad 9, fient 11. Postea multiplica in modum crucis 9 per 12, fient 108; simi- 30
liter 2 per 16, fient 32, que adde ad 108 fient 140, que si diviseris per 11 exibunt $12\frac{8}{11}$ fl, que est summa primi, quem habuit. Similiter multiplica 9 per 24, exibunt 216, et 2 per 12, fiunt 24; que adde ad invicem, fient 240. Que si diviseris per 11, exibunt $21\frac{9}{11}$ fl, summa secundi.

---

16. Auch hier kennt der Verfasser mehr als eine Lösung. Allgemein erhält man n Enten, $40-3n$ Hühner, $2n$ Tauben. Die speciellen Lösungen ergeben sich für $n = 6; 12$.



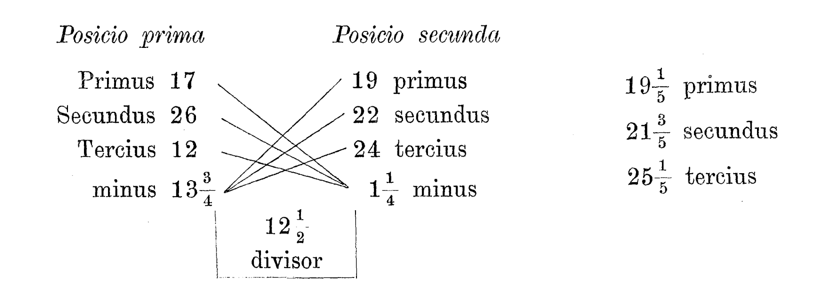
Item sunt tres socii A, B, C empturi nisum pro 34 ₰, et dicit A ad B, C: quilibet vestrum det medietatem suorum denariorum, et ego meos omnes do, et exolvamus nisum. Dicit B ad A, C: non sic, sed uterque vestrum det mihi terciam partem suorum denariorum, et ego meos omnes, exsolvamus nisum. Tercius dicit ad A, B: non ita, sed ego do omnes meos denarios, et quilibet vestrum quartam partem suorum, et presuppono quod quilibet vestrum donat. Queritur quod quilibet habuerit. 44'

Prima posicio	*Secunda posicio*	
A. 20	12 A	A. 10
B. 27	23 B	B. 22
C. 1	21 C	C. 26
minus $21\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{4}$ minus.	
multiplicator	multiplicator	

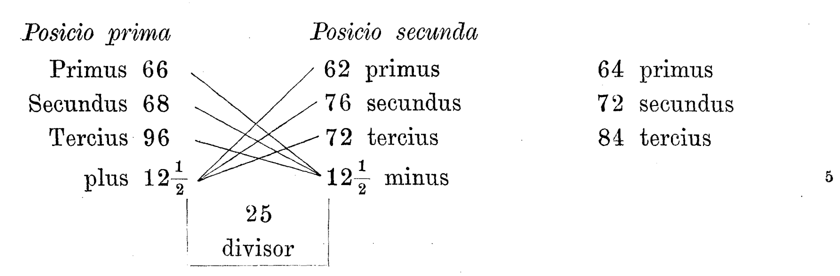
17
divisor

Item sunt tres socii empturi equum pro 30 fl. Dicit primus ad secundum: da $\frac{1}{2}$ de tuis fl ad meos et comparabo equum pro 30 fl. Dicit secundus ad tercium: da $\frac{1}{3}$. Dicit tercius ad primum: da $\frac{1}{4}$ etc^a^. Queritur quot. 45

Pone sic:



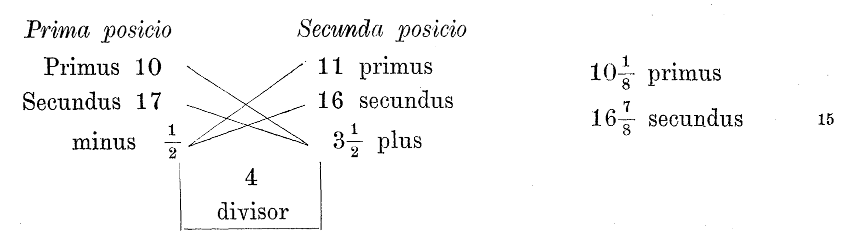
Item si equus emitur pro 100 fl, pone duas posiciones falsas illo modo 4



5

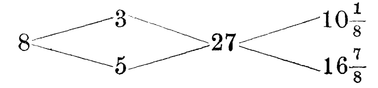
Item 2 gesellen haben 27 fl, ainer hat mer dan der ander. Nu wen der mit der maisten summ des andern summ duplirt, vnd auch der ander des ersten duplirt, so haben sy das gelt 10
46 gleich | tailt. *Queritur quot quilibet habuerit.*

Pone sic duas posiciones falsas:



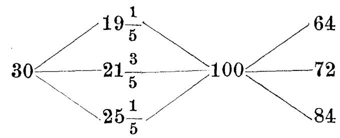
15

Item 2 gesellen, *ut supra,* haben zu tailen 8 fl. Et primus habet 3, secundus 5. vnd dy vil sein finstu cursoris. Sprich. 20



46' |Item einer hat gelt pay im, vnd wil tuch kauffen, vnd wen

8. Wie so häufig in dem Manuscripte wechselt auch hier unvermittelt die Sprache aus dem Lateinischen ins Deutsche. An andern Stellen geht die Sprachmengerei so weit, dass man sich unwillkürlich an Luca Paciulo und dessen ähnliche Sprachmischung erinnert sieht. 19—22. Diese *cursorische* Methode, die auch eine Art unbestimmter Aufgaben enthält, hätte sehr gut auch für die beiden vorhergehenden Exempel benutzt werden können. Ihr Ansatz würde nach der Art der Handschrift so ausgesehen haben:



23 bis S. 40 Z. 5. Diese Zeilen sind offenbar nur aus Unachtsamkeit des Abschreibers hier hineingerathen. Der Preis ist entweder Fl. $3x - 4$ oder $2x + 10$, wenn die Ellenzahl x gesetzt ist, daher ist $x = 4 + 10$. Dann folgt aber aus $3x - 4$ der Werth der Ellen gleich 38 Fl.

er 3 fl gibt umb 1 ellen, so mangelt er 4 fl an zalen, vnd wen er 2 fl gibt pro 1 ellen, so pleiben jm 10 fl v̈ber. Queritur wie uil hat er gelts pey jm gehabt, vnd wie uil ellen er hat kauft?

Machs also. Addir 4 vnd 10, facit 14 ellen. Nu multiplicir 14 mit 3, 5 sunt 42, davon subtrahir 4, pleibt 38 fl, et factum est.

Item 20 persone, viri, mulieres et virgines, dividere debent 20 ob, et vir capit 3 ob, mulier 2 ob, virgo 1 hallensem. Queritur, quot.

Pone sic duas posiciones falsas: 47

Posicio prima		*Posicio secunda*		
Viri	2	3 viri		1 vir
Mulieres	6	7 mulieres		5 mulieres
Virgines	12	10 virgines		14 virgines
superfluum	4	8 superfluum		
	4 divisor			

10

15

II.

| REGULA FALSARUM POSICIONUM DECLARANDA PER 12 REGULAS 47′ SIVE QUESTIONES.

Propositis duobus numeris falsis examinatisque secundum casus propositi 20 exigentiam, tunc si uterque deficiat vel excedat, subtrahatur brevior numerus excessus sive defectus a maiori, et habebitur divisor; deinde multiplica primum numerum falsum per mendacium secundi, similiter secundum numerum falsum per mendacium primi. Horum productorum minus a maiore dematur, residuum vero per partitorem parciatur, et patebit numerus verus. 25 Si vero unus deficiat et alius excedat, iungantur simul numeri excessus et defectus pro divisore. Facta eciam multiplicatione, ut supra, iungantur in unum producta, et parciatur per partitorem, et habebitur numerus verus.

Pro eius exemplari declaracione aliquas ponam questiones propter eius variam applicacionem ad diversos casus.

30 *Prima questio.*

Quidam habet laboratores et pecunias eis distribuendas, quarum si cuilibet daret 7 solidos, retineretur 30 solidos. Proponit ergo cuilibet dare 9 solidos,

6—15. Hier ist die gefundene Lösung die einzig mögliche. Die allgemeine Lösung: $3n - 2$ Männer, $10 - 5n$ Frauen, $12 + 2n$ Jungfrauen hat nur für $n = 1$ positive Werthe. 30 bis S. 41 Z. 16. Die Aufgabe ist analog der oben ohne *posicio falsa* gelösten.

et tali casu deficiunt ei 30 solidi: queritur, quot fuerunt laboratores et quot habuerit solidos.

Coniectatur primo fuisse 20 laboratores, quorum cuilibet si dederit 7 solidos, erunt 140 solidi; retinuit 30 in tali distribucione, oportebat ergo ipsum habere 170 solidos. De quibus si cuilibet vellet dare 9 solidos, fient 180 solidos. Debuerint namque in tali distribucione provenire 200 solidi, de quibus deficiunt | 20. Primus ergo numerus, scilicet 20, deficit in 20.

Coniectatur ergo laboratores fuisse 40, quorum cuilibet si dederit 7 solidos, fierent 280, et quia retinuit in tali distributione 30, oportuerit ipsum habere 310 solidos. De quibus si vellet dare cuilibet 9, fierent 360; debuerint namque in tali distribucione provenire 340, que supergrediuntur in 20. Secundus ergo numerus, scilicet 40, excedit in 20

20 minus 20
40 plus 20 | 40 divisor.

Modo iuxta regulam operare, et est numerus laboratorum scilicet 30; habuit ergo 240 solidos, ut patet practicanti.

Secunda questio.

Quidam convenit quendam ad laborandum per 40 dies continuos tali foedere, quod quolibet die, quo laboraret, daret ei 7 denarios, et quolibet die, quo non laboraret, restitueret 5 denarios. Hic enim mercenarius pacto inito primitus diligenter laboravit, et paulatim post distentavit taliter, quod tempore completo nihil mercedis obtinuit. Queritur, quot diebus laboravit, quo scito scietur eciam tempus, quo vacavit.

Coniectatur ipsum laborasse 30 diebus, quibus lucratus fuisset 210 ₰. Vacasset ergo 10 diebus, quibus restituisset 50 ₰, et sic obtinuit adhuc 160 ₰, in quibus 160 primus numerus, scilicet 30, excedit.

Coniectatur ergo ipsum laborasse 25 diebus, quibus lucratus fuisset 175 ₰. Vacasset igitur 15 diebus, pro quibus restituisset 75, et sic adhuc obtineret 100 ₰, in quibus 100 secundus numerus, scilicet 25, excedit.

30 plus 160
25 plus 100 | 60 divisor.

| Modo iuxta regulam operando patet, quod laboraverat 16 diebus et $\frac{2}{3}$; vacaverat ergo 23 diebus et $\frac{1}{3}$, et lucratus fuit 116 ₰ et $\frac{2}{3}$, et tantum eciam obtinuit ipsum restituere etc[a].

17 u. ff. Diese Aufgabe war eine sehr beliebte unter den Rechenlehrern; wir werden ihr später bei den Beispielen zur Algebra wieder begegnen.

Tercia questio.

Quidam peciit a socio suo, quot haberet denarios, et respondit: Si haberem adhuc tantum, quantum habeo, et dimidietatem sui, pro dimidietate tantum in tercia et quarta partibus tantum et obolum sive dimidium denarium, haberem 200 ₰. Queritur, quot habuit denarios.

Coniectatur ipsum habuisse 60 ₰. Si ergo habuisset adhuc tantum scilicet 60, et $\frac{1}{2}$, scilicet 30, et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$, scilicet 20 et 15 et 1 dimidium ₰ habuisset 185 et $\frac{1}{2}$; deficit ergo primus numerus scilicet 60, in 14 et $\frac{1}{2}$.

Coniectatur secundo ipsum habuisse 12 ₰. Si ergo habuisset adhuc tantum et $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ tanti et obolum, habuisset $37\frac{1}{2}$ ₰. Deficit ergo secundus numerus, scilicet 12, in $162\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{lcr|l} 60 & \text{minus} & 14\frac{1}{2} & \\ & & & 148 \text{ divisor.} \\ 12 & \text{minus} & 162\frac{1}{2} & \end{array}$$

Modo iuxta regulam operando patet, quod habuit 64 ₰ cum $\frac{26}{37}$, ut late examinanti clarescet casum.

Quarta questio.

Quidam venit ad portum navi onerata sua 60 pipis vini. Tenebatur solvere tributum certum theolenario, qui cum non habuisset pecunias, dedit theolenario pipam vini, et ipse restituit ei 30 solidos. De post venit | alter 49 *ad eundum portum navi sua onerata 200 pipis, qui similiter debebat tributum solvere theolenario. Hic cum venisset, pecunia ei deficiebat, dedit eciam pipam vini et 20 solidos, et satis fecerant ambo theolenario. Queritur de precio pipe vini.*

Coniectatur primo ipsam valuisse 40 solidos. Primus ergo qui dedit pipam valoris 40 solidorum et recepit 30 solidos, solvit 10 solidos pro suis 60 pipis. Inquire ergo secundum regulam proporcionum: si 60 pipe solvant 10, quantum debeant solvere 200? $\left|\begin{array}{cc} 60 & 10 \\ 200 & . \end{array}\right|$ Patet, quod 33 solidos et $\frac{1}{3}$ solidi. Secundus enim dedit pipam valentem 40 solidos et cum hoc 20 solidos, supergreditur ergo numerum solvendum 26 et $\frac{2}{3}$, qui est excessus primi numeri, scilicet 40.

Coniectatur igitur secundo, pipam valuisse 50 solidos. Primus igitur, qui dedit 1 pipam et recepit 30 solidos, solvit 20 solidos, oportet ergo

16 u. ff. Auch diese Aufgabe kommt in etwas anderer Fassung später wieder.

secundus $66\frac{2}{3}$ solvere iuxta regulam proportionum. Qui secundus dedit pipam valoris 50 solidorum et cum hoc 20 solidos; solvit nimis 3 et $\frac{1}{3}$.

40 plus $26\frac{2}{3}$	$23\frac{1}{3}$ divisor.
50 plus $3\frac{1}{3}$	

Modo operando iuxta regulam patet valor pipe scilicet 51 solidorum 5
49′ et $\frac{3}{7}$ solidi, ut patet clare practicanti. |

Quinta questio.

Sunt duo, quorum primus dicit secundo, ut det secundus primo 1, et erit ei equalis; dicit secundus: non sic, sed da mihi 1 de tuis, et ero tibi millecuplus. Queritur, quantum habet quilibet. 10

Coniectatur primo primum habere 2. Oportet ergo secundus habere 4, de quibus dabit primo unum, et erunt equales in ternario. Si ergo primus de suis 2 dederat 1 secundo, retinebit 1, et sic secundus haberet 5, et quia secundus diceret esse millecuplus ad primum, oportet ipsum habere 1000, a quibus distat sive defecit in 995 pro defectu primi, scilicet 2. 15

Coniectatur secundo primum habere 3. Oportet ergo habere secundum 5, qui cum daret primo 1, haberent aquale, scilicet 4. Si ergo primus daret secundo 1, retineret primus 2, et secundus haberet 6. Qui cum diceret esse millecuplus ad primum, oportet ipsum habere 2000, a quibus distat in 1994 pro defectu secundi, scilicet 3. 20

2 minus 995	999 divisor.
3 minus 1994	

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus habuit unum et $\frac{4}{999}$; oportet ergo habere secundum 3 et $\frac{4}{999}$, ut patet intuenti clare.

Ad idem. 25

Sunt 3, quorum primus dicit secundo, ut det ei unum, et erit primus secundo equalis. Dicit secundus tercio, ut tercius det ei unum de suis, et
50 *erit ei duplus. Dicit tercius primo, ut det ei unum, et erit tercius | primo triplus. Queritur, quantum habeat quilibet.*

Coniectatur primo primum habere 3, oportet ergo secundum habere 5, 30 qui cum dedit primo unum, erunt equales. Secundo habente 5 oportet tercium habere 4, qui cum dederit secundo 1, erit secundus duplus ad

---

7 u. ff. Ebenso findet sich diese Aufgabe wörtlich wieder als Beispiel zu den Regeln der Algebra.

tertium. Tercio ergo habente 4 et petente 1 a primo, retinebit primus 2, et haberet tercius 5, qui iuxta casum deberet habere triplum, scilicet 6, a quibus deficiet in uno.

Coniectatur aliter primum habere 5 et secundum habere 7, et oportet 5 nunc tercium habere 5. Qui si dederit secundo unum, tunc esset ei secundus duplus. Si ergo tercius petit a primo 1, retinebit primus 4, et tercius habebit 6, et deberet esse triplum, scilicet 12, a quibus deficiunt 6.

3 minus 1	5 divisor.
5 minus 6	

10 Modo iuxta regulam operando oportet sic, quod primus habuit 2 et $\frac{3}{5}$, oportet ergo secundum habere 4 et $\frac{3}{5}$, et tercium 3 et $\frac{4}{5}$, ut patet practicanti.

Iste enim est modus examinandi tales casus, si eciam essent 4, aut 5, aut plures; eciam si in alia proporcione et numeris variarent casus.

15 *Sexta questio.*

Quidam emit 3 pannos precio 30 regalium et 7 solidorum; regale enim valet 30 solidos. Quorum pannorum secundus fuit | emptus precio duplo 50′ *supra primum et cum hoc 5 solidis ultra. Tercius vero fuit emptus precio triplo super primos duos et cum 11 solidis ultra. Queritur de valore sive* 20 *precio cuiuslibet.*

Coniectatur fieri emptum primum 5 regalibus, fuit ergo secundus pannus emptus 10 regalibus 5 solidis, et tercius 45 regalibus et 26 solidis, qui valores seorsum collecti faciunt 61 regalia 1 solidum, qui excedunt numerum propositum in 30 regalibus et 24 solidis.

25 Coniectatur secundo primum pannum fuisse emptum 2 regalibus. Fuisset ergo secundus pannus emptus 4 regalibus 5 solidis, et tercius 18 regalibus 26 solidis. Qui valores collecti faciunt 24 regalia 31 solidos, qui deficiunt a numero proposito in 5 regalibus et 6 solidis.

5 plus $30\frac{24}{30}$	36 divisor.
2 minus $5\frac{6}{30}$	

30

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus pannus valet 2 regalia 13 solidos; valuit ergo secundus 5 regalia et 1 solidum; oportuit ergo, quod tercius valuit 22 regalia et 23 solidos, ut patet intuenti.

Questio septima.

Tres emerunt navem 100 scutis, quorum primus petivit $\frac{1}{2}$ a secundo et cum suis pecuniis solveret navem, scilicet 100 scuta. Dixit secundus tercio, ut tercius daret secundo $\frac{1}{3}$, et secundus cum suis pecuniis additis solveret 100 scuta. Dixit tercius | primo, ut ei daret $\frac{1}{4}$ de pecuniis suis, et ipse cum suis pecuniis adiunctis solveret. Queritur quantum quilibet, vel quantum primus habuit, quia scito uno, ita et alii scientur.

Coniectatur primum habere 60; oportet ergo secundum habere 80, cum cuius $\frac{1}{2}$ primus solveret 100 scuta. Et secundo habente 80 oportet tercium habere 60, quia secundus cum $\frac{1}{3}$ tercii solveret 100. Et tercio habente 60 et petente $\frac{1}{4}$ a primo solveret 75, et sic primus numerus scilicet 60 deficit in 25 minus.

Coniectatur secundo primum habere 68; oportet ergo habere secundum 64, cum cuius $\frac{1}{2}$ primus solveret 100. Secundo igitur habente 64 oportet tercium habere 108, cum cuius $\frac{1}{3}$ secundus eciam solveret 100. Tercio vero habente 108 et capiente $\frac{1}{4}$ a primo solveret ipse 125, et sic excedit in 25.

60	minus	25	50 divisor.
68	plus	25	

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus habuit 64; oportet ergo secundum habere 72 et tercium 84, ut patet etc[a].

Ad idem.

Sunt 2, quorum primus petit a secundo $\frac{2}{3}$ suarum pecuniarum, et primus emet pannum 40 solidorum. Petit secundus a primo $\frac{3}{7}$ suarum pecuniarum, et ipse secundus emet et solvet pannum 40 solidorum. Queritur, quantum habet quilibet.

Conietatur primo primum habere 14; oportet ergo secundum habere 39, cum cuius $\frac{2}{3}$, scilicet 26, primus solveret 40. Habente igitur secundo 39 et capiente $\frac{3}{7}$ de primo, scilicet 6, solveret 45, et sic excedit in 5.

Coniectatur secundo primum habere 21; oportet ergo secundum habere 28 cum $\frac{1}{2}$, cum cuius $\frac{2}{3}$, scilicet 19, primus solveret 40. Habente igitur secundo $28\frac{1}{2}$ et capiente | $\frac{3}{7}$ a primo, scilicet 9, solveret $37\frac{1}{2}$, et sic deficit in $2\frac{1}{2}$.

2—21. Mit verändertem Wortlaut die Aufgabe, welche S. 38 Z. 22 bis S. 39 Z. 7 abgehandelt wird. Das Resultat ist natürlich beide Male das nämliche.

14	plus	5	$7\frac{1}{2}$ divisor.
21	minus	$2\frac{1}{2}$	

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus habet 18 et $\frac{2}{3}$; oportet ergo secundum habere 32 directe.

5 *Octava questio.*

Quidam habens pecuniam dixit primo sociorum suorum, ut daret ei tantum, sicud esset $\frac{2}{3}$ illius, quod habuerit, et ei redderet 7. Consequenter ivit ad secundum, cui dixit, ut daret ei tantum sicud (!) essent $\frac{3}{4}$ suarum pecuniarum, et ei redderet 11. Consequenter ivit ad tercium. dixit ei, ut daret sibi tantum,
10 *quantum haberet, et redderet ipsi 10. Consequenter ivit ad quartum, cui dixit, da mihi duplum ad id, quod habeo, et eius $\frac{2}{5}$, et reddam tibi 200, et finaliter nihil obtinuit. Queritur quantum habuit primus.*

Coniectatur primo ipsum habuisse 33, cuius $\frac{2}{3}$ si secundus ei dedisset, scilicet 22, habuisset 55, de quibus ipsi primo restituisset 7, detinuisset 48.
15 Cum quibus venisset ad secundum, qui illius $\frac{3}{4}$, scilicet 36, ei dedisset; et ei restituisset 11 et obtinuisset 73. Cum quibus venit ad tercium, qui dedit ei tantum; et restituerat ei 10 | obtinuit ergo 136. Cum quibus 136 52 venit ad quartum, qui dedit ei duplum illius et $\frac{2}{5}$ eiusdem, cui cum restituisset 200, retinuit adhuc $262\frac{2}{5}$.
20 Coniectatur secundo ipsum habuisse 45, cuius $\frac{2}{3}$, scilicit 30, ei dedit secundus, et ipse secundo restituit 7, obtinuit ergo 68; cum quibus venit ad tercium, qui ei dedit $\frac{3}{4}$ de 68, scilicet 51, et ipse restituerat 11, obtinuit ergo 108; cum quibus venit ad tercium, qui dedit ei tantum, et restituit ei 10, obtinuit ergo 206; cum quibus venit ad quartum, qui dedit ei
25 duplum illius et eciam eius $\frac{2}{5}$, cui cum restituisset 200, obtinuit adhuc 500 et $\frac{2}{5}$.

33	plus	$262\frac{2}{5}$	238 divisor.
45	plus	$500\frac{2}{5}$	

Modo iuxta regulam operando patet, quod habet primus 19 et $\frac{458}{595}$;
30 cum ad secundum venisset habuit 25 et $\frac{565}{595}$. Ad tercium dum venisset, habuit 34 et $\frac{245}{595}$. Ad quartum autem cum venisset, habuit 58 et $\frac{490}{595}$, que cum expedivisset, optinuit 200, ut patet clare casum examinanti.

Nona questio.

Septem ova demptis 2 denariis sunt empta pro 5 ₰ et uno ovo: queritur quanti precii est ovum.

Coniectatur primo ipsum valere 5 ₰; valerent 7 35, preter 2 denariis essent 33 ₰, qui deberent tantum esse 5 ₰ et unum ovum talis precii, 5
52′ scilicet 5 ₰ |, scilicet 10, qui excedit primus numerus in 23.

Coniectatur secundo 1 ovum valere 4 ₰; valerent ergo 7 28, preter 2 ₰ essent 26, qui esse debent tantum, quantum 5 ₰ et unum ovum eiusdem dem precii aut valoris, scilicet 4 ₰, et sic essent 9 ₰, qui excedit secundus numerus, scilicet falsus, scilicet 4 in 17. 10

5 plus 23 | 6 divisor.
4 plus 17 |

Modo iuxta regulam operando patet numerus verus valoris ovi, scilicet 1 denarii et $\frac{1}{6}$ denarii. Ad probandum dic: 1 ovum constat $\frac{7}{6}$, quot 7 ova? facit 8 ₰ $\frac{1}{6}$. Depone 2 ₰, remanebit $6\frac{1}{6}$, et hoc est 5 ₰ et 1 ovum, 15 quia 1 ovum constat $1\frac{1}{6}$ ₰.

Ad idem.

4 ova demptis 2 denariis emuntur pro 7 ₰ et ovo, queritur quantum precium est.

Omnino iuxta regulam operando patet, quod ovum valet 3 ₰ 20

4 plus 3 | 3 divisor.
5 plus 6 |

Questio decima.

Quidam transiens vicum peciit a quodam, quot essent hore. Cui respondebat: quia dies est 12 horarum artificialium et sunt $\frac{2}{3}$ preteriti et $\frac{3}{4}$ futuri 25 simul iuncte. Et verum dixit. Queritur, quot fuerunt hore.

Coniectatur 12 fuisse horas, cuius $\frac{2}{3}$ sunt 8, et $\frac{3}{4}$ sunt 9, usque ad complementum 12 horarum sunt 3, qui simul iuncte faciunt 11 et non 12, scilicet minus una.

Coniectatur secundo fuisse 6 horas, cuius vel quarum $\frac{2}{3}$ facit 4, et 30 temporis futuri usque ad complementum 12 horarum $\frac{3}{4}$ sunt $7\frac{1}{3}$, qui simul
53 iuncte sunt $11\frac{1}{2}$, que deberent esse 6 tantum, et sic excessus est in $5\frac{1}{2}$. |

12 minus 1 | 6 plus $5\frac{1}{2}$ | $6\frac{1}{2}$ divisor.

Modo iuxta regulam operando patet numerus verus horarum, scilicet quod fuerunt 11 cum $\frac{1}{13}$.

5 *Undecima questio.*

Quidam mercator a quodam cupit emere 100 ℔ cere antique et nove pro 18 scutis. Ipse enim venditor vendit quintale, quod est 100 ℔, antique cere pro 10 scutis, et nove pro 20 scutis. Modo queritur quot libre antique cere et quot ℔ nove sibi veniunt pro 18 scutis facientes simul unum quintale.

10 Coniectatur primo, quod ei veniunt 40 ℔ antique, ille enim venduntur 4 scutis; et cum caperet 40 antique, reciperet nove 60, que valent 12, que cum 4 primis additis essent 16, et sic essent minus 2 pro 40.

Coniectatur secundo ipsum recipere 30 antique. Ille venduntur 3 scutis, et reciperes tunc 70 nove, que vendentur 14, et sic posito 30 esset 15 minus in uno.

40 minus 2 | 30 minus 1 | 1 divisor.

Modo iuxta regulam operando patet numerus verus antique cere scilicet 20, que valent 2 scuta, et nove 80 erunt, que valent 16, et sic patet solucio.

20 Nota in idem, quod si casus ponetur de tribus differentiis cere aut alterius rei, aut de pluribus differentiis, tunc per has posiciones non potest inveniri, nec per regulam, quia non semper uno numero, sed pluribus tales | 53′ casus stare possunt.

Exempli causa quidam vendit de prima differencia pro 10 scutis, de 25 *secunda pro 25, de tercia pro 20 scutis ipsum quintale. Quidam cupit unum quintale aggregatum ex omnibus pro 18 scutis: queritur, quantum haberet de qualibet differentia.*

Una recipiendo de prima 40, de secunda 40, de tercia 20.

Alia recipiendo de prima 30, de secunda 20, de tercia 50.

20—29. Hier behauptet der Verfasser also, dass unbestimmte Aufgaben mit der *regula falsi* nicht zu lösen gehen, und giebt als Grund die mehrfachen Werthe an, welche die Unbekannten erhalten können. In dem vorliegenden Beispiele ist allgemein $A = 20 + t$, $B = 2t$, $C = 80 - 3t$. Die beiden vom Verfasser gegebenen Speciallösungen ergeben sich für $t = 20$ und für $t = 10$. Obwohl oben mehrfach ähnliche Aufgaben durch die Regel vom falschen Ansatz zur Lösung gebracht sind, so lässt sich diese doch in unserem Falle nicht anwenden, da das Erfordernis dazu — dass nämlich die Anzahl der zu theilenden Sachen und der zu zahlende Preis einander gleich sein müssen — hier nicht zutrifft. In nicht ganzen Zahlen findet man freilich durch die *Regula falsi* stets eine Lösung.

Duodecima conclusio(!).

Est enim facilis et terminabitur per modum resolucionis a posteriori, quamvis posset eciam regula ista manifestari, et est:

Quidam intrant ortum, qui habet 4 portas, et colligit poma, qui exitum petens a primo dat primo $\frac{1}{2}$ *omnium et* $\frac{1}{2}$ *unius integri. Consequenter se-* 5 *cundo dat* $\frac{2}{3}$ *omnium et* $\frac{2}{3}$ *unius integri; tercio vero dat* $\frac{3}{4}$ *omnium et* $\frac{3}{4}$ *unius integri; quarto autem dat* $\frac{4}{5}$ *omnium remanencium et* $\frac{4}{5}$ *unius ultra integri, et retinet tantum 2 in fine. Queritur, quot fuerint in principio.*

Quia remanserunt 2 et ultimo dedit $\frac{4}{5}$ ultra, ipsa 2 in 5 duc, et erunt 10, quibus adde $\frac{4}{5}$ ultra datas, et erunt 14 poma, que habuit, cum 10 venisset ad quartum. Ipsa igitur 14, quia tercio dedit $\frac{3}{4}$, duc in 4 et superadde $\frac{3}{4}$ ultra datas et habebis 59. Consequenter, quia secundo dedit $\frac{2}{3}$, ipsa 59 in 3 multiplica et $\frac{2}{3}$ producto superadde, et habebis 179, que 54 habuit, cum ad secundum veniret, que dupla, et unitas | superaddita dat quesitum, scilicet 359. 15

III.

133′ M a c h m e t in dem puech algebra und almalcobula hat gepruchet dise wort: census, radix, numerus. Census ist ain yede zal, die in sich selb multiplicirt wirt, daz ist numerus quadratus. Radix ist die wurcz der zal oder dez zins. Numerus ist ain zal fur sich selb gemercket, nit alz sie ain 20 zins oder ain wurcz ist. Aus den dingen merkt er 6 ding: das erst, wann der census sich gelichet den wurczen; daz ander, so der census sich gelichet der zal; daz drit, so sich dye zal gelichet den wurczen; das 4 so sich der census und die wurczen gelichent der zal, als ob man spreche: ain census vnd 10 wurcz gelichent sich 32; das funft ist, so sich der 25 census vnd die zal gelichend den wurczen; das sechst, so sich die wurczen vnd die zal gelichent dem census.

Dar vmb sprech ainer: gib mir ain zensus vnd zuech darvon sin wurcz, vnd von dem, daz vberbelyb an dem census, zuech och ausz dye wurcz; die zwo wurcz tue zesamen, daz 2 zal darausz werden. So aber daz nit in 30

1—15. Diese Lösung ist mit der *regula versa* des Leonardo Pisano, und also indirekt mit der sogenannten *Umkehrung* der Inder identisch, zugleich mit der *regula sermonis* der Araber, aus welcher letztern Quelle sowohl Leonardo als unser Verfasser geschöpft haben dürften. 25. Hier hat Gerhardt schon darauf aufmerksam gemacht, dass wohl ein Schreibfehler für 39 vorliegt, da dann die Aufgabe mit der des Muhammed Alchwarizmî identisch wird.

der sechs regel ainer stat, | so bring es in ain regel also. Es sollen die 134
zwo wurcz 2 numero gelich gesin, so kompt es in die dritten regel; dar
vmb zuech ab von den 2 numero die wurczen dez census, so belyben
2 minder der wurczen desz zins, dasz selb belybend ist gelych der wurczen
5 desz, dasz ain census uberbelybt sein wurcz darvon gezogen wurt, daz du
aber habest des gelych, unsz daz uberbelybt, so multiplicir die 2 dragmas
minder ainer wurczen in sich selb, so komen 4 dragma vnd ain zins minder
4 wurczen, daz wurt gelich dem, daz uberbelybt an dem census, wann sein
wurcz darvon wart gezogen. Nu zuech darvon dye gemindert wurcz, so
10 belybt 1 census vnd 4 dragme gelich ain census vnd 3 wurcz. | Nu tu 134'
baidenthalb den zins darvon, so beleybt dennocht dasz ubrig gelich, dasz
ist, 4 dragme sind gelych 3 wurczen. So musz ain wurcz $1\frac{1}{3}$ sein, wann
3 mal $1\frac{1}{3}$ macht 4. Multiplicir $1\frac{1}{3}$ in sich selb, so kompt $\frac{16}{9}$, daz ist der
census, vnd sein wurcz ist $1\frac{1}{3}$, vnd wann tue $1\frac{1}{3}$ tust von $\frac{16}{9}$, so belyb $\frac{4}{9}$;
15 die wurcz von $\frac{4}{9}$ ist $\frac{2}{3}$, die $\frac{2}{3}$ tue zu der wurczen $\frac{16}{9}$, daz ist $1\frac{1}{3}$, macht
2 gancz. 1461. Erasmi martyris.

IV.

| REGULE DELACOSE SECUNDUM 6 CAPITULA, 136'

vnd mit den selben capitel mag man alle rechnung machen, vnd haissen also:

20 Das erst: Cosa gleich numero,
Das ander: Censo gleich den numero,
Das dritt: Cosa gleich censo,
Das viert: Censo vnd cosa gleich numero,
Das funft: Censo vnd numerus gleich cosa,
25 Das sechst: Cosa vnd numerus gleich censo.

Nu merck, wen du ain rechnung machst, als du furpas werdest sehen, es musz der capitel aines gleich sein, darnach das selbig capitel ist, es musz mit der regel gemacht werden.

---

12. Gerhardt setzt hinter *sein* einen Punkt und beginnt dann mit *Wann* den Satz so, als ob er die Begründung für das Folgende: *Multiplicir* $1\frac{1}{3}$ wäre. Nun hat aber, und der Sinn wird mir auch recht geben, *wann* hier die Bedeutung von *weil* oder *denn*, und begründet, weshalb $x = 1\frac{1}{3}$ sein muss, wenn $4 = 3x$ ist. Bei Vergleichung unseres Textes mit dem Gerhardts werden auch sonst noch mehrfache Unterschiede zu Tage treten.

Capitulum primum.

Wen der numerus gleich ist cosa, das ist, wen dy zal gleich dem ding
137 ist, so sullen wir dy zal tailen | in daz ding, id est in den cosa, vnd was
dar aus kumbt, als vil ist das ding wert.

Capitulum secundum. 5

Wen das ding ist gleich, das ist censo gleich der zal, so sol man
tailen dy zal, id est den numerus, mit dem censo, vnd was ausz der tailung
kumbt, Radise quadra von der selbigen zal ist daz ding wert.

Capitulum tercium.

Wen das ding ist gleich dem censo, so sol man das ding tailen in 10
den censo, vnd was dar ausz kumbt, vnd als vil ist das ding wert, id
est cosa.

Capitulum quartum.

Wen dy zal, id est numerus, gleich ist dem ding, id est cosa, vnd
137' dem censo, so sol mansz tailen mit dem censo, dar | nach das cosa, id est 15
ding, halbs taylen, vnd das selbig halbtayl schol man furpas in sich machen,
vnd was es dann trift, auf dy selbig summa soltu darnach dy zal darzu-
thun, vnd radix in der selben summa unternand mynder den halbtail von
dem ding ist das ding wert.

Capitulum quintum. 20

Wen das cosa, id est ding, gleich der zal, id est numero, vnd dem
censo, so soltu tailen mit dem censo alle ding, vnd das ding halbs tailen,
vnd für daz selbig halbtail in sich selb, das das selb halbtail von dem
ding, vnd von der sum schol man abziehen dy zal. ain radixe von dem
selbigen abgezogen ist das ding wert. 25

2–4. Das ist $ax = b$, $x = \frac{b}{a}$. 6—8. Hier hat sich der Verfasser zuerst verschrieben, indem er sagt: *Wen das ding*, er verbessert sich aber sogleich, indem er hinzufügt, *das ist censo*. In Zeichen: $ax^2 = b$, $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$. 10—12. Das ist $ax^2 = bx$, $x = \frac{b}{a}$. 14—19. Das ist

$$ax^2 + bx = c;\quad x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a};\quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}.$$

21–25. Es soll sein $ax^2 + c = bx$; $x^2 + \frac{c}{a} = \frac{b}{a}x$; $x = \frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$; ein Commentator zu der Gerhardtschen Algebra — siehe unten — kennt auch bei der Wurzel das + zeichen.

Exemplum. 80 drittail aines hallers wie uil fl. es macht. Machs als do stet $\frac{3}{1}$ pro 1 Haller, wie 80. | facit 1 fl. 6 ₰ $\frac{2}{3}$ ains Hallers. 138

Capitulum sextum.

Wen der censo ist gleich dem ding und der zal, so schol man tailen
5 mit dem censo, vnd das ding $\frac{1}{2}$ tail, vnd fürsz in sich selbs, multiplicir für sichs selbigen $\frac{1}{2}$ tail, vnd das es trift, soltu dy zal darzu thuen, vnd dy radix von dem selben summe vnd auch das $\frac{1}{2}$ von dem ding ist das ding wert.

Merck, was censo, ding und cubo ist.

10 Multiplicir ding wider ding, macht censo:
Multiplicir ding wider censo, macht cubo.
Multiplicir ding wider cubo, macht censo de censo.
Multiplicir censo de censo wider ding, macht du^x cubo.
Multiplicir censo wider censo, macht censo di censo.
15 Multiplicir cubo wider cubo, macht cubo di cubo.

| *Exemplum de primo capitulo.* 138′

Mach aus 10 zwai tail, vnd das grôst tail in das ander tail, vnd das aus der tailung 5 chumbt: wie uil ist ittlichs tails gewesen?

20 Machs also. nym, das 1 tayl say 1 ding, id est cosa, so musz das ander tail 10 mynder 1 dings seyn. Nu tail 10 mynder 1 dings in 1 ding, vnd sol 5 aus der taylung komen. vnd darumb das man in 1 ding nit mag taylen, mustusz also tailen. 10 mynder 1 dings mustu taylen in 1 ding, vnd 5 soll treffen aus der taylung. Nun multiplicir 5 wider ain
25 ding, das was der tayler, so sol das komen, das man getaylt het, das was

---

1—2. Dieses *Exemplum* ist natürlich nur durch die Schuld des Abschreibers aus einer Randglosse in den Text gekommen. 4—8. Das ist $ax^2 = bx + c$; $x^2 = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$; $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$. 13. Die letzten Worte dürften wohl *duplex cubo* zu lesen sein, dann würden also folgende Potenznamen sich ergeben:

x = ding = cosa
x^2 = censo
x^3 = cubo
x^4 = censo di censo
x^5 = duplex cubo
x^6 = cubo di cubo.

Es wären also hier, im Gegensatz zu LUCA PACIUOLO die Exponenten nicht multiplicirt, sondern addirt.

10 mynder 1 ding gleich. Nu gib wider den 10 das ding, das er mynder [139] hat, so pleibt 10, gib an der ander tail auch | 1 ding zu 5 ding, so wirt 6 ding, das ist 10 zal gleich, id est numero. Nu spricht das erst capitel: wen das cosa gleich dem numero ist, so sol man die zal in daz cosa taylen: Nu tail 10 in 6, kumpt 1 vnd $\frac{4}{6}$, ist $\frac{2}{3}$, vnd als uil ist das ding wert. Nu nym das vͤbrig bisz auf 10, das wer 8 vnd $\frac{1}{3}$. das 1 tail ist $1\frac{2}{3}$, das ander tail ist $8\frac{1}{3}$.

1 ding · 10 mynder 1 dings · $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{\text{pl}}$
5 mol 1 ding ist 5 ding $\frac{10}{1}$ · 1 $\frac{4}{6}$.

Exemplum de secundo capitulo.

Vind 1 zal, das ich $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$ von der selben zal genemen mug, vnd was vͤber pleibt, wil ich furpas in sich selb multipliciren, vnd schol 16 tragen (?).

[139'] Machs also. nym das dy zal sey | 1 cose, id est ding, gewesen. Nu nym $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ von 1 cosa, das ist $\frac{7}{12}$, pleibt $\frac{5}{12}$ ding. das für in sich selb, das macht $\frac{25}{144}$ von 1 censo, vnd das ist gleich 16. Darumb spricht dy regel, wann dy zal gleich dem censo, so soll man dy zal in dem censo tailen, vnd was dar ausz kumbt, radix quadrata von der selben sum ist das cose wert. Darumb tail 16 in $\frac{25}{144}$ censo, trift $92\frac{4}{25}$, vnd radix von $92\frac{4}{25}$ ist das cose wert, das ist $9\frac{3}{5}$, vnd $9\frac{3}{5}$ ist dy zal gewesen.

Probacio. Nym $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ dauon von $9\frac{3}{5}$, vnd das vͤbrig multiplicir fur sich selb, so kumbt 16, et factum est.

De capitulo tercio.

Item wen dy censo gleich dem ding, so sol man das ding in den censo taillen, vnd als vil ist das ding wert.

[140] Vind ain zal als 2 gegen | 3, vnd dy selben zal als vil prungt zusamen gethan als man hat multiplicir ain wider dy ander.

Machs also. nym, das dy erst zal sey 1 cosa gewesen, vnd das ander musz 3 seyn. thu zesam 2 vnd 3, macht 5 cose. Nu multiplicir 2 cose uider 3 cose, macht 6 censi. Nu haben wir 5 ding gleich 6 censi. (censi) gleich dem ding, so sol man (tailen) ding in 6 censi, komen $\frac{5}{6}$; als vil ist das ding wert. Vnd wir haben geseczt 2, darumb multiplicir 2 mol $\frac{5}{6}$,

---

28. Das muss natürlich heissen: *2 cosa,* wie aus dem Zusammenhange ersichtlich ist.

fit $\frac{10}{6}$, das ist $1\frac{2}{3}$, vnd als vil ist dy erst zal gewesen; der ander was 3 ding. Multiplicir 3 mol $\frac{5}{6}$, ist $2\frac{1}{2}$, vnd als uil ist dy ander zal gewesen, et factum est.

Probacio. Wir haben die erst zal $1\frac{2}{3}$, dy ander $2\frac{1}{2}$; thu es zesam,
5 trift $4\frac{1}{6}$. | Nu sol wir multipliciren, vnd sol auch komen $4\frac{1}{6}$. Nu mul- 140'
tiplicir $1\frac{2}{3}$ wider $2\frac{1}{2}$, das macht $4\frac{1}{6}$, vnd ist probiret.

De capitulo quarto.

Item ainer leicht 20 ℔ jn 2 jaren gewin vͤber gewin, vnd wen dy zwey jar ausz komen, so gibt man im wider 30 ℔ mit
10 hauptgut vnd gewin. Nu frag ich, wie uil 20 ℔ in 1 jar hat gewonnen, vnd 20 β ist 1 ℔.

Machs also. Nym das 20 ℔ in 1 jar haben gewonnen 1 ding; das ander gewinnet dy 20 ℔ aber 1 ding. Nu mach, was 1 ding auch gewynet, mit der regel von 3 ding. Sprich 20 ℔ pro 1 ding, wie 1 ding
15 vnd secz also

$$20 \cdot 1\,\partial \cdot 1\,\partial .$$

Multiplicir 1 ∂ wider 1 ∂, macht censy vnd | tails in 20, chumbt 141
$\frac{1}{20}$ censo, vnd das ist dy 30 ℔ gleich mit hauptgut vnd gewin: 20 ℔ 2 ∂ $\frac{1}{20}$ censy dem 30 ℔ gleich. Nu zeuch ab 1 zal von der andern,
20 wann es sol nur 1 zal sein. zeuch ab 20 ℔ von 30 ℔, pleibt 10 ℔; desgleich auch 1 ∂ $\frac{1}{20}$ censo, vnd tail alle ding mit dem censo. tail 10 ℔ in $\frac{1}{20}$ censo, kumbt 200 ℔; tail 2 ∂, chumbt 40 ∂. Nu haben 200 ℔ mit 40 ∂. tail das ding in $\frac{1}{2}$, alz dy regel spricht, kumbt 20 ∂. Multiplicir für sich selbs, trift 400 ∂, thu dy zal dazu dy 200 ℔, trift 600,
25 vnd radix von 600 mynder das halb tail von dem ding hat 20 ℔ 1 jar gewonnen.

| *De capitulo quinto.* 141

Item es sind 2 gesellen, dy wellen stechen mit einander. der 1 hat gelt, der ander hat seyden. der mit der seyden peut
30 1 ℔ pro 9 fl pargelt vnd im stich 12 fl, vnd uil $\frac{1}{4}$ pargelt, das der mit dem gelt peut das gelt am beraiten gelt pro 10 fl 1 marc. Nu frag ich, wie er das gelt am stich sol pieten, das er $\frac{1}{4}$ von dem stich dem andern geb, vnd der stich gleich sey.

7—26. Das ist die *regula lucri* Widmanns nur mit andern Zahlenwerthen. Wir werden derselben Aufgabe später nochmals begegnen. Siehe auch Cantor, Vorlesungen II, S. 213—214. 28 u. ff. *Stich* heisst Waarenaustausch. Siehe Cantor, Vorlesungen II, S. 207.

Machs also: nym das 1 ∂ gelt 1 stich. Nu nym $\frac{1}{4}$ von 1 ∂, das ist $\frac{1}{4}$ dings, vnd das gib dem mit der seyden, der do 1 ℔ peut pro 9 fl vmb pargelt vnd am stich pro 12 floren. Nu gibt man $\frac{1}{4}$ ∂, darumb zeuch im ab $\frac{1}{4}$ ∂. Nu machs mit der | Regel von 3 ding. 9 fl mynder 1 ∂ pro 12 fl mynder $\frac{1}{4}$ ∂, daz chan man nit taylen, wan ding in dem tailer ist. darumb sprich also: wir haben zu taylen 120 mynder $2\frac{1}{2}$ in 9 mynder $\frac{1}{4}$, vnd 1 ding ausz der taylung chomen. Darumb multiplicir 1 ∂ wider den tayler, das ist 9 minus $\frac{1}{4}$ dings, so werden 120 mynder $2\frac{1}{2}$ ∂ gleich. Nu multiplicir 1 ∂ wider 9 minus $\frac{1}{4}$ ∂, das macht 9 ∂ minus $\frac{1}{4}$ censo. Nu mach ain ydlich gleich, wan dem ersten sol man wider geben. gib dem 120 mynder $2\frac{1}{2}$ ∂ gewin $2\frac{1}{2}$ ∂, so pleibt 120 zal; gib dem andern auch als vil, komen $11\frac{1}{2}$ ∂ minus $\frac{1}{4}$ censy. gib in auch den $\frac{1}{4}$ censy, das er minus hat, so pleibt $11\frac{1}{2}$ ∂. | gib dem andern auch $\frac{1}{4}$ censy, trift 120 zal $\frac{1}{4}$ censy. Nu haben wir paid tailen gleich gemacht, pleibt dem ainen tail $11\frac{1}{2}$ ∂, dem andern tail pleibt 120 zal vnd $\frac{1}{4}$ censy. Nu sol man alle ding in dem censo tailen. tail 120 zal in $\frac{1}{4}$ censy, trift 480 zal; tail auch $11\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$ censy, trift 46 ∂; tail dy ding in halb, ist 23; multiplicir 23 für sich selb, sint 529. Nu zeuch ab dy zal, das ist 480, pleibt 49. Nu radix von 49 ist 7, das sol man abzihen von dem halben tail von dem ding, das was 23. zeuch ab 7 von 23, pleibt 16; vmb 16 fl hat man das gelt am stich gepoten.

(142 / 142′)

136 | *Proba super quintam regulam lacose.*

Wiltus probiren, so sprich also. der mit der seyden peut 1 ℔ vmb 5 fl an pargelt vnd am stich vmb 12 fl, vnd wil $\frac{1}{4}$ pargelt haben von dem, der gelt hat, der das gelt am stich vmb 16 fl hat vnd umb pargelt pro 10 fl. Nu nym $\frac{1}{4}$ von 16, ist 4, vnd zeuch 4 von 12, pleibt 8; auch zeuch ab 4 von 9, pleibt 5. darnach sprich: 5 vmb 8, wie 10. secz also 5 · 8 · 10, kumpt 16.

5 · 8 · 10 $\frac{80}{16}$ 1 ding stich
pargelt pargelt

---

22 bis S. 56 Z. 5. Diese *Proba* ist von der Hand des Frater Fridericus, während der Haupttext von anderer Hand ist. Jedenfalls ist aber dadurch bewiesen, dass diese Algebra nicht später zu setzen ist als die von demselben Frater Fridericus geschriebene Gerhardtsche Algebra.

9 mynder $\frac{1}{4}$ ℛ $\frac{12}{12}$ mynder $\frac{1}{4}$ · $10\frac{1}{4}$

9 ding minder $\frac{1}{4}$ censo | 120 minder $\frac{10}{4}$

pleibt $11\frac{1}{2}$ ding minder $\frac{1}{4}$ censo pleibt 120 zal

$11\frac{1}{2}$ ding $120\frac{1}{4}$ censo $\frac{46}{23}$ ∂ $\frac{529}{480}$ · 480.

5 Radix von 49 ist 7, zeuch ab von 23, pleibt 16. | 136′

| *De capitulo sexto.* Noch

Item ainer hat 100 ellen tuchs vnd ain ander hat auch als uil, vnd der erst geit seins | tuchs 5 ellen mer vmb 1 fl. den der 143 ander, vnd wenn sy dy tuch payde verkauft haben, so vinden sy, 10 das sy 20 fl haben. 'Nu sprech ich, wie uil ydlicher ellen seins tuchs vmb 1 fl sol geben.

Machs also: nym, das der ander hab 1 ∂ pro 1 fl geben von den 100 ellen, so muss der erst geben 1 ∂ und 5 ellen mer. Nu tail 100 ellen in 1 ding, das er vmb 1 fl gibt, so trift $\frac{100}{1 \text{ ding}}$, 100 in 1 ding ge-15 tailt, als vil fl trifts. Nu tail dy ander 100 ellen in 1 ∂ vnd 5 mer, so trifts $\frac{100}{1\ \partial\ 5}$ 100 in 1 ∂ vider 5 mer getailt. Nu summir zesam $\frac{100}{1\ \partial}$ vnd $\frac{100}{1\ \partial\ 5}$, als man zu prochen thut. Multiplicir in crucz: 100 mal 1 ∂ macht 100 ∂, vnd 100 mal 1 ∂ vnd 5 macht 100 ding vnd 500 zal. | 143′ addir zesam 100 ∂ vnd 100 ∂ vnd 500 zal, macht 200 ∂ vnd 500 zal. 20 das sol man tailen in dy vntern figur, das ist 1 ∂ multiplicirt vider 1 ∂ 5, macht 1 censy vnd 5 ding, vnd tail 200 ∂ vnd 500 zal in ain censy vnd 5 ∂. das tailt uider nicht, wan ding ist. Vnd merck, wen du es getailt hast, so sol 20 fl komen, darumb multiplicir 20 fl uider 1 censy vnd 5 ∂, wirt gleich 200 ∂ vnd 500. Multiplicir ain censo 20 fl, macht 20 censo vnd 25 100 ∂ gleich 200 ∂ 500 zal. Nu nym davon dy 100 ∂, pleibt zu aym tail 20 census. nym zu dem andern tail auch 100 ∂, so plaibt 100 ∂ vnd 500 zal dem andern. tail mit dem censo, das chumbt 1 censo 5 ∂ vnd 25 zal. tail dy 5 ∂ halbs, das ist $2\frac{1}{2}$ ∂; multiplicir für sich, trift |

---

6 bis S. 57 Z. 3. Auch dieses Beispiel wird uns später nochmals begegnen. Dort ist es mit der 5. Regel gelöst, indem nicht die Ellenzahl des zweiten, sondern die des ersten als Unbekannte genommen wird, doch wird dort auch gesagt, man könne durch die sechste Regel die Aufgabe ebenfalls lösen. Bemerkenswerth sind jedenfalls die allgemeinen Brüche $\frac{100}{1 \text{ ding}}$ und $\frac{100}{1 \text{ ding } 5}$. Aehnliche, aber noch complicirtere werden wir später wieder finden.

144 6 ∂ $\frac{1}{4}$· tu es zesam mit der zal, das ist 25 zal, trift $31\frac{1}{4}$, vnd radix von $31\frac{1}{4}$ mer $2\frac{1}{2}$ hat der ander ellen vmb 1 fl geben, der erst hat radix von $31\frac{1}{4}$ mer $7\frac{1}{2}$ vmb 1 fl geben, et factum est.

De capitulo primo.

Item ainer hat gelt pay im, vnd wil tuch kauffen, vnd wen 5 er 3 ℔ gibt pro 1 ellen, so mangelt er 4 ℔ am zalen, vnd wenn er 2 ℔ gibt pro 1 ellen, so pleibt im 10 ℔ vͤber. Queritur, was 1 ellen hab golten, vnd wie uil geltes pey im hab.

Machs also: nym wir, das das stuck sey 1 ding gewesen, vnd er geit 144′ 3 ℔ pro 1 ellen. Sprich 3 mol 1 ∂ ist 3 ∂ | minus 4 ℔ darumb das 10 er spricht, er mangelt 4 ℔ am zalen, darumb chomb 3 ∂ minus 4 ℔. Nu sprich 2 mol 1 ∂ ist 2 ∂ vnd 10 ℔ mer, darumb das er spricht, im pleibt 10 vͤber. Nu ist 3 ∂ minus 4 ℔ dem ander gleich, das ist 2 ∂ 10 mer. Nu mach ain yeden tail gleich, gib dem 3 ∂, vnd gib dem andern auch 4 ℔, so trifts 2 ∂ vnd 14 ℔ gleich den 3 ∂. zeuch ab 2 ∂ 15 von 3 ∂, pleibt 1 ∂ vnd dem andern 14. Nu tail 14 in 1 ∂, kumbt 14, vnd 14 ist das ding wert. Das tuch ist 14 ellen gewesen. Wiltu nu wissen, wie uil gelts, so sprich: 3 mol 14 ist 42 ℔. Nu zeuch ab dy 4 ℔, 145 dy er mangelt, so pleibt jm 38, dy hat er pey im gehabt. | Sprich 2 mol 14 ellen ist 28, pisz auf 38 ist 10 ℔ vͤbrig, vnd also ist probiret vnd 20 gemacht.

Item zwischen 7 vnd 13 secz 5, was sol ich seczen zwischen 32 vnd 4.

Item es sein 2 gesellen, dy wellen vnternander stechen. der erst peut sein ding pro 8 fl 100 ℔ pargelt vnd am stich pro 11 fl, 25 der ander peut sein ding 1 ℭ pro 4 fl mer am stich dan vmb pargelt. Nu frag ich, wie uil der ander sein ding hat gepoten am pargelt vnd am stich dem mit paren gelt.

Machs also: nym das er am paren gelt peut 1 ∂, so muss er am 145′ stich pieten 1 ∂ vnd 4 fl | mer; darumb sprich also: 1 ∂ pro 1 ∂ vnd 4 fl, 30 wy 8, vnd sol 11 komen, als der erst hat poten. Nu secz also 1 ∂ 1 ∂ 4 · $\frac{8}{1}$ · Nu mach 8 mol 1 ∂ vnd 4 macht 8 ∂ 32, vnd das sol man tailen in

---

4 bis S. 58 Z. 18. Diese Aufgabe und die beiden folgenden sind nachträglich hinzugefügt worden. Mit der Aufgabe für das 6. Capitel war die eigentliche Abhandlung zu Ende. Der ersten Aufgabe sind wir schon oben S. 39, Z. 23 bis S. 40, Z. 3 mit dem identischen Wortlaute begegnet. Auch die dort gegebene Lösung beruht auf den hier ausführlich gegebenen Schlüssen. 22 23. Diese Zeilen sind sicherlich absichtslos hierher gesetzt worden.

1 ∂, vnd sol aus der tailung komen 11, das sind dy 11 fl, das der erst peut am stich. Nu haben wir 8 ∂ vnd 32, das sol man tailen jn 1 ∂, vnd soll 11 komen, darumb multiplicir 1 ∂ uider 11, das macht 11 ∂, das ist 8 ∂ vnd 32 gleich. zeuch ab 8 ∂ von 11 ∂, pleibt 3 ∂, gleich
5 32 zal. Nu tail 32 in 3 ∂, komen $10\frac{2}{3}$ ist das ding wert. darumb hat der ander sein ding am gelt vmb 10 fl $\frac{2}{3}$ poten, vnd 14 fl $\frac{2}{3}$ hat er am stich poten, vnd | an gelt pro 10 fl $\frac{2}{3}$, das ist 4 fl $\frac{2}{3}$ am gelt get mir 146
14 fl $\frac{2}{3}$ am stich w. g. in 8; vnd wiss, von recht soll 11 komen.

1 ∂ · 1 ∂ vnd 4   8 · 11 · | 32
10   1 ∂ · 1 ∂ 4 · $\frac{8}{1}$ 11 ∂ | 11 ∂
18 · 18 · 32 · $10\frac{2}{3}$

De capitulo primo.

Item es sein 3 gesellen, dy haben gelt, vnd der erst spricht zu den andern 2: het ich 7 fl ewres gelts, so het ich dann 3 mol mer
15 dann ir 2; spricht der ander: het ich 9 fl ewres gelts, so het ich 4 mol mer dann ir 2. spricht der dritt: het ich 11 fl ewres gelts, so het | ich 5 mol mer dann jr 2. 146′

Facit. si haben all 3 gehabt $19\frac{43}{83}$. Primus $7\frac{53}{83}$, secundus $6\frac{51}{83}$, tercius $5\frac{22}{83}$.

V.

20 *Questio prima.*

Quidam emit 15 ℔ zinziberis et 17 ℔ cariofl orum pro 7 fl, et de carioflori bus pro vno fl veniunt 3 ℔ plus, quam veniunt zinziberis: queritur, quot veniunt ℔ zinziberis pro vno fl, et quot ℔ cariofl orum pro vno fl.

25 Sic inquiro. pono, quod zinziberis vna res veniat pro fl, tunc oportet ex ypotesi, ut cariofl orum vna res et 3 ℔ veniant eciam pro fl. Debeo igitur diuidere 15 per 1 rem, iterum 17 per 1 rem et 3, et que exeunt in quantitate coniungere, et productum erit 7 fl. Sed cum diuido 15 per 1 rem exit fractio, scilicet $\frac{15}{1\ \text{res}}$. Iterum cum diuido 17 per 1 rem et 3,

---

12—17. Die Auflösung, so wie sie hier nur angedeutet ist, folgt später ausführlich. 18 u. ff. Die folgenden Beispiele beziehen sich auf die Algebra, welche Gerhardt herausgegeben hat. Es heisst später „*in algebra Arabis*“.

exit finaliler fractio, scilicet $\frac{17}{1 \text{ res et } 3}$. Has duas fractiones more numerorum coniungo, multiplicando denominatorem in denominatorem, scilicet 147 rem in rem et 3. proveniunt census | et 3 res, denominator. Post numeratorem prime in denominatorem secunde et numeratorem secunde in denominatorem prime, et simul addite faciunt 22 res et 45. Ergo ex 5 coniunctione harum fractionum exit fractio, scilicet $\frac{32 \text{ res et } 45}{1 \text{ census et } 3 \text{ res}}$. Fractio valet ex supposicione questionis tantum, quantum 7 fl. Ergo diuidendo numeratorem per denominatorem debent exire 7, quare e converso multiplicando denominatorem per 7 illud, quod exit, necessario equale erit numeratori. Ideo sequitur, ut 7 census et 21 res sunt equales 32 rebus 10 et 45. Auffero utrobique 21 res, erit per communem conceptionem, quod 7 census equales fient 11 rebus et 45. Igitur 1 census equale erit $\frac{11}{7}$ rei et cum hoc $\frac{45}{7}$ additis. Ecce es in sexta regula, quando census equatur rebus et numero. Age igitur secundum eam, mediando rem, mediatum in se multiplicando, et sibi numerum coniungendo, et producti radicem ex- 15 trahendo, et huic radici medietatem rerum addendo, et habebis valorem rei. Sic illud facio. Medio $\frac{11}{7}$, sunt $\frac{11}{14}$; duco hoc mediatum in se, veniunt $\frac{121}{196}$; huic coniungo $\frac{45}{7}$, proveniunt $\frac{1381}{196}$; huius aggregati debeo inquirere radicem quadratam. Sed quia hec fractio, quamquam denominator sit numerus quadratus, tamen ipsa non est fractio quadrata, propterea quod numerator 20 147′ eius est numerus | non quadratus, igitur impossibile est imperativum te invenire eius radicem. Quamcumque radicem propinquam mihi assignabis, ego semper assignabo adhuc viciniorem numerum radici eius vere. Ergo dico, quod emptio talis, ut proponitur, est impossibile et falsa, cum ea in nulli numero fieri possit. Sed si sic posuisses, diuide 15 per aliquam 25 quantitatem, iterum diuide 17 per aliam quantitatem, que priorem divisorem excedit in ternario, et coniunge quocientes, et aggregatum ex eis faciat 7. Dic mihi hos diuisores (*Nota*. Non sum adeo iners, quod illud

---

6. Hier ist einer der oben vorausgesagten allgemeinen Brüche. 23 u. ff. Hier ist es interessant zu sehen, wie der Verfasser gut zu unterscheiden weiss zwischen angewandten Aufgaben und Aufgaben in reinen Zahlen. Während hier die gegebene Aufgabe, da irrazionale Wurzeln erscheinen, so wie sie gegeben ist, nicht gelöst werden kann, jedenfalls aber nicht absolut genau, lässt die zweite eine präcise Lösung zu. Der Verfasser bezieht sich hier und später auf das 10. Buch des Euklid von den Irrazionalen Grössen und zeigt sich mit demselben recht wohl vertraut. Für die damalige Zeit ein sehr gutes Zeugnis für denselben. Ob er jedoch im Stande gewesen wäre, die von ihm verlangte Probe wirklich durchzuführen, möchte ich doch bezweifeln.

te effectum dabo). facio opus, ut prius, et quando venio ad hoc aggregatum $\frac{1381}{196}$, huius debeo extrahere radicem. Sed ea non potest precisius et verius nominari quam radix de $\frac{1381}{196}$. Huic radici addo medietatem rerum, scilicet $\frac{11}{14}$, et proueniet radix de $\frac{1381}{196}$ huic radici adiunctis $\frac{11}{14}$.
5 Dico ergo, quod prima quantitas diuisoris est radix de $\frac{1381}{196}$ et $\frac{11}{14}$, et quia quantitas secundi divisoris est hac in ternario maiore, ideo secundus diuisor fiet radix de $\frac{1381}{196}$ additis $\frac{53}{14}$. Iam habes quesitas quantitates. Sed sunt binomina, uno enim nomine est eas impossibile ex|plicari, et sunt linee 148 irracionales et incommunicantes cum 15 et 17 numeris propositis. Si
10 legisti decimum librum Euclidis, ubi de hiis lineis irracionalibus agit, facilius intelliges. Quod si autem probare voles et ostendere tantum factum esse, pone quocientes in diuisione, ut fieri solet more fractionum, ut hic

$$\frac{15}{\frac{11}{14}\text{ et radix de }\frac{1381}{196}},\qquad \frac{17}{\frac{53}{14}\text{ et radix de }\frac{1381}{196}}.$$

prima fractio — secunda fractio

15 Denominatores horum fractionum sunt binomia et ponuntur sub virgula, numeratores sunt racionales et numeri. Si vis eas coniungere, duc denominatorem unum in alium, et quod exit, fac denominatorem aggregati ex eis. item numeratorem prime in denominatorem secunde et e converso numeratorem secunde in denominatorem prime, et coniunge hec aggregata
20 pro numeratore aggregati. Et si recte fecisti, denominator precise septies continebitur in numeratore, quare recte actum convinces. Item si vero hec practica de binomiis et numeris surdis uni non sit cognita, ille frustra agitur.

Ecce quanta | diuersitas in proposicione questionis. Cum enim idem 148′
25 modus practice sit in utrisque, tamen primum est impossibile, aliud possibile, proptera quod emptio humana non fit, nisi numero et quantitate distincta. Nemo enim vendet tibi aliquid pro radice de decem, cum ea non sit numerus, neque in numero, et si eciam ad infinitas fractiones distenderes, nunquam tamen radicem de illo numero comprehendes, sed
30 quantitate continua comprendere potest. Ergo primum dixi impossibile, secundum autem possibile, quia illud in quantitatibus surdis quidem fieri potest. licet enim mercator querens multiplicitate fractionis ad vicinam accedit adeo eciam, ut in una millesima parte assis non esset, tum illud precisioni non sufficit. Quando igitur partitum proponitur, quod
35 in numero comprehendi non potest, ego dico, ipsum mercatoribus esse impossibile, qui unitatibus omnes suas merces dimeciuntur non radicibus surdis! —

Surdus numerus non est numerus. Nam numerus est, quam unitas mensurat, et illa ad primam questionem. — Tamen quantum grosso calculatori sufficiet, et prope verum quereret non ipsum verum precisum, satis esset dicere in numero: De casiofoliis emit pro uno floreno libras 6 et $\frac{3}{7}$ vnius ℔ et modicum plus, | et illud modicum plus non potest certo numero dici; et de zinzibere pro 1 fl emit 3 ℔ et $\frac{3}{7}$ unius ℔ et eciam modicum plus, quod eciam certo numero dici non potest.

Sed ego taliter non appercio solucionem, quia non capit precisionem et puram veritatem. Quantumcumque enim vicine accedas ad verum duos tales numeros assignando, ego adhuc magis vicinius in millecupto accedere possum, et sic sine statu. Et hoc faciunt nostra binomia. Ideo non potest precisius dici quam in surdo, ut superius dixi. Sed hoc tamen pro doctis et non pro mercatoribus, qui quia grossi sunt, subtilem numerorum racionem comprehendere nequeant. contenti enim sunt tantum numerare, quantum numero florenorum suorum ostenditur. Sed nobis, qui florenis caremus, et qui diviciis non impedimur, attingimus racione nostra eciam illud, quod mercatori est impossibile. fui prolixior, quam institueram.

Secunda questio.

Unus concedit alteri 20 fl. ad duos annos pro lucro et lucri lucro. tandem restituit sibi in fine secundi anni 30 fl capitale et omnem lucrum et lucri lucrum. Queritur de lucro primi anni, similiter quantum 20 fl et | lucrum primi anni pro secundo anno lucri fecerunt.

Pono, quod lucrum primi anni sit una res, et quia lucrum est proporcionale semper, ideo dico: 20 fl lucrantur 1 rem, quid lucrantur 20 fl et una res? Duco 1 rem in 20 fl et rem, exierunt 20 res et census. hoc diuido per 20, venit 1 res et $\frac{1}{20}$ census, et tantum erit lucrum anni secundi. Coniungo hec, et erunt 20 fl et 2 res et $\frac{1}{20}$ census. hec sunt equales 30 fl. Auffero utrobique 20 fl, quare 2 res et $\frac{1}{20}$ census equales erunt 10 florenis. Multiplico unum quodque per 20 et erunt 40 res et unus census equales 200 fl. Ecce census et 40 res equantur 200 fl. Iam

---

1—7. Die Wurzel aus $\frac{1381}{196}$ ist hier gleich $\frac{37}{14}$ gesetzt, also nur die Ganzen des Zählers berücksichtigt. Bei einer spätern Gelegenheit zeigt der Verfasser dieses Commentars, dass er wirklich, wie er sagt, die Wurzel *vicinius in millecuplo* zu finden im Stande ist. 18 u. ff. Auch diese Aufgabe ist schon oben Seite 54, Zeile 8—26 genau wie hier abgehandelt worden. Es ist die *regula lucri* WIDMANNS.

es in quarta regula *Algebre Arabis*. Medio res, sunt 20; duco in se, sunt 400; iungo sibi numerum, fiunt 600; huius debeo extrahere radicem. quia autem non habet in numero, ideo quoque dico, numquam accidere soli re in mutuis precise, ut casus ponit. Tamen ego satisfaciam racioni
5 vestre regule. radix, que queritur, est radix de 600. Ab hac aufero medietatem rerum, scilicet 20, remanet radix de 600 demptis mihi 20. Ecce hic vocatur ab Euclide | unum ex residuis. Sunt enim quedam linee 150 irracionales, quas vocat residua binomiarum. binomia namque sunt cum
9 additis, residua vere cum diminutis. Est ergo lucrum primi anni radix de 600 diminutis tamen 20. Sed lucrum tocius secundi anni est difficilioris invencionis sic. Quia inquirendo positum fuit lucrum tocius secundi anni esse 1 rem et $\frac{1}{20}$ census, res autem iam inventa est esse radix de 600 diminutis 20, hanc in se multiplico, veniunt 1000 minus 40 radicibus de 600, et tantus est census rei. Nunc eius vicesima pars est 50 diminutis tamen
15 duobus radicibus de 600. habeo ergo quod lucrum pro secundo anno totale fuit aggregatum ex radice de 600 diminutis 20 et ex 50 diminutis duabus radicibus de 600. hec autem simul addita faciunt 30 diminuta radice de 600. Dico ergo, quod lucrum secundi anni est 30 diminuta radice de 600. Potuit tum facilius id sic reperiri, postquam certus fuisti de lucro primi
20 anni, scilicet radice de 600 diminutis 20, et lucrum amborum annorum simul fuit 10. Ergo lucrum secundi anni fuit residuum de 10, scilicet quod manet ablatis ab eis radice | de 600 diminutis 20. Et cum hoc facies, 150′ manent 30 diminuta radice de 600.

Hic disce residuum in se multiplicare.

Hic disce duo residua coniungere.

Hic disce residuum subtrahere a numero.

Ad hanc rem et similes operaciones oportet vos scire algorismum
25 de additis et diminutis et artem binomialem. Nec potest hec racio aliter precise reperire, nisi velletis esse contenti in eo, quod est prope verum, ita ut mercatoribus sufficeret, qui unam decimam partem floreni nihil pendunt, qui mihi, si addesset, valde cara esset, et non proicienda in lutum. Possetis dicere, quod lucrum primi anni fuit 4 et $\frac{1}{2}$ modico valde inde
30 dempto; lucrum secundi anni fuit 5 et $\frac{1}{2}$ et aliquid parvulum plus. Tamen quia in numero est illud impossibile attingere, ideo ego maneo apud primam solucionem, que precise est, sola precisio mihi placet, et hec de secunda questione.

---

1. Hier ist die oben schon erwähnte Stelle, an welcher die *algebra Arabis* genannt wird. 28—30. Hier ist die Wurzel aus 600 durch die bekannte Formel $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$ gewonnen worden, welche genau $24\frac{1}{2}$ liefert. Verfasser weiss aber, dass dieselbe um etwas zu gross ist.

Tercia questio.

A habet 100 brachia panni, B quoque 100. A vendit pro uno fl in 5 brachiis plus quam B et venditis pannis in toto habent 20 fl. Queritur, quod ulnas quilibet pro fl dedit.

151 Pono quod A det 1 rem | pro fl, ergo B vendet 1 rem minus 5 pro 5 floreno. Diuido 100 per 1 rem, exit $\frac{100}{1 \text{ res}}$. Iterum diuido 100 per 1 rem demptis 5, exit in quociente $\frac{100}{1 \text{ res demptis } 5}$. Has duas fractiones coniungo more solito, et provenient

$$\frac{200 \text{ res diminutis } 500}{1 \text{ census diminutis } 5 \text{ rebus}}.$$

Hoc valet 20 florenos. Quare denominator ductus in 20 facit 20 census 10 diminutis 100 rebus. Hoc necessario equale erit numeratori, scilicet 200 rebus diminutis 500. Quare utrique parti additis 100 rebus et 500 proveniunt 20 census et 500 equales 300 rebus. Ex quo sequitur, ut unus census et 25 sunt equales 15 rebus. Ecce iam es productus ad regulam quintam Algebre. Medio res, sunt $\frac{15}{2}$; duco in se, faciunt $\frac{225}{4}$; ex hiis 15 minuo 25 numeri, remanent $\frac{125}{4}$. horum radix est surda. eam minuo ex medietate rerum, vel secum addo. si minuo remanent $\frac{15}{2}$ minus radice de $\frac{125}{4}$; si addo, provenient $\frac{15}{2}$ et radix de $\frac{125}{4}$. Et quia hic non potest processus fieri secundum viam diminucionis, igitur necessarium est, quod fiat secundum 151′ viam addicionis. | Nam quinta regula Algebre hanc habet ex natura sue 20 demonstracionis libertatem et hoc privilegium. Dico ergo, quod in viis mercanciorum numquam fieri soleat sic, ut proponitur in questione. Tamen quia brachia seu ulne sunt in continuo, possibile est ita, ut proponitur, fieri, sed non a mercatoribus, qui geometrie indocti sunt, verum a geometricis peritis. Nam dico, quod A vendit pro uno fl $7\frac{1}{2}$ brachia et cum hoc 25 radicem de $31\frac{1}{4}$; B autem vendit pro uno floreno $2\frac{1}{2}$ brachia et cum hoc radicem de $31\frac{1}{4}$. Et quia hic radix, que ultra numerum est, est surda, in

---

1 bis S. 64 Z. 21. Diese Aufgabe ist schon Seite 56, Zeile 7 u. ff. dagewesen. Während hier die 5. Regel in Anwendung gebracht wird, war dort durch die 6. die Lösung gewonnen. 16–21. Unser Verfasser weiss also zunächst, dass bei der 5. Regel zwei verschiedene Werthe erscheinen können. Wenn er nun hier sagt, dass bei dem vorliegenden Beispiele nur das Pluszeichen benutzt werden könne, so hat das darin seinen Grund, dass bei Benutzung der Subtraction für *B* der negative Werth $\frac{5(2-\sqrt{5})}{2}$ sich ergeben würde. Das ist also der Grund, weshalb der Verfasser hier behauptet, nur die Addition gebe einen möglichen Werth.

perpetuum in numeris non invenies hanc racionem precisam. Verum mercator quandoque contentus in vicina racione, ubi precisa ab eo habere non potest; quero igitur radicem aliquam, que sit vicina ad radicem de $31\frac{1}{4}$, et sum contentus in 5 et $\frac{3}{5}$, licet adhuc vicinior daretur. Huc addo numero, 5 scilicet $\frac{15}{2}$, qui erat medietas rerum, et proveniunt $13\frac{1}{10}$. Tantum fere vendit primus, scilicet A pro uno floreno; B autem vendit 8 et $\frac{1}{10}$ fere pro vno fl. Si 100 diuiseris per unamquamque horum et coniunges | quo- 152 cientes non deficiet tibi $\frac{1}{10}$ unius, quod habebis 20. Sed ille defectus consurgit propterea, quod $5\frac{3}{5}$ sunt modico plus quam radix de $\frac{125}{4}$. Item si dico, 10 quod A vendit pro floreno uno 13 et $\frac{1}{11}$, et B vendit pro fl uno $8\frac{1}{11}$, iam iterum duos numeros vere dixi. Nam diuidendo 100 per $13\frac{1}{11}$ exeunt $7\frac{23}{36}$, et si diuido 100 per $8\frac{1}{11}$, exeunt $12\frac{32}{89}$. Si iungo $7\frac{23}{36}$ cum $12\frac{32}{89}$, consurgunt $19\frac{3199}{3204}$. Ecce deficiunt solum $\frac{5}{3204}$. Sic quidquid dictis in talibus partitis, ubi in surdis operi fieri oportet, si eorum numerum aliquem, in 15 quacumque eciam fractione, adhuc potest precisius dari, quod minus erretur.

Potuisset eciam hec questio perducta fuisse ad regulam sextam, si posuisses, quod B vendidisset 1 rem pro floreno, et A vendidisset 1 rem pro fl et 5, sid in idem venisset finaliter. Habetur ergo in illis tribus questionibus, quod numquam in numero potest satisfieri, sed solum in 20 surdo, et qui in surdis atque additis et diminutis et binomiis et residuis et lineis ceteris irracionalibus agere nescit, nihil in Arismetrica egregii nouit.

| *Questio quarta.* 152'

Nota. Quidam dominus diues habet 4 bursas denariorum, in unaquaque tantum quantum in alia de denariis, quos vult distri-

---

2 u. ff. Die erste Wurzel von $\frac{125}{4}$ ist gefunden, indem Zähler und Nenner des Bruches mit 25 multiplicirt sind. Für $\sqrt{3125}$ ist dann der um etwas zu grosse Werth 56 gesetzt worden, wodurch näherungsweise $\sqrt{\frac{125}{4}} = 5\frac{3}{5}$ sich findet. Der zweite Werth ist in ähnlicher Weise dadurch entstanden, dass $\frac{125}{4}$ mit 121 erweitert wurde. Die $\sqrt{15125}$ ist dann gleich 123, um eine Kleinigkeit zu gross, angenommen, und daraus für $\sqrt{\frac{125}{4}}$ der Werth $5\frac{13}{22}$ gewonnen, welcher zu $7\frac{1}{2}$ addirt $13\frac{1}{11}$ ergiebt. Hier hat der Verfasser das oben gegebene Versprechen, die Lösung *vicinius in millecuplo* zu geben, gehalten. Die Probe giebt einen noch nicht um 0,0016 zu kleinen Werth. 22 bis S. 67 Z. 12. Hier kommen wir mit einem Male in unbestimmte Aufgaben. Wie der Verfasser richtig die Aufgabe in Zahlen fasst, handelt es sich um die gleichzeitige Lösung der Gleichungen

$$43x + 41 = 39y + 33 = 35z + 25 = 31n + 17,$$

buere in viam eleosine quatuor ordinibus scilicet czeilen(!) pauperum. In primo ordine pauperum sunt 43 pauperes, in secundo sunt 39 pauperes, in tercio sunt 35 pauperes, in quarto sunt 31 pauperes. Primam bursam distribuit equaliter primo ordini,

---

und er weiss, dass es eine unbegrenzte Zahl verschiedener Lösungen giebt. Eine derselben 5458590 giebt er auch richtig an.

Dass hier eine Anwendung der ta yen Regel der Chinesen vorliegt, ist keinem Zweifel unterworfen. Wie CANTOR, Vorlesungen I, 2. Aufl. 643—44 auseinandersetzt, ist die Aufgabe der Chinesen mit der Regel zu ihrer Auflösung, aber ohne Beweis, in einer griechischen Handschrift, die um das Jahr 1400 entstanden sein muss, aufgefunden worden. Ich will jetzt hier den Beweis führen, dass um die Mitte des 15. Jahrhunderts sie *mit ihrem Beweise* und ohne Benutzung des chinesischen Beispiels eine ganz bekannte Sache war.

In unserer Handschrift befindet sich Blatt 124′—125 ein schon von GERHARDT angegebenes Stück mit der Ueberschrift „*Divinare*". Dieses enthält nun Folgendes:

124′ ‖ *DIVINARE.*

Item ich wil wissen, wie vil pfenning in dem peutel oder im synn hast. Machs also. Hays yn dy d̄n, dy er hat, zelen mit 3, darnach *cum 5, postea cum 7,* vnd alz oft eins vber pleibt mit 3, so merck 70, vnd alz oft 1 vber pleibt mit 5, merk 21, vnd mit 7, merk 15. *Postea adde illos numeros in simul, et ab* 5 *ista summa subtrahe radicem, hoc est multiplica 3 per 5 et 7, erit 105,* alz oft du magst, vnd wz do pleibt, alz vil hat er ym sinn oder in peutel.

Item das exempel get nit hoher, den alz verr dy radix wirt, daz ist auf 105, vnd man sol dar vber nit nemen.

Du fragst war vmb nymbt man 70 auf 3, vnd 21 auf 5 etc^a. Also mags. 10 Wildu haben dy zal auf 3, so multiplicir 5 *per* 7, vnd was kompt, das dividir *per* 3, vnd *manet* 1 v̊ber, so ist dy selb zal recht; pleibt aber mer vber dann 1, so duplir dy selben zal, vnd darnach dividir mit 3, vnd pleibt dan aber mer vber dann 1, so addir dyselben zal. daz thu alz lang, bis 1 vber pleibt. Desgleichen 125 wiltu haben | dy zal auf 5, so multiplicir 3 per 7, wirt 21, daz dividir per 5, so 15 pleibt 1 vber, dar vmb ist 21 recht auf 5, vnd wildu dy zal haben auf 7, *multiplica 3 per 5, erit 15; illud divide per 7, manet in residuo 1, ideo 15 est verus numerus super 7,* dezglichen dy andern:

70	21	15	15	10	6	40	45	36	28	21	36	21	28	36	63	36	28
3	5	7	2	3	5	3	4	5	3	4	7	2	3	7	2	7	9
	105			30			60			84			42			126	

20

128	175	120	216	225	280	1144	936	1782
5	6	7	5	8	9	9	11	13
	210			360			1287	

Hier ist also die reine Regel ohne jede Anwendung auf eine specielle Zahl gegeben; es ist gezeigt, dass es nicht nur diesen einen Weg des Errathens der Zahl giebt, und es ist jedem der Weg gewiesen, auf welchem er für jede beliebige Combination von drei Zahlen sowohl die Hülfszahlen als die Radices finden kann. Eine ziemliche Zahl berechneter Regeln sind beigegeben. Unser Verfasser muss,

in fine tamen remanent sibi 41, ita quod ad complendum ordinem deficiunt sibi 2 denarii. Secundam bursam distribuit equaliter secundo ordini, in fine tamen non potest complere, sed habet in residuo 33, sicque ad complendum ordinem deficiunt ei 6 denarii.

---

das wird mir jeder zugeben, einen völlig klaren Einblick in das Problem gehabt haben, sonst würde er sich mit der einfachen Wiedergabe des bekannten chinesischen Beispieles begnügt haben.

Es ist aber noch eine zweite Stelle in der Handschrift vorhanden, an welcher einzig und allein so vorgegangen wird, wie ich von jemandem es angenommen habe, der kein Verständnis für das Wesen des Problems besitzt. Sie befindet sich auf Blatt 38′—39 und lautet:

| Item. Nym fur dich ein zal wy vil du wilt, dy wil ich vinden mit raytung. 38′, Ich nym fur mich 17. *Divide primo per 3 et manent 2, illa duo multiplica per 70, erit 140. Secundo divide per 5, et manent duo. Illa 2 per 21 multiplica, erit 42. Tercio divide per 7, manent 3; illa 3 multiplica per 15, erit 45. Illa omnia adde* 5 *simul, scilicet 140, 42, 45, facit 227. Nunc considera bene, quando summa plus est quam 106, tunc debes subtrahere 210; illa est prima regula posicionis vera; et iterum considera bene quando minus esset summa quam 106, tunc debes subtrahere 105; ista est secunda regula posicionis, et dicitur regula falsa.* | Und mit der regel 39 posicionis vera et falsa mag man vinden mancherlay raytung.

10
$$\begin{matrix} 70 \cdot 21 \cdot 15 \cdot \\ 3 \cdot \ 4 \cdot \ 5 \cdot \end{matrix} > 105 \text{ vel } 210.$$

Dass derjenige, welcher dieses verfasst hat, keinen klaren Begriff dessen hatte, was er beschrieb, ist offenbar. Die Thatsache jedoch, dass ein ganz anderer wenigstens die Regel kennt, wie sie von den Chinesen aufgestellt und für die zu findende Zahl 39 auseinandergesetzt war, zeigt, dass sie weiter bekannt gewesen sein muss.

Ein weiterer Beweis ist der, dass Regiomontanus in seinen Briefen Aufgaben stellt, welche ebenfalls durch die Ta yen Regel gelöst sein dürften. Bei Cantor, Vorlesungen II, 262—263 sind die beiden Aufgaben desselben mitgetheilt:

$$\begin{aligned} 17x + 15 &= 13y + 11 = 10z + 3, \\ 23x + 12 &= 17y + \ \ 7 = 10z + 3; \end{aligned}$$

und Bianchini giebt für die erste die beiden Lösungen 1103 und 3313. Dass sowohl Regiomontan als Bianchini ihre Lösungen nach Art der Ta yen Regel gefunden haben, ist mehr als wahrscheinlich. Nach Art des ersten Verfassers würden die Schemata für die Lösung so aussehen:

$$\begin{matrix} 1820 \cdot 170 \cdot 221 \\ 17 \ \cdot \ 13 \ \cdot \ 10 \\ 2210 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 3060 \cdot 460 \cdot 391 \\ 23 \ \cdot \ 17 \ \cdot \ 10 \\ 3910 \end{matrix}$$

und nach der Ta yen Regel würde man für die erste zu berechnen haben:

$$15 \cdot 1820 + 11 \cdot 170 + 3 \cdot 221 = 27300 + 1870 + 663 = 29833.$$

Die Division durch 2210 giebt den Rest 1103 und die allgemeine Lösung ist $t = 1103 + 2210n$.

Terciam bursam distribuit equaliter tercio ordini, in fine tamen remanent sibi 25, sicque ad complendum ordinem deficiunt ei 10 denarii. Quartam bursam distribuit quarto ordini equaliter, in fine tamen est residuum 17 denarionum, sicque ei 14 denarii deficiunt ad complendum ordinem. Queritur nunc, quot fuerunt 5 denarii in una bursa?

In summa questio habet hoc: Invenias unum numerum, qui dum dividitur per 43, post integra quocientis manent in residuo 41; item dum diuiditur per 39, manent in residuo 33; item dum diuiditur per 35, manent in 153 residuo | 25; item dum diuiditur per 31, in residuo manent 17. licet autem 10 non sit solum unus numerus, qui talis est, verum infiniti sunt signabiles. 5458590.

Für die zweite Aufgabe hätte man zu finden:

$$12 \cdot 3060 + 7 \cdot 460 + 3 \cdot 391 = 36720 + 3220 + 1173 = 41113.$$

Die Division durch 3910 giebt den Rest 2013 und die allgemeine Lösung $t = 2013 + 3910n$.

Gehen wir nun an das uns hier vorliegende Problem mit 4 Gleichheiten über. Es soll also das System aufgelöst werden

$$43x + 41 = 39y + 33 = 35z + 25 = 31n + 17.$$

Wir gehen genau so vor, wie es bei drei Gleichungen gelehrt ist, dann erhalten wir das Schema

$$\begin{array}{ccccccc} 1227135 & \cdot & 1492960 & \cdot & 155961 & \cdot & 763035 \\ 43 & \cdot & 39 & \cdot & 35 & \cdot & 31 \\ & & & 1819545. & & & \end{array}$$

Dann heisst die Ta yen Regel: Für 1 durch 43 gewonnen setze 1227135; für 1 durch 39 gewonnen setze 1492960; für 1 durch 35 gewonnen setze 155961; für 1 durch 31 gewonnen setze 763035, addire die Producte und dividire die Summe durch 1819545, der Rest der Division ist die gesuchte Zahl.

Es ist

$$\begin{array}{rcl} 41 \cdot 1227135 &=& 50312535 \\ 33 \cdot 1492960 &=& 49267680 \\ 25 \cdot 155961 &=& 3899025 \\ 17 \cdot 763035 &=& 12971595 \\ \hline \end{array}$$

die Summe also gleich 116450835, und der Rest der Division durch 1819545 giebt 1819500, die allgemeine Lösung ist daher $1819500 + 1819545n$. Für $n = 2$ ergiebt sich der von dem Verfasser angegebene Werth 5458590.

Dass wir berechtigt sind, die Auflösung als in dieser Weise erfolgt anzunehmen, ergiebt sich daraus, dass spätere Rechenlehrer wie Rudolf, Koebel und Simon Jacob die Erweiterung auf 4 gleichzeitige Gleichungen lehren, ohne jedoch anzugeben, wie sie die für bestimmte Zahlen mitgetheilten Hülfszahlen gefunden haben.

Ob bei allen obigen Untersuchungen Entlehnung aus China als sicher anzunehmen ist, möchte ich doch bezweifeln. Jedenfalls ist die Darstellung des

VI.

De regulis per algebram etc., ut supra dictum est.

Circa primam regulam. Quidam habuit laboratores et pecunias. si cuilibet laboratori dedit 5, habundat in 30; si vero daret cuilibet 7, deficiet in 30. Queritur, quot sunt laboratores.

Sit numerus istorum 1 ꝶ, et fiunt primo 5 ꝶ et 30, fiet secundo 7 ꝶ minus 30 equande 5 ꝶ et 30

2 ꝶ equande 60, venit ꝶ 30.

Circa secundam. Quidam conventus est ad laborandum per 28 dies. die laboris 5 habet, die vacacionis restituet 3; in fine nullum lucrum habuit. quot dies laboravit?

Sunt hic 1 ꝶ | erunt 5 ꝶ
28 minus 1 ꝶ | erunt 84 minus 3 ꝶ equande 5 ꝶ

84 equande 8 ꝶ, proveniet $10\frac{1}{2}$ pro 1 ꝶ.

Sed stante, cum ponatur, quod retinebit 4, tunc remoue de 84 minus 3 ꝶ 4, que equande, ut supra.

Circa terciam. Quidam dixit si haberem adhuc tot et $\frac{1}{2}$ eius, quod habeo, et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ et 1, haberem 191.

Habuit 1 ꝶ | 2 ꝶ | 3 ꝶ $\frac{1}{12}$ ꝶ et 1 equande 191.

3 ꝶ $\frac{1}{12}$ equande 190, proveniet 1 ꝶ $61\frac{23}{27}$,
2 ꝶ $61\frac{23}{27}$,
$\frac{1}{2}$ ꝶ $30\frac{30}{37}$,
$\frac{1}{3}$ ꝶ $20\frac{20}{37}$,
$\frac{1}{4}$ ꝶ $15\frac{15}{37}$.
1

---

deutschen Verfassers absolut klar, und muss von jedem auch ihre Begründung verstanden werden.

Am Schlusse dieser schon überhaupt etwas langen Anmerkung möchte ich noch darauf hinweisen, dass die erste Aufgabe des Regiomontan, welche verlangt $x + y + z = 240$; $97x + 56y + 3z = 16047$ in ganzen Zahlen zu lösen, ganz derjenigen analog ist, welche Seite 48, Zeile 24—29 abgehandelt ist, und für welche zwei Lösungen angegeben sind. Dass man auf diese Art der Aufgaben durch die *Regula coeci* geführt ist, dürfte wohl von selbst einleuchten.

1 u. ff. Für die folgenden unter dem Titel „*De regulis per algebram*" zusammengestellten Aufgaben über Gleichungen des ersten Grades, denn nur solche werden betrachtet, ist die wirkliche gleichungsmässige Anordnung der Lösung besonders hervorzuheben. Es wäre nur nöthig, ihre Zeichen durch die jetzt gebräuchlichen zu ersetzen, um ganz moderne Bilder zu erhalten.

54 | *Circa quartam.* Quidam habet 60 mensuras, dat theolenario 2 mensuras et recipit 2 ß. Alter habet 120 mensuras, dat 2 mensuras et 5 solidas, queritur de valore mensure.

Valor sit 1 ꝛe | 2 ꝛe minus 2 ₰ vel ß

Alter 2 ꝛe 5 sol. vel ₰. hoc debet equari duplo primi

4 ꝛe minus 4 | 2 ꝛe 5

2 ꝛe equande 9

proveniet 1 ꝛe $4\frac{1}{2}$.

Circa quintam regulam siue questionem. Quidam habet pecunias. petit a socio suo 1 ₰, et erit ei equalis. Alter petit 1, et erit ei duplus.

Ponatur, quod totum hoc, quod habent sit 1 ꝛe. Primus igitur habet $\frac{1}{2}$ ꝛe minus 1 ₰, et secundus habet $\frac{1}{2}$ ꝛe et 1 ₰. Si igitur primus daret 1 ₰ secundo, primus haberet $\frac{1}{2}$ ꝛe minus 2, et secundus haberet $\frac{1}{2}$ ꝛe et 2, que deberent equari duplo primi, quod est 1 ꝛe minus 4

1 ꝛe minus 4 equatur $\frac{1}{2}$ ꝛe et 2

$\frac{1}{2}$ ꝛe equanda 6, proveniet ergo ꝛe 12.

Primus igitur habet 5, secundus 7.

Ad idem. *a, b, c.* *A* petit 1 de *b*, eritque ei equalis; *b* petit de *c* 1, eritque duplus ipsi *c*; *c* petit de *a* 1, eritque ei, scilicet *a*, triplus.

Ponatur, quod primus habet 1 ꝛe, oportet ergo, quod secundus habet 1 ꝛe et 2, oportet eciam, quod tercius habet $\frac{1}{2}$ ꝛe et $2\frac{1}{2}$. Qui si primo daret 1, haberet $\frac{1}{2}$ ꝛe et $3\frac{1}{2}$ tercius, et primus retineret 1 ꝛe minus 1, cuius triplo, scilicet 3 ꝛe minus 3, debet equari

3 ꝛe minus 3 | $\frac{1}{2}$ ꝛe $3\frac{1}{2}$

$2\frac{1}{2}$ ꝛe | $6\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}$ ꝛe equande $\frac{13}{2}$

provenit 1 ꝛe $2\frac{3}{5}$ primus,

habet secundus $4\frac{3}{5}$

tercius $3\frac{4}{5}$.

54' | *Ad idem.* A petit de *b* 1, et erunt equales; petit *b* de *a* 1, et erit ei millecuplus.

1—8. Eine ähnliche Aufgabe ist oben bei der *regula falsi* behandelt worden. (Seite 42, *Quarta questio.*) 32 bis S. 70, Z. 6. Auf diese Lösung der Aufgabe haben wir schon oben hingewiesen. (Seite 43, *Quinta questio.*)

Ponatur, quod *A* habet 1 ꝛe, ergo *b* habet eciam 1 ꝛe et 2 ₰

1 ꝛe minus 1 | 1 ꝛe et 3

100 ꝛe minus 1000 equande 1 ꝛe et 3

999 ꝛe | 1003.

Pro *A* igitur est 1 ꝛe $1\frac{4}{999}$

pro *b* $3\frac{4}{999}$.

Circa sextam regulam. Quidam habet pannos 3 emptos 100 solidis, secundus in duplo et 5 sol., et tercius in triplo ad ambobus et 5 sol.

Valor primi 1 ꝛe | 2 ꝛe 5 sol. | 9 ꝛe 20 sol.

12 ꝛe 25 sol. equande 100 sol. | 12 ꝛe equantur 75

una res $6\frac{1}{4}$ primus | secundus $17\frac{1}{2}$ | tercius 76 ß $\frac{1}{4}$.

Circa septimam regulam. *A* petit de *b* $\frac{1}{2}$, et habebit *a* 100; *b* de *c* $\frac{1}{3}$, et habebit 100; *c* de *a* $\frac{1}{4}$ et habebit 100. queritur de *a*, quantum habet et de *b* et de *c*.

1 ꝛe pro omnibus.

VII.

Item una regula super primum capitulum delacose.

Item sint 3 socii, volunt emere equum pro 100 fl. dicit primus ad secundum, haberem $\frac{1}{2}$ de tuis fl ad meos fl, tunc ego solverem equum pro 100 fl; dicit secundus ad tercium, haberem $\frac{1}{3}$ de tua pecunia ad meam, tunc ego solverem equum pro 100 fl; dicit tercius ad primum, haberem $\frac{1}{4}$ etc[a]. Queritur, quot quilibet habet secum pecunie.

Recipiam, quod primus habet 1 ding, tunc oportet secundus habere 200 minus 2 ding. Nunc vide, quot tertius oportet habere, wann er $\frac{1}{3}$ seins gelcz dem ander gibt, vnd daz dem andern 100 fl pleiben, so musz der drit 6 ding minner 300 haben. $\frac{1}{3}$ von 6 ∂ minner 300 ist 2 ding minner 100. Gib dem andren der hat 200 minder 2 ∂, so pleibt im 100. Nu spricht der drit zu dem ersten, het $\frac{1}{4}$ deins gelcz, so kauft ich daz

13—16. Die Lösung dieser Aufgabe kommt in der folgenden Abhandlung ausführlich zur Darstellung. 17 u. ff. Hier kommt wieder die Sprachmengerei zum Vorschein, welche eine Eigenthümlichkeit derjenigen Theile unserer Handschrift ist, welche den Frater Fridericus selbst zum Verfasser zu haben scheinen. Das erste Beispiel ist mit dem vorhergehenden identisch.

pferd pro 100 fl. Nu nym $\frac{1}{4}$ von dem ersten, der hat 1 ∂, daz wår $\frac{1}{4}$ ∂ dem dritten, so her nu $6\frac{1}{4}$ ∂ minner 300, vnd daz ist 100 gleich, wann er auch sol 100 fl haben. Nu mach ein yeden tail gleich, gib 300 wider czw, der minner hat, pleibt $6\frac{1}{4}$ ∂. Nu gib auch czw dem andern tail 300, macht 400, daz ist gleich $6\frac{1}{4}$ ∂. Nu tail 400 in $6\frac{1}{4}$ ∂, kumpt 64, vnd alz vil ist daz ding wert. Der erst 1 ∂, so hat er 64 fl, der ander 72 fl, der drit 84 fl. Nu merck war vmb der ander 72 hab vnd der drit 84. Wann dem andern haben wir geseczt, daz er hab 200 mynner derselben 155′ 2 ∂. 1 ∂ ist 64, alz der erst hat, | so ist 2 ding 2 mol 64, daz wår 128. zeuch ab 128 von 200, pleibt 72, vnd also sol der ander 72 haben. Nu het der drit 6 ∂ minner 300. 6 ∂ ist 6 mal 64, daz macht 384. zeuch ab 300, nun so pleibt ym 84 fl.

Der erst 1 ding	
der ander 200 minner 2 ∂	$6\frac{1}{4}$ ∂ minner 300
der drit 6 ∂ minner 300	gelich dem 100
$6\frac{1}{4}$ ∂ minner 300	$6\frac{1}{4}$ ∂ gelich 400.

Vis tu probare, proba sic. der erst der $\frac{1}{2}$ des gelcz des andern hat. Nu nym $\frac{1}{2}$ de 72 fl, quod habet secundus, hoc est 36. adde 36 ad 64, quod primus habet, tunc erit 100 fl. Nunc dicit secundus ad tercium, haberem $\frac{1}{3}$ tue pecunie ad meam, tunc haberem 100 fl. Accipe $\frac{1}{3}$ de 84, quod tercius habet, hoc est 28, ad pecuniam, quod habet secundus, id est 72 et 28, et est eciam 100. Nunc tercius postulat $\frac{1}{4}$ de primo socio, ideo accipe $\frac{1}{4}$ de pecunia primi socii, hoc est 64, hoc est 16, et illud adde ad 84, productum est eciam 100 fl.

Iterum una regula de primo capitulo lacose.

Item sunt 3 socii. illi habent pecuniam. dicit primus ad alios duos, haberem ego 7 fl de vestris, tunc ego haberem in triplo tantum sicut vos; dicit secundus haberem 9 fl etc[a], tunc in quadruplo plus haberem; dicit tercius, haberem 11 fl etc[a], tunc in quintuplo plus etc[a]. Nunc quero, in quantum unus habuit.

Fac sic, sit quot isti tres socii habent 1 ∂. Nu spricht der erst, het ich 7 fl eurs gelcz, so het ich 3 mal mer dann ir ped, darvmb sprich daz der erst hat $\frac{3}{4}$ ∂ minner 7. Wann alle 3 haben ain ding, so het der

---

2. Hier hat *wann* ebenfalls die Bedeutung *weil*, wie in der Gerhardtschen Algebra. 25 u. ff. Siehe oben Seite 58: *De capitulo primo.*

erst, wann er 7 mer het, so het er 3 mal mer, darvmb secz ich daz er hab $\frac{3}{4}$ ∂ mynner 7. Der ander spricht, hiet ich 9, so hiet ich 4 mal mer dan ir paid, dar vmb secz ich, daz der ander hab $\frac{4}{5}$ mynner 9. So spricht der dritt, het 11, so het ich 5 mal mer dann ir paid, dar vmb sprech ich,
5 daz der drit hab $\frac{5}{6}$ mynner 11. Dar vmb secz also: der erst hat $\frac{3}{4}$ ∂ mynner 7, der ander $\frac{4}{5}$ ∂ mynner 9, der drit $\frac{5}{6}$ ∂ mynner 11. Nu sumirs zu sam allz, daz trift 2 ∂ $\frac{23}{60}$ mynner 27, daz ist 1 ding gleich, daz all drey haben vor gehabt. Nu gib 27 dem, der mynner hat, so pleibt 2 ∂ $\frac{23}{60}$; gib dem andern auch 27, so pleibt 1 ∂ mer 27 gleich 2 ∂ $\frac{23}{60}$. zeuch ab 1 ∂
10 von 2 ∂ $\frac{23}{60}$, so pleibt 1 ∂ $\frac{23}{60}$, zu dem andern tail pleibt 27. Nu tail 27 in 1 ∂ $\frac{23}{60}$, kumpt $19\frac{43}{83}$, vnd alz vil ist daz ding werd (!), alz vil haben sy alle drey mit ein andern $19\frac{43}{83}$. Nu wart, waz iglicher pesunder hat. $\frac{3}{4}$ ∂ mynner 7 von $19\frac{43}{83}$ pleibt $7\frac{43}{83}$, vnd alz vil sol der erst haben. Nu nym $\frac{4}{5}$ ∂ mynner 9 de $19\frac{43}{83}$, so trift $6\frac{51}{83}$, vnd so vil sol der ander
15 haben. Dar nach nym $\frac{5}{6}$ ∂ mynner 11 de $19\frac{43}{83}$, so pleibt $5\frac{23}{83}$, in tantum tercius habet.

1 ∂ $\frac{23}{60} \cdot 27$	1 ∂ $\frac{3}{4}$ mynner 7	$\frac{5}{6}$ mynner 11
gleich 1 ∂ $19\frac{43}{83}$	$\frac{4}{5}$ mynner 9	2 ∂ $\frac{23}{60}$.

| *Regula delacose super quartum capitulum.* 156′

20 Item tres socii dy habent geseczt vnter in 370 fl vnd haben gebunnen 20 fl. Dem ersten trift mer hauptgut vnd gewin 5 fl, dem andern 25 ß, tercio 50 fl. Primus stat 4 menses, secundus 3, tercius 2: in quantum fuit capitalis summa?

Fac sic. Nym, daz daz erst hauptgut sey gewesen 1 ∂; dem andern
25 1 zall, daz pillig sey, nem wir 20, oder waz du wilt; dem driten 50 mynner 1 ∂. Multiplicir 4 man. 4 mal 1 ∂ macht 4 ∂, vnd 2 mal 20 des andern macht 40, vnd 2 mal der trit, hat 50 minder 1 ∂, macht 100 mynner 2 ∂. Nu sumirs zu sam, macht 140 · 2 ∂. Nu sprich 140 · 2 ∂ gibt in 20 fl gewinsz was gibt mir 48. Der erst spricht 4 mal 20 ist
30 80, tails in 140 · 2 dingen, kumpt $\frac{80}{140 \cdot 2\,\partial}$ gewincz, tůs zu sammen zu dem hauptgut, daz waz 1 ding. Multiplicir in kreucz, kummen 220 · 2 censy, daz sol man tailen in dy ander vnter figur, vnd sol 15 kummen. darvmb multiplicir 15 mal 140 · 2 ∂, macht 2100 · 30 ∂, dar von an paiden taillen, so pleibt 190 ∂ vnd 2 censy dem andern 2100 zall. daz ist daz

4 capitel sprechent. so kummet radix von $3306\frac{1}{4}$ mynner $47\frac{1}{2}$, alz vil ist daz hauptgut des ersten, daz ist 10, dez andern 20, des drit 40 etc[a].

1 ∂ 4 · 1 ∂	4	2100
nym 20	40	190 ∂
		15 cosa
2 50 mynner 1 ∂	100 mynner 2 ∂	2100 cense.

5

157 | *Proba cose forte de poma.*

Mach mir dy rechnung, dy gat auch *per la cosa e la molte agraus.* Es sind 2 gesellen, dy haben opfel, vnd hat yglicher 56 ℔. Nu sollen sy dy opfel verkauffen, also wann der 1 gibt 4 ℔ vmb 1 ß, so sol der ander 10 5 ℔ geben, vnd daz der ein albeg 1 ℔ mer gib denn der ander vmb 1 ß, vnd daz sy al paid nit mer lösen ausz den opfel, den 20 ß. Nu frag ich, wye vil ichlicher opfel vmb 1 ß hab geben.

VIII.

34′, 10 5[ta] *regula.* Item 1 z 27 numero ist gleich 12 cosa 15

z[0] vnd 6 numero ist gleich 5 cosa

6[ta] *regula.* Item 1 z ist gleich 6 numero 5 cosa.

IX.

1 (auch eingel. Zettel).

Item 2 z 10 co gleich numero 28.

Item 2 z 3 co gleich 14 numero. 20

Item nym cosa $\frac{16}{4}$· ist 1 z 4 co ist gleich 32 numero.

Item nym cosa $\frac{25}{5}$· ist 1 z 1 co gleich 30 numero.

---

7 u. ff. Verkauft der erste x ℔ für 1ß, so muss der zweite $(x+1)$ ℔ für 1ß verkaufen, es muss also

$$\frac{56}{x} + \frac{56}{x+1} = 20 \text{ sein.}$$

14—22. Diese beiden Aufgaben gehören der angewendeten Bezeichnung nach zu den *Regule delacosa,* ebenso wie die auf Blatt 504 niedergeschriebenen. In moderner Bezeichnung würden sie heissen:

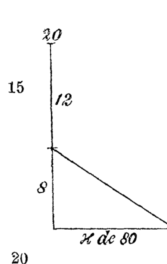
$$x^2 + 27 = 12x;\ x^2 + 6 = 5x;$$
$$x^2 = 5x + 6;$$
$$2x^2 + 10x = 28;$$
$$2x^2 + 3x = 14;$$
$$x^2 + 4x = 32;\ x^2 + x = 30.$$

X.

Nota. Arbor 20 pedum iuxta aquam 6 pedum, queritur, in qua parte 90 *frangatur, ut summitas eius extremitati aque iungatur.*

Illa pars est 1 ℞, alia scilicet remanens est 20 minus 1 ℞. Dico, quod illa pars multiplicata in se producitur census equalis huic, quod aggregatur ex duobus censibus iunctis, quorum unus erit ex 20 minus 1 ℞, et altera ex 6, scilicet 36. 1 ℞ fit 1 census; 20 minus 1 ℞ in se sunt 1 census 400 minus 40 ℞; 6 in se sunt 36. et sunt 1 census 436 minus 40 ℞. $10\frac{9}{10}$ est una pars vel 1 ℞; $9\frac{1}{10}$ est altera pars, scilicet inferior.

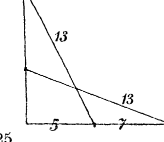
Item arbor 20 pedum frangitur in 8 pedibus a radice; queritur, ad quod se extendit a basi.



Multiplica partem distentam, scilicet 12, in se, erit 144; similiter residuum, scilicet 8, in se, erit 64, que minue 90′ ex 144, et restant 80, unus census, cuius ℞ est quesitum.

Item scala 20 pedum iuxta aquam latitudinis 10 pedum producitur ad murum iuxta aquam: queritur, ad quantam altitudinem se extendit.

Multiplica quodlibet in se, minus a maiore aufferatur, et remanet census, cuius res est quesitum.



Nota scala 13 pedum distans a muro per 5 adhuc retrahitur per 7 pedes, ut sit elongata a basi per 12: queritur, quot descendit in muro.

Primo scias altitudinem muri per precedentem; erit enim 12. Iterum secundo scito altitudine muri etc[a].

1—26. In diesen Aufgaben ist die Benutzung des Zeichens ℞ als Wurzelzeichen recht sehr hervorzuheben.

DIE HANDSCHRIFT No. 14836

DER

KÖNIGL. HOF- UND STAATSBIBLIOTHEK ZU MÜNCHEN.

VON

MAXIMILIAN CURTZE.

Vor einiger Zeit hat Herr Dr. Wappler in Zwickau durch seinen Aufsatz „Bemerkungen zur Rythmomachie“[1]) die Aufmerksamkeit auf den *Codex latinus Monacensis 14 836* hingelenkt, und eine Reihe darin befindlicher Schriften ihren Verfassern zutheilen können, auch zwei derselben, die Abhandlung Hermanns des Lahmen und die des Asilo über die Rythmomachie, in diplomatisch treuem Abdruck veröffentlicht. Durch andere Untersuchungen auf dieselbe Handschrift aufmerksam geworden, liess ich mir dieselbe kommen, und will nun mir im Nachfolgenden erlauben, den reichen Inhalt der wichtigen Handschrift bekannt zu geben, welche viel mehr Sachen enthält, als der Handschriftenkatalog der Münchner Bibliothek verzeichnet.[2])

Wie schon gesagt, befindet sich die fragliche Handschrift in der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München unter der Nummer 14 836. Sie gehörte früher dem Kloster St. Emmeram zu Regensburg, und hatte dort die Bezeichnung *„k. 6“*. Sie besteht aus 160 Pergamentblättern von je 137 mm Höhe und 107 mm Breite. Dieselben sind auf den Vorderseiten von 1—160 foliiert und mit einem Vor- und einem Nachblatt, beide ebenfalls in Pergament, zusammen in einen mit Leder überzogenen Holzdeckel gebunden. Die Gesamtzahl der vorhandenen Blätter beträgt also 162. Es ist noch zu bemerken, dass zwischen den mit 17 und 18 bezeichneten Blättern ein ein Doppelblatt, jedoch von kleinerer Dimension als die übrigen, füllendes Sternverzeichnis mit eingeheftet ist. Die einzelnen zusammengehörigen Blattlagen sind auf doppelte Weise bezeichnet. Jedes erste Blatt einer solchen trägt in der rechten untern Ecke in arabischen Ziffern die Nummer der betreffenden Lage, während auf dem letzten Blatte jedes Päckchens in der Mitte des untern Randes in römischer Bezeichnung die Nummer desselben angegeben ist. Da diese letztere Bezeichnung der Blattlagen nur bis zur siebenten mit der erstern übereinstimmt, so ist klar, dass beim Einbinden nicht die römische, sondern die arabische Bezeichnung die massgebende gewesen ist. Letztere geht bis 23.[3]) Die Ziffern haben die Form

1 2 3 ջ ɥ 6 ʌ 8 9 0.

---

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik, 37. Band, Historisch-literarische Abtheilung S. 1—17. 2) *Catalogus Codicum Manuscriptorum Bibliothecae Regiae Monacensis Tomi IV. Pars II. Codices latinos continens.* Monachii A. M.D.CCC.LXXVI, S. 240—241. 3) Die einzelnen Lagen bestehen je aus folgender Blattzahl: 8, 6, 6, 8, 8, 5, 5, 6, 7, 8, 2, 6, 10, 6, 4, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 8.

Die Handschrift ist, mit Ausnahme des auf der Vorderseite des Vorblattes befindlichen Inhaltsverzeichnisses, von Händen des XI. Jahrhunderts geschrieben. Das Inhaltsverzeichnis ist aus späterer, jedoch immerhin noch alter Zeit und hat folgenden Wortlaut.

1) *„Cilindrus*
„Rythmomachine (!) siue pugna numerorum
„ac scacus mathematicus Wirzibergeñ
„Commentum in rationem (?) Boethii
5 *„Herimani Astrolabium*
„Geometria Gerberti
„Ludus laterculorum siue scacus
„Coniunctio numerorum Wircebergensium
„Geometrica Musica
10 *„Mensura limitum*
„Pondera mensure
„Astrologica Musica
„Adelpoldi Geometrica
„Pondera mensure rursus
15 *„Astrolabium.“*

2) Auf Blatt 1 beginnt eine Abhandlung, welche von der Hand, die das Inhaltsverzeichniss schrieb, betitelt ist: *„Cylindrus“*. Die Anfangsworte sind *„Componitur quoddam simplex et paruulum uiatoribus horologicum instrumentum“*. Der Schluss ist auf Blatt 3: *„sique in cuique hore fine a punctis ad puncta obliquas lineas in uidelicet incrementa et detrimenta(!) dierum postulant deducendo totius horologii huius mensuram consumabo.“* Es soll ein Fragment aus Hermann des Lahmen Schrift *de utilitatibus astrolabii* sein.[1]) Ich habe es nicht verificieren können, da mir der Pez'sche Thesaurus nicht zur Disposition steht.

3) Auf Blatt 3^v bis 4^v,13 ist dann die Schrift Hermanns *„De conflictu rithmimachię“* und

4) Blatt 4^v,14—6^v,15 des Asilo Werk *„de Rithmomachia“* enthalten, welche, wie schon Anfangs gesagt, Wappler veröffentlicht hat.

5) Von Blatt 6^v,15—10^v,7 findet sich Hermanns des Lahmen *Tractatus de diuisione,* welchen nach unserer Handschrift im Verein mit Nr. 14 689 der Münchner Bibliothek Treutlein im X. Bande des *Bullettino Boncompagni* veröffentlicht hat.[2])

1) Nach dem Handschriftenverzeichniss aus dem ersten Capitel des zweiten Buches. Das betreffende Stück findet sich übrigens häufiger als selbständige Abhandlung in den verschiedensten Bibliotheken. 2) *A. a. O.,* S. 644—647.

6) Blatt 10^v,8—16^r enthält einen Commentar *in Boethii librum de consolatione philosophiae,* so der gedruckte Katalog, in der Handschrift überhaupt ohne Titel. Anfang: „*O qui perpetua mundum ratione gubernas*“ Schluss: „*ante missas declamare. Sic enim probatum est.*“ Auf Blatt 15^v,9 steht die Anrede: „*ad te, Amatissime frater G.*“

7) Es folgt: „*Herimani Astrolabium*“, so von der Hand bezeichnet, welche das Inhaltsverzeichniss geschrieben hat, und zwar Blatt 16^v—24^r. Anfang: „*Christi pauperum peripsima*“. Schluss: „*et ingenium in huiusmodi rerum usu exercitanti alias debet notificare.*“ Auch hier muss ich, da, wie schon gesagt, der Thesaurus von Pez mir nicht zugänglich, eine Vergleichung des gedruckten und handschriftlichen Textes unterlassen.

8) Blatt 24^v—40^v,14 und Blatt 45^r—75^v: *Geometria Gerberti.* Als Ueberschrift von späterer Hand, der des Inhaltsverzeichnisses, steht nur über den beiden ersten Seiten „*Geometria*“. Von zwei verschiedenen Händen geschrieben. Ich gebe im Folgenden die von der Ausgabe von Olleris[1]) abweichenden Lesarten an, werde aber da, wo es mir nöthig zu sein scheint, einen völlig neuen Abdruck dieses wichtigen Buches veranstalten. Zunächst fehlt, für den Prolog und die ersten 13 Capitel wenigstens, jede Ueberschrift, was ich des weitern nicht ferner erwähnen werde. Sie sind nur durch Absätze und grössere Anfangsbuchstaben kenntlich gemacht. Also zunächst Collationierung des Druckes mit der Handschrift.[2])

401. 3. *quattuor.* — 7. *nostra.* — 8. *quia indoctos doceo* fehlt. — 11—12. *eluvionem Nili fluminis.* — 14. *a continenti; terrenae dimensionis.* — 18. *terminum diffinitionis.* — 19. *Geometrica.* — 21. *Geometrica; rationabilium* statt *mensurabilium vel ad mensurandum.* — 22. *probabiliter.*

402. 5. *et* hinter *numero* fehlt. — 8—9. *collecturi.* — 10. *quos terminos.* — 11. fehlt.

403. 7. *cum ipse Boethius.* — 8. *litteraturae tractatores.* — 9. *beatissimus.* — 11. *copiosissime*; *etiam mentio oculum.* — 12. *multis* fehlt. — 13—14. *prudentioribus.* — 15. *tamen* fehlt. — 16. *temptabo.* — 19. *tactuque.* — 21. *finis* fehlt. — 22. *ephiphaniae.* — 23. *se contenta.* — 24. *dilatet; adiecis.* — 25. *corpus solidum.* —

1) *Œuvres de Gerbert Pape sous le nom de Sylvestre II collationées sur les manuscrits etc. par* A. Olleris. Clermont-F^d et Paris 1867, S. 401—470. 2) Ich bemerke hier ein für alle Mal, dass überall, auch wo ich *v* geschrieben habe, in der Handschrift *u* sich findet, mit Ausnahme der grossen Buchstaben, wo stets *V* steht, auch da, wo nach jetzigem Gebrauche *U* zu erwarten war. Ich wollte dadurch den unnützen Varianten gegen den Ollerisschen Text aus dem Wege gehen. Ebenso bemerke ich noch, dass die Handschrift immer *spera* statt *sphaera* liest, und allgemein das *ae* entweder durch ein einfaches *e* oder das bekannte Compendium *ę* ausgedrückt ist.

404. 5. *coartat; in ea.* — 8. *symion.* — 12. Hinter *Haec* fügt die Handschrift hinzu: *vero et longitudine et latitudine passim se praebens secabilem solam, quae fit in crassitudine, respuit sectionem. Sed haec, videlicet punctum linea.*[1]) — 18—19. *alias sufficientius de talibus.* — 20. *Itaque iusta praedictas.* — 21. *metienda* fehlt. — 22. *vel certe.* — 23. *geometricis vocitatur.* — 24. *quaeritur* fehlt. — 25. *aedificiorumve.* — 26. *posita.* — 29. *quae etiam constrata planave.*

405. 1. *ut in.* — 3. *nuncupatur.* — 5. *lineas longitudinemve.* — 6. *altitudine latitudineve.* — 6—7. *Constratus sive planus est.* — 7. *seu planities, sive.* — 8. *longitudine latitudineque.* — 10. *altitudineque; distensus.* — 11. *vel tesserae; quae in.* — 12. *intellegi.* — 14. *figuratim.* — 16. *distinguuntur.* — 17. *sciendum vero.* — 18. *item et.* — 28. *invenies hoc modo.* — 30. *eius altitudinem.*

406. 2. *poterit* fehlt; *in plano poterit scribi.*[2]) — 4. *solidos palmos.* — 5. *observetur.* — 8. *usu.* — 9. *et* fehlt. — 11. *clyma.* — 12. *iuger vel* fehlt; *leuua (!).*[3]) — 15. *antiqui in agris metiendis.* — 16. *quatuor hordei.* — 19. $\overset{\text{ati}}{\textit{longitudine}}$ *(!).* — 25. *Nam duodecies as et* SS XVI *sunt.* — 26. *autem* fehlt. — 27. *expansa.* — 29. *et* fehlt.

407. 3. *et tertiam eius.* — 5. *ei* fehlt. — 6. *etiam ei, ut constratus fiat, adicitur.* — 7. *idem in lato.* — 14. *pedes vero.* — 15. *dictus autem.* — 16—17. *sextas VII et* SS ist ausradiert. — 18—19. *maximus in itineri spatiis metiendis usus est.* — 19. *Dictus autem; patentibus tribus.* — 20. *quinque* fehlt; *etiam passi.* — 22. *sextas* XIII. — 23. *Dicta autem.* — 29. *et in longo.*

408. 3. *dicitur, et ipse agri.* — 4. *discriminans.* — 6. *constratos* fehlt. — 7. *sive iugo.* — 8. *a iungendo.* — 10. *pedes CXX.* — 16. *planitieique; circumscriptae.* — 17. *cunque* fehlt. — 20. *ut supra dictum est* fehlt. — 24. *est* fehlt. — 26. *et* fehlt; *et bissem* fehlt. — 27. *et* fehlt; *uncias* $\overline{VII}$ *D.*

409. 1. *Leuva.* — 3. *leuva.* — 4. *etiam apud nos Teutonicos.* — 9. *fiant.* — 12. *Leuva.* — 12—13. $\overline{MIICCC}$ *et* $\overline{LXXV}$. — 14. $\overline{MI}$ *milia, solidos Milies mille milia. Stadium habet enim lineares passus CXXV, constratos* $\overline{XV}$. *DCXXV, solidos* $\overline{MDCCCCLIII}$ *CXXV.* — 16. *pedes V; CXXV.* — 18. *Cubitus autem; quadrantem* fehlt. — 19. *quadrantem* fehlt; *et sescuncem* fehlt. — 20. *digitos XVI; CCLVI.* — 25. *grana hordei.* — 26. *hactenus quidem; eorundemque.* — 27. *sed non superflue; si pluribus in.*[4])

---

1) Eine sehr wichtige Ergänzung des Textes. 2) Die Lesart bei Olleris *in palmo describi* giebt gar keinen Sinn. 3) Dass *leuva* die richtige Lesart ist, folgt schon aus dem französischen *lieue.* Auch in den *Gromatici Veteres ed.* Lachmann steht *leuua.* 4) Auch diese Lesart giebt erst einen guten Sinn.

410. 1. *prout.* — 1—2. *sive intellectuales.* — 2. *multimodis diuidere.* — 5—6. *mensuris includuntur iam deinceps speculandum videtur.* — 9. *figurae dicuntur.* — 12. *curvis* fehlt, doch ist Raum dafür gelassen. — 13. *elycoydes; campelas.*[1]) — 18. *seu planities; circumsepta.* — 19. *quod* bis *nuncupatur* fehlt. — 22. *quae quidem.* — 23. *paucula.* — 24. *prolibaverimus.* — 25. *figurae planae; lineis* fehlt. — 28. *sub duabus.* —

411. 1. *se invicem tangentibus continetur.* — 4. *facit ita.* — 6. *vice virtutis.* — 7. *nec minus iusto coartat.* — 9. *pleonesiae; indiffinitaque.* — 10—11. *lineae rectae.* — 12. *vero angulus.* — 13. *indiffinita; lineae defectum.* — 16. *appellari latine.* — 19. *recta linea.* — 20. *secatur.* — 23. *scribatur ita.* — 24. *si easdem tres.* — 25. *invicem sibi connexos.* — 27. *et singulis altrinsecus punctis.* — 28. *pernotabis hoc modo.* — 29. *alios duos connexueris, ut.* — 30. *hebetes, in altrinsecus.*

412. 1—2. *immune omnino.* — 5. *connexio componitur.* — 6. *vero* fehlt. — 10. *omnes tres.* — 10—11. *coactae punctum describuntur. liquide satis ostenditur hoc modo.* — 13. *ibi.* — 16. *efficit angulum.* — 20. *iacenti lineae rectae.* — 21. *ut et illam et invicem.* — 23. *occupant recti.* — 25. *rectae lineae; per alterutram.* — 26. *angulos efficiunt.* — 27—28. *aequales sunt.* — 29. *lineae rectae.* — 31. *dicuntur, tales scilicet.* —

413. 1. ad aliam. — 2. *eas tangit.* — 2—3. *exteriores, binosque interiores.* — 4. *Possunt.* — 5. *haec interim.* — 10. *vero* fehlt. — 11. *acutos omnes; duas vero.* — 12. *omnes vero.* — 13. *ut* fehlt. — 14. *satis liquebit formationibus.* — 20. *quod tres.* — 22. *atque idcirco, qui; lineis angulisque distensus; extensus vel* und *est* fehlen. — 24. *in angulatis exstat.* — 25. *eumdem rursus.* — 26. *exagonive.*

414. 1. *singulos angulos lineas rectas.* — 5. *dividuntur ut subiecti. Inde etiam.*[2]) — 7. *embadum a diligentibus.* — 18. *potest clarere.* — 15. *autem* fehlt; *habens angulum.* — 16. *acutos ita.* — 17. *nomen inclitum.* — 22. *identidem accepit vocabulum.* — 25. *Unde et ipse ab acuto, quod.* — 27. *facile quivis intellegere; etiam eorum.* — 29. *isosceles.* —

415. 1. *aequalibus omnibus.* — 2. *aequus.* — 3. *Isosceles est; latera habet; etiam quasi.* — 4. *isosceles; aequicrurium.* — 5. *sibi invicem inaequalia.* — 6. *transferatur.* — 7. *solus, ut dictum est.* — 8. *isosceles.* — 13. *praedictam superius.* — 22—23. *introrsus ad se invicem inclinatae.* — 28. *anguli, id est acuti.* — 29. *trini eorum; eorum; aequi* fehlt.

416. 1 *sint aequi.* — 2. *supervaduntur.* — 3. *et duo interiores acuti.* — 4. *complent angulum.* — 5. *duo quidem acuti rectum unum supervadunt,*

---

1) Auch hier ist die richtige Lesart unzweifelhaft. Cycloiden treten ja erst bei Galilei auf. 2) Auch diese Lesart ist die bessere.

sed. — 6. *tantum* fehlt; *minores sunt tanto, quantum.* — 7. *illud, ni fallor.* — 8. *est* fehlt. *Multis movere solet scrupulum.* — 9—10. *aequos habere duobus rectis.* — 11. *His vero.* — 12. *an acutus.* — 13. *certius etiam; requirenti* fehlt. — 17. *angulo* fehlt. — 22. *esse* fehlt. — 23. *quaesiveras.* — 24. *sin autem.* — 28. *aequa mensura distiterint.*

417. 1. *Phittagorae* und so immer. — 2. altera eiusdem. — 3. *utrimque.* 4. *deducito.* — 5. *pedes* fehlt; *dubitabas.* — 8—9. *usque ad* **G** *quatuor mensuro, dein lineam rectam ab* **F** *ad* **G** *duco.*[1]) — 10. **E** *angulum*; *id cogente.* — 11. *eum deputari.* — 12. Das neue Capitel beginnt im Manuscript mit den Worten: *Lineae vero rectae.* — 17. *Directim et non oblique.* — 18. *accipit; quasi fundamenta sit.* — 21. *Katheti* und so immer; *nomen.* — 25. *Ex harum autem lineari mensura.* — 27. *superius quoque.* — 28. *maiorem angulum.*

418. 1. *putetur; regulis suis.*[2]) — 2. *speciebus* fehlt; *primatum.* — 9—10. *manifestabitur.* — 12. *sit; pedes III;* — 13. *mensuras, basis IIII, hypotenusa V seu alias quaslibet plures in eisdem proportionibus mensuras.* — 16. *Quia vero interdum quaedam vel omnia.* — 17. *admixtis; geometram.* — 18. *etiam non ab re erit.* — 19. *itaque* fehlt. — 20. *scilicet; per kathetum alia invenire latera.* — 23. *Si eandem, quam abstulisti, nonam.* — 25. *novem facit.* — 25—26. *reliqui, id est VIII, dimidia; basi* fehlt. —

419. 1. *superius dicta.* — 2—3. *sive de minutiatis.* — 3. *compacta; ut in hoc, qui IIII in katheto tenet.* — 4. *parte* fehlt. — 4—5. *et triente ablata.* — 5. demonstrat. — 10. *senarium habet.* — 10—11. *in se* fehlt. — 13—14. *duo* ʃ£. — 14. *VII* £ ʃʃʃ. — 5. *id est* £ ʃʃʃ; *basi.* — 16. *VIII et* ʃʃ. — 18. *reliqui.* — 19. *habeat in katheto.* — 20. *IIII* ʃ. — 21. *Cui tribus.* — 23—24. *III et* ʒ. — 24—25. *II,* ‹, ◡◡. — 25. *XVI,* ʃʃʃ £ ◡. — 26. *VIII* ʒʃ ◡◡. — 27. *II* ‹ *et* ◡◡. — 27—28. *podismum in X* ʃ *et* £◡ *consumat.* — 29. *quae et in.*

420. 1. *orthogonio trigono.* — 4. *coniungatur et huius.* — 8. *alio quolibet.* — 9. *generatur.* — 12—13. *in se ducto.* — 16. *reliqui latus.* — 20. *ducta* fehlt; *tetragoni, id est.*[3]) — 21. *faciunt* fehlt. — 22. *quinque* fehlt; *XXV faciunt.* — 24. *investigo.* — 25. *id est ex; ductum id est.* — 30. *numero* und *dem* fehlen.

421. 8. *VI* ʒʃ; *Ipsumque.* — 9—10. *XL* ‹ ◡◡. — 10—11. *VIII* ʃʃ ◡◡.

---

1) Die Ergänzung ist, wie man leicht sieht, nöthig. Ich bemerke noch, dass die Handschrift überall im Texte sowohl, als an den Figuren grosse Buchstaben hat. 2) Auch hier dürfte die richtige Lesart getroffen sein. 3) Hier ist offenbar von Olleris die Abkürzung *.i.* für *id est,* welche in unserer Handschrift nirgends vorkommt (es ist dafür stets *id̄* gesetzt), fälschlich mit *tetragoni* verbunden worden.

— 11—12. *LXXI* ʒℒᴗ∖ *III scripuli et tria siliquae.* — 13—14. *CXI tertiam scripuli et tertiam siliquae continentem.* — 15. *X* ꞩℒᴗ. — 16. *et* fehlt; *eodem autem.* — 17—18. *ducto, id est CXI* ʒꞩ∖, *duabus siliquis et tertia siliquae.* — 18—19. *ductum* fehlt; *XL* ⲧᴗᴗ. — 19—20. *reliqui LXXI* ʒℒᴗ∖ *duarum siliquarum et trientis siliquae latus, quod.* — 20—21. *VIII et* ʒꞩᴗᴗ *basis erit. Si autem basis in se ducta, id est LXXI* ʒℒᴗ∖ *bissiliqua et tertia siliquae.* — 23. *in se numero; remanentis XL* ⲧᴗᴗ. — 24. IV ʒꞩ. — 25. *quoque huius modi.* — 26. *libuerit.* — 28. *huiuscemodi tradunt.* — 29. *katheti videlicet.* — 31. *duplicataque.*

422. 2. *id est* fehlt. — 2—3. *duplicati XII faciunt.* — 3. *partem* fehlt. — 4. *Horum si.* — 5. huius. — 7. *et* fehlt. — 8. *ablata et; II* ꞩ. — 9. *et* fehlt. — 10. *per quartam sui.* — 10—11. *latus tetragonale.* — 13. *facilior.* — 14—15. *universalis.* — 16. *concreverit, pro embado habeatur.* — 17. *basis integra multiplicetur; natum embado detur.* — 19—20. *per latitudinem longitudo.* — 21. *sibi invicem* fehlt. — 23. *Sed ut exempla huic.* — 25. *quindecies XX fiunt.* — 26. *certo certius indicant.* — 28—29. *regulariter.* — 29. *LIII* ʒꞩℒ୨∖ ꝰꝰ. —

423. 1. *constrati pedis capiat quantitates.* — 2. *vero* fehlt. — 4. *multiplica.* — 7. *In sequenti vero, cuius area constratos.* — 8. *et* hinter *CCCCXXVII* fehlt. — 9. Das erste *et* fehlt; *VI. DCCCXLV* ꞩℒ; *contineri.* — 14. *fiunt.* — 15. *quotiens.* — 20. *partem* fehlt. — 23. *adhuc regulam.* — 24. *subiciendam.* — 26. *basis.* — 27. *Ut autem.*

424. 9. *iuncta in.* — 11. *ductae* fehlt. — 12. *utrorum.* — 14. *latus, quod.* — 18. *XIIII est.* — 20. *ductus* fehlt; *et* fehlt; *Cui si IIII embada.* — 21. Beide *et* fehlen. — 22. Das erste *et* fehlt; *Quae ut.* — 23. *ducto* fehlt; *et* fehlt. — 24. *et* fehlt. — 25. *I* ʒꞩ; *VIIII et* ʒꞩ. — 27. *I* ʒꞩ *adeundem.* — 28. ʒꞩ *adiunctum; X* ʒꞩ; *quae est V et* ʒꞩ, *basim.* — 31. *diximus orthogonii tripleuri.* — 32. *quantitatem* fehlt. — 33. *acceperat; sibi quantitatem.*

425. 1. *patet* fehlt; *horum.* — 3. *dinoscendam.* — 4. Das erste *sunt* fehlt. — 5. *eam consequentiam.* — 5—6. *tantum quod quibusdam.* — 7. *ad basim; meminerit.* — 8. *ne iam dicta.* — 28. *continuet.* —

426. 3. *vel minutiatos; item ad minutiatas* fehlt. — 4. *offendere scrupulum.* — 5. *et* fehlt. — 6. *sesquitertia alterutros habitudine copulet.* — 7. *aspicias;* beide *est* fehlen. — 10. *modo in se.* — 11. *in se* fehlt. — 15. *geometricam scilicet.* — 28. *dinoscitur.* — 29. *volo in his.* — 31. *eorum latera; podismusque.* —

427. 3. *sesquialtera, si sesquitertia sesquitertia.* — 5. *Fiunt.* — 8. *orthogonios efficiunt.* — 10. *ostendat, ut sunt subiecti.* — 11. *germani. Item isti, sed aliis laterum proportionibus compacti.* Dann folgen die bei Olleris in Fig. 37 abgedruckten Dreiecke. — 12—17 fehlen.

Bis hierher, das heisst bis zum Ende des sogenannten ersten Theiles, stimmt der Text der Angaben im Allgemeinen mit dem Manuscripte, jedoch wird man leicht bemerken, dass sehr viele der angeführten Varianten einen bei weitem reineren und verständlicheren Text geben, als der gedruckte ist. Wir haben ja an einigen Stellen in den Anmerkungen darauf hingewiesen. Der Fortsetzung ist von vielen Seiten der Vorwurf gemacht, dass die Anordnung der vorgetragenen Lehren ein wüstes Durcheinander sei, voller Wiederholungen und dergl., so dass es eines Gerbert für unwürdig und deshalb für untergeschoben gehalten werden müsse. Unsere Handschrift hat nun eine Reihenfolge der Capitel, welche den Fehler des wüsten Durcheinander vermeidet, und einen Text, welcher bedeutend besser ist, als derjenige, welcher bis jetzt gedruckt wurde. Sie ist ja auch die älteste der bis jetzt bekannten Handschriften, welche die ganze Geometrie Gerberts enthalten. Ich werde daher im Nachfolgenden den zweiten Theil der Geometrie, die Feldmesskunst, nach unserem Codex vollständig abdrucken lassen. Ich bin fest überzeugt, dass dadurch der Verfasser derselben, mag es nun Gerbert sein, oder wer es sonst will, in ein ganz anderes Licht gerückt werden wird.

Ich fahre also mit dem Texte so fort, wie unsere Handschrift ihn giebt. Die am Anfange stehende römische Nummer ist die aus dem Manuscripte folgende, die hinten stehende arabische diejenige der Ausgabe von Olleris. Um jedem Missverständniss entgegen zu treten, mache ich nochmals darauf aufmerksam, dass die Capitel- oder Paragraphenzahlen erst durch die Herausgeber eingeführt sind, sich aber in keinem Manuscripte finden.

| I. DE MENSURIS. 15. 45r

Mensurarum appellationes, quibus utimur, sunt hae: Digitus, Uncia, Palmus, Sextans, quae et Dodrans appellatur, Pes, Laterculus, Cubitus, Gradus, Passus, Decempeda, quae et Pertica appellatur, Clima, Actus, qui
5 et Aripennis dicitur, Iugerum, Centuria, Stadium, Miliarium.

Digitus est minima pars agrestium mensurarum.

Uncia secundum quosdam digitos habet tres, secundum quosdam, quod verius est, digitum unum et tertiam digiti.

Palmus habet digitos quatuor, uncias tres.

10 Sextans digitos duodecim, uncias novem, palmos tres.

Pes digitos XVI, uncias XII, palmos IV, sextantem unam et tertiam eius.

Laterculus pedem unum in latitudine, uncias XXIIII in longitudine.

Cubitus sesquipedem, sextas II, palmos VI, uncias XVIII, digitos XXIV.

Gradus habet III pedes; passus V. Pertica X. Clima LX.

Actus in latitudine CX, CXX in longitudine:

Iugerum, quod sit iunctum duobus actibus, in longitudine CCXL, in latitudine CCXX.

Centuria CC.

Stadium pedes DCXXV, passus CXXV. 5

Miliarium passus M, stadia VIII.

II. INCIPIUNT EXCERPTA DE GEOMETRIA. 14.

Geometricales tractandi diversitates praemonstrandum est, quas ipsius artis tractatus spondeat utilitates, quatinus lectoris ingenium insinuationis trifida ratione incitatum, promtius ad legendum, studiosius sequentis operis 10 perscrutetur tractatum. Est enim huius disciplinae scrupulosa descriptio, 45v sed totius dimensionis in|dagatione indagationisque commoditate copiosa descriptio. Quam tamen, quamvis arduum sit, consequi potis erit, qui in ea infatigabili sudaverit studio. Quae ut facilius a studiosis consequatur, cuique theorematí sua figura subiungatur. 15

III. AD ALTUM UT METIATUR. 32.

Ad rem inaccessibilem nobis altioribus ut metiatur, quamvis laboriose, huiusmodi figuram facimus. Sit quantitas rei metiendae AB, et quot cubitorum, vel ulnarum, vel pedum, vel digitorum, vel etiam unciarum, vel cuiuslibet alterius mensurae sit, sit nobis propositum scire. Re orthogo- 20 naliter constituta sit spacium immeabile inter nos et rem, ut est GB. Erigatur nobis orthogonium DG, et sit linea sursum ducta de G ad D, sicut primo dictum de A ad B. Ducatur planiter linea de D ad Z, sicut plana iacet linea de G ad B, et sit notum, quanta est linea GD et linea DZ, nos enim eas facimus. Erigamus orthogonaliter lineam de Z 25 sursum ad V, et ponamus oculum in linea ZV orthogonaliter erecta, ut exeat visus noster per D ad B; et locus lineae istius, ubi stetit oculus, notetur puncto ipso V, et metiamur ZV, quanta sit. Et post haec iterum ponamus oculum in linea ZV ita, ut valeamus videre per D ad A; et locus, in quo visus steterit, notetur puncto H, et videamus, ubi haec 30 linea tangens terram coniungitur lineae GB, et sit punctum E, ita ut linea GE sit recta. Et post haec notemus, quantum sit inter Z et H. Et quota pars est ZH ad ZD, tanta est DG ad GE, et nota est linea HZ et ZD et DG, quia nos eas fecimus. Igitur notum est, quanta est linea GE; 46r et quanta | est linea VZ ad ZD, tanta est linea DG ad lineam GB, et 35 lineae VZ et ZD et DG nobis notae sunt: notum igitur erit, quanta

est linea GB. Et quia sapivimus dudum lineam GE, et sapimus modo lineam GB, possumus sapere, quanta est linea BE. Et quanta est linea DG ad lineam GE, tanta est linea AB ad lineam BE, et lineae DG et BE notae sunt: igitur AB linea nota est, et haec est, quam quaerebamus. Et
5 ut brevius, quod superius diffuse dictum est, comprehendatur compendium, quo philosophia gaudet, ponatur. Qualis comparatio fuerit ZV ad HV, talis erit GD ad BA. Sit et ZV duplum ad HV, erit GD duplum BA. (Fig. 1.)

IV. ALIA FIGURA DE EADEM RE CUM HOROSCOPO. 17.

Ad altitudinem inaccessibilem ob fluvii vel vallis impeditionem sit
10 altitudo quaelibet, ut sit AB, sit fluvii vel vallis impeditio, ut est BC. Sume horoscopum stans in ripa C, et per utrumque foramen mediclinii summitatem A diligenter inspice. Considera numerum graduum in mensurae quadrato, qui verbi gratia notatur quaternario numero, per quem summa totius quadrati, scilicet CXLIIII, | diuidatur, et quarta pars reperta, vide- 46v
15 licet XXXVI, conscribatur. Post haec de C ad D certa spatii quantitas metiatur, quae exempli gratia quadragenario numero praenotatur. Iterum sume horoscopum stans in fine D, et per utrumque foramen, ut prius, summitatem A inspice. Perpende iterum numerum graduum in quadrato, qui signatur in figura ternario numero, per quam denuo summa totius
20 quadrati dividatur, et pars tertia, quae est XLVIII, iuxta quartam, quae est XXXVI, conscribatur, et minor numerus de maiore, id est XXXVI de XLVIII, tollatur, et quod remanet, id est XII, cum latere quadrati, quod XII est, comparetur, et numerus remanens et latus quadrati aequalis pronuncietur. Et sicut ultimum remanens XII lateri quadrati XII aequalis
25 habetur, sic spacium CD spacio AB aequale affirmetur; et quota pars ternarius, qui est ultimus numerus graduum, in XII iudicatur, eadem pars AB in BD spatio sine dubio dicatur. Est igitur XL AB, sicut est XL CD, et est CLX totum BD, et est CXX BC. (Fig. 2.) | 47r

V. AD ALTITUDINEM CUM SPECULO VEL AQUA METIENDAM. 24.

30 Posito in speculo centro, vel in media scutella plena aquae, constituatur in plano arvo, et tam diu a geometra huc illucque diligenter trahatur, donec per medium centrum unius supradictorum cacumen rei metiendae aspiciatur. Cacumine invento spatium, quod continetur inter pedes mensurantis et centrum speculi vel medium vasis limphae pleni diligenter mensu-
35 retur, et post haec non minus caute metientis statura comparetur, et ut fuerit illud spatium ad metientis staturam, sic erit linea a medio centro speculi usque ad radicem altitudinis ad altitudinem rei metiende.

Exempli cura subdatur plana figura. (Fig. 3.)

VI. AD ALTITUDINEM CUM ASTROLABIO METIENDUM. 16.

Si altitudo fuerit in aequalitate, tali poterit mensurari inspectione. Sumatur ab altimetra astrolabium, et constituatur in medietate quadrati mediclinium, ut hac scilicet positione sit mediclinium alterius partis astro- 5 labii in numero graduum dierum XLV, et tamdiu ab eo ante et retro aestimando pergatur, donec per utrumque ambulatoriae pertusum altitudinis summitas inspiciatur. Qua inspecta loco, in quo stetit mensor, nota impri- 47^v^ matur, et huic impressioni | statura mensoris adiungatur. Post haec locus ipse diligenter notetur, et ab eo usque ad radicem altitudinis tota planities 10 caute mensuretur, et quot pedum ipsa planities fuerit, tot sine dubio altitudo erit. (Fig. 4.)

VII. AD ALTUM METIENDUM CUM ORTHOGONIO. 30.

Componatur a geometra orthogonium basi kathetoque eiusdem numeri compositum, hypotenusae vero proportio praetermittatur, quae ad altum 15 investigandum prorsus inutilis iudicatur. Compositum autem tam diu per planum a mensore trahatur, donec oculo humi apposito per katheti summitatem summitas altitudinis investigandae cernatur. Qua visa a loco, cui visus inhaeret, planities ad radicem usque metiatur, et quanta fuerit, tanta altitudo dicatur. Quod ut apertius intelligatur, orthogonium cum altitu- 20 dine metienda figuraliter visui anteponatur. (Fig. 5.)

48^r^ | VIII. DE EADEM RE ALIUD ORTHOGONIUM. 31.

Est etiam aliud aestimandae altitudinis orthogonium, quod ab inventore denominative nuncupatur Pythagoricum, naturalibus proportionibus katheti, basis, hypotenusae compaginatum, katheto ternario insignito, basi insignita 25 quaternario, hypotenusa vero praenotata quinario, scilicet ut basis katheto sesquitertio proporcionetur, et hypotenusa basi sesquiquarto comparetur. De quo cuncta fiunt, quaecumque dicta sunt in praecedenti figura, hoc solo excepto, quod in hoc de mentita planitiei quantitate quarta pars est auferenda hac videlicet ratione, quod basis iacens kathetum erectum superat 30 cum sua quarta parte. Quod ut melius animadvertatur etiam istud orthogonium subternis depingatur. (Fig. 6.)

IX. AD METIENDUM ALTITUDINEM CUM UMBRA. 25^a^.

Quaecumque res, si fuerit sub divo posita, umbram emittit, sed non sibi semper aequalem. Quapropter umbrae quotam partem volueris eliges, 35 deinde virgam coaequatam huic parti in terra statuas, et umbram exinde

cadentem seu per pedes, seu per palmos, seu per uncias dividas. Si maior inventa | fuerit umbra, quantum umbra virgam superat, tantum a singulis 48v partibus, quarum virga mensuram habet, subtrahas. Si autem minor, quantum a virga superatur, tantum dictis partibus adicias. Quod autem in 5 umbra vel ex augmentatione accreverit, vel ex subtractione remanserit, pro mensura illius rei habeto. (Fig. 7.)

X. AD ALTUM CUM ARUNDINE METIENDUM. 25b.

Componitur etiam instrumentum ad altitudinem sine difficultate inveniendam, quod hac de causa a sapiente inventum putatur, quia visum 10 humi adiungere difficile mensori, inconveniens spectatori putabatur, sumitque quantitatem suae magnitudinis a magnitudine staturae metientis. Constituamus arundinem tali magnitudine, ut duplari comparatione proportionetur mensoris longitudine. Cuius medio altera arundo orthogonaliter coniungatur, quae, statura mensoris aequalis, ei, cui coniungitur, subdupla habeatur. 15 Quatinus in hac coniunctione completum comprobetur, quod in prima figurarum ac curvo praeceptum videtur: *omnes lineae a medio circuli procedentes et videntur, et sunt parili magnitudine aequales.* Igitur hoc instrumentum sic compositum tamdiu ducatur a mensore per planum, donec per summitates istarum virgarum rei metiendae conspiciatur summum. Quo conspecto 20 tanta altitudo dicatur, quantum spatium a mensore ad radicem altitudinis statura adiuncta mensu|ratur. Verbi gratia sit statura mensoris AB, arundo 49r sibi dupla CD, altera arundo istius medio orthogonaliter iuncta AE, altitudo metienda FG, spatium a mensore ad radicem altitudinis BG. Hoc tamen nullo modo mensor obliviscatur, quin et huic omnique perpendiculo 25 aequipendium appendatur, quod geometricaliter institutum ad mensuram paratur. (Fig. 8.)

XI. AD PLANITIEM CUM HOROSCOPO METIENDAM. 19.

Si vis cum horoscopo quamlibet metiri planitiem, dirige intuitum per utrumque mediclinii foramen, donec terminatur intuitus in metiendae quanti- 30 tatis limite. Post haec, in quoto gradu quadrati mediclinium steterit, inspiciatur, et ipse numerus graduum cum XII conferatur: et qualis comparatio erit graduum ad XII, talis comparatio erit staturae metientis ad planitiem totam. Verbi gratia sit statura mensoris AB, planicies BC, numerus graduum ternarius, qui ad XII comparatus quarta pars eius dubie- 35 tate sublata invenitur. Igitur AB, quae est statura metientis, sic BC planitiei quarta pars computatur, sicut ternarius quarta pars XII computabatur. (Fig. 9.)

XII. AD PLANITIEM CUM VIRGA VEL ARUNDINE METIENDAM. 26.

Stabiliatur arundo visui aequiparata metientis in termino epiphaniae, cui altera coniungatur cuiuslibet quantitatis orthogonali ratione, quae scilicet susum iusumque tamdiu a planimetra ducatur, donec per utriusque arundinis summitates oppositus limes planitiei cernatur. Quo inspecto 5 49v ipsa coniunc|tio arundinum diligenter notetur, et superior pars fixae arundinis a coniuntione alterius cum tota sui quantitate comparetur, et eadem comparatio pendentis virgae planique incunctanter dicatur, quae superioris partis a coniunctione cum tota quantitate fixae arundinis superius dicebatur. Et ut clarius reddatur, quod litterari inflexione computamus, picturam apertius 10 obsccura demonstrantem visui legentium supponamus. Sit arundo stans visui metientis aequiparata AC, sit planities metienda CD, virga orthogonaliter pendens BC; sit igitur AB medium AC, erit ergo BC medium CD. (Fig. 10.)

XIII. AD PLANITIEM CUM QUADRATO MEDICLINIORUM METIENDAM. 33. 15

Si fuerit nobis propositum, quodlibet quolibet modo metiri planum, sumamus cubiti longitudinis lignum, cui tria alia in dimensione aequalia tali coniunctione innectantur, ut coniuncta quadrati diffinitionem suscipere videantur, quod quatuor lateribus aequale, quatuor angulis est orthogonale. 20 Cuius unius lateris summitatibus duo semipedalia ligna erecta infigantur, quae in summitatibus perforata per utrumque foramen visum metientis admittere videantur. Post haec extremitati oppositi lateris mediclinium, ut in horoscopo, sic copuletur, ut, dum per oppositum sibi latus certis dimensionibus distinctum trahitur, formam orthogonii Pythagorici imitetur, 25 50r vel imitari videatur. Verbi gratia | sit quadrati figura $ABCD$, duo semipedalia ligna in summitatibus unius lateris posita E, F; mediclinium in lateris oppositi summitate locatum per oppositum sibi latus discurrens DG in hunc modum (Fig. 11). Composita quadrati figura hac ratione ponatur iacens in metiendae planitiei extremitate, et tamdiu a metiente ex altera 30 parte erigatur, donec per foramina E, F opposita extremitas plani cernatur, et in loco, quo visus steterit, nota ponetur. Post haec per mediclinium ex adverso constitutum visus mensoris dirigatur, donec iam notata extremitas videatur. Quo facto locus, in quo steterit G, notetur, et CG ad GB comparetur; et qualis comparatio CG ad GB fuerit, 35 eadem comparatio AB ad totam planitiem erit. Verbi gratia tota planities BH dicatur et CG GB aequalis constituatur: et AB BH aequalis non dubitatur. (Fig. 11.)

XIV. AD ALTUM CUM ARUNDINE MENSURANDUM. 27 u. 28.

Si quis superioris figurae, retro positae figurae, qua planitiem mensurabamus, subtiliter inspexerit vim, istius quoque figurae vis, qua altitudines metimur, eum prorsus latere non poterit. Parum enim distat haec a 5 superiori figura excepto, quod superior in planitie, haec operatur in altitudine mensuranda. Sit altitudo mensuranda *AB;* statura metientis *CD*; arundo, cum qua altitudo metiatur, statura longior *EF*; virga orthogonaliter ducta *DG*, linea a visu metientis per arundinem usque ad altitudinem metiendam | *DFA*. His peractis *DG* ad *GF* comparatur, et eadem com- 50v 10 paratio *DH* ad *AH* pronuncietur, quae *DG* ad *GF* pronuntiabitur. Verbi gratia *DG* ad *GF* dupla ponatur, et non minus *DH* ad *AH* dupla indubitanter dicatur; quod si *BH HA* mensurabiliter copulantur, quae *DC,* statura metientis, aequalis habetur, tota altitudo *AB* mensurata non dubitatur. Sed quia potest evenire, quod *CB* sit interdum non meabile, *HA* non 15 est omnino nobis notum, quamvis sit proportionale. Qua de causa planities *BC* in retro erit metienda, et similis superiori alia componenda erit figura. Metiatur planities *CI*, sitque statura metientis *IK*; sit arundo aequalis superiori *LM*, sit virga orthogonaliter ducta *KN,* linea a visu metientis tendens ad altum *KLA*. Post haec *KN NL* in quadrupla proportione 20 conferantur, et similiter totum *KH HA* quadruplum indubitanter dicatur. Et quia superius iam *DH HA* duplum habebatur, modo autem *KH AH* quadruplum pronuntiatur, sublato *DH* de toto *KH* manet *KD*, quae est mensurabile, duplum ad *HA*. Quod si ad *AH*, *KI* statura metientis, quae est aequalis *NM* et *DC* et *FG* et *HB*, mensurabiliter apponatur, totum 25 *BA*, quod est altitudo, mensuratum nullo modo dubitatur. (Fig. 12.)

XV. AD PLANITIEM CUM ARUNDINE METIENDAM. 29.

Stans mensor in metiendae planitiei extremitate componat | sibi arundinem 51r minorem suae longitudinis prolixitate, quae scilicet tam diu diversis locis planitiei directa figatur, donec per summitatem ipsius arundinis altera 30 extremitas planitiei ex opposito cernatur. Quo facto a summitate arundinis orthogonalis linea usque ad mensoris staturam ducatur, et locus ipsius staturae, in quo linea terminabitur, diligenter signetur, et ipsa pars staturae ab ipsa nota usque ad visum cum linea orthogonaliter ducta conferatur. Et qualis comparatio ipsius partis staturae cum tota linea orthogonaliter 35 ducta habebitur, eadem comparatio totius staturae ad planitiem totam pronuntiabitur. Verbi gratia sit statura metientis *AB*; planities metienda *BC*; canna, cum qua mensuratur, *DE*, linea orthogonaliter ducta *DF*. Quota

pars fuerit AF in FD, tota pars erit AB in BC. Sit AF quarta pars in FD, et in eodem modo est AB quarta pars in BC. (Fig. 13.)

XVI. AD METIENDUM CUM HOROSCOPO PATEUM. 20.

Primo a geometra diligenter perpendatur, quatinus circulatio putei perpendiculo perpensa aequalis habeatur. Deinde cuius quantitatis sit eius 5 diametrum inquiratur. Invento diametro stans metiens super putei labrum despiciat per mediclinium lateris oppositi terminum. Quo peracto numerus graduum, in quo mediclinium steterit, in quadrato, cum XII comparetur, et eadem comparatio diametri et profunditatis cum statura geometrae indu-
51ᵛ bitanter | pronuntietur. Qua statura abstracta de profunditatis numero quod 10 superest, ipsius est altitudo putei. Verbi gratia sit putei altitudo AB; sit eius diametrum AC; sit statura geometrae trium pedum CD. Eia, constituamus trium pedum AC, et dirigamus intuitum per mediclinium de D ad B. Post haec gradus, qui causa exempli III sint, cum XII in quadrupla proportione conferamus, et AC, qui et ipsi III sunt, ad BC in 15 eadem proportione ponamus. Est igitur III pedum AC, et XII pedum DE, et trium pedum DC, quae est statura metientis; quibus tribus sublatis de DE remanet VIII pedum CE, quod est putei altitudo. (Fig. 14.)

XVII. AD PUTEUM CUM ARUNDINE MENSURANDUM. 21.

Ut in superiori figura putei dictum est, primo a geometra diligenter 20 perpendatur, quatinus circumductio putei circularis habeatur, deinde cuius quantitatis sit diametrum inquiratur. Quo invento stans mensor super putei summitatem supponat pedibus suis cuiuslibet longitudinis scorpionem, quem tam diu ante et retro pedetemtim ducat, donec per summitatem ipsius scorpionis alterius partis putei profunditatem cernat. Quo facto 25 pars ipsa scorpionis, quae puteo superiacet, a pedibus mensoris impressa nota caute notetur, cui statura metientis non minus diligenter comparetur.
52ʳ Et quota comparatio ipsius partis fuerit ad meti|entis figuram, eadem comparatio erit diametri cum statura metientis ad putei totam summam. Verbi gratia sit profunditas AB; diametrum eiusdem putei AC; statura 30 metientis CD, arundo, quae staturae comparetur, et per quam putei profunditas investigatur CE; altera pars putei CF; sit CD quadruplum ad CE; igitur DF quadruplum est ad AC.

Sumas mensuram si vis, auferre staturam.[1]) (Fig. 15.)

XVIII. AD ALTUM INACCESSIBILE CUM HOROSCOPO METIENDUM. 18.

Si quid eminens inaccessum fuerit aestimandum cum horoscopo, stet
5 alti mensor in metiendi eminentis arcifinio, suspiciatque per utrumque mediclinii foramen, quousque intueatur altitudinis mensurandae cacumen. Quo inspecto gradus quadrati numerentur, qui exempli manifestatione III computentur, qui in XII, quadrati latere, quater continentur. Hoc peracto tam diu ante et retro pergatur, donec iam visum cacumen altitudinis
10 mensurandae iterum videatur. Quo viso numerus graduum quadrati denuo inspiciatur, et verbi gratia II habeantur, qui in XII, quadrati latere, sexies contineri non dubitantur; et intervallum stationum mensoris scilicet XII pedum notabile habeatur. His peractis minus continens ternarii, id est 52v quaternarius, ab maiori continenti, id est senario, semel tollatur, et binarius,
15 qui remanet, in mente teneatur, et ipsum intervallum stationum mensoris inaccessibilis alti duplum ponatur. Subtractione continentium facta si unus tantum remanserit, intervallum stationum mensoris alto aequale est, si duo duplum, si tria triplum et sic in sequentibus.

Tali pictura fit declaratio pura. (Fig. 16.)

20 XIX. (AD PUTEI ALTITUDINEM METIENDAM.[2])) 34.

Putei aut cuiuslibet fossae altitudinem sic probabis. Accipe lignum directum | et pone super buccam putei, cuius umbram videbis in CF, id est 53r in profunditate putei, et lignum quatuor cubitos aut plus habeat; et exeat subtus eius pedes alia hasta directa similis sibi. Et est profunditas putei AE;

---

1) An dieser Stelle hat Herr Weissenborn (Gerbert, Beiträge zur Kenntniss der Mathematik des Mittelalters. Berlin 1888, S. 23) seine Kunst im Versemachen gezeigt. Dass ein leoninischer Vers beabsichtigt war, ist deutlich; sobald, wie in unserer Handschrift, das Wort *putei* weggelassen wird, ist auch der Vers in Ordnung. Der betreffende Verskünstler hat als selbstverständlich vorausgesetzt, dass jeder ihn so verstehen würde:

Sumere mensuram si vis, auferas staturam,

auch wenn er die Verbalformen von *sumere* und *auferre* mit einander vertauschte. Unsere Handschrift liefert ausser den drei bekannten leoninischen Versen noch einen vierten, der in den Druckausgaben durch Abänderung eines Wortes als solcher nicht mehr vorhanden ist. Am Ende von Cap. IV; 24 steht nämlich im Manuscripte, wie ich auch oben habe drucken lassen:

Exempli cura subdatur plana figura,

wo die Ausgaben das gewöhnlichere *causa* lesen. 2) Die nicht im Manuscripte vorhandenen Ueberschriften, welche sich aber auch in keiner andern Handschrift finden, sondern von Pez hinzugefügt sind, habe ich eingeklammert.

et hasta directa AD; et alia hasta ABC iacens super buccam putei truncat DE super angulos rectos. Et intuere in aqua putei umbram AC de D usque ad F, et invenies AC cubiti quot sint vel palmi, ac quotiens sit in DA, tociens est ACB vel EF in DAE.[1]) Utputa, si AC habeat unum palmum et DA tres, tribus vicibus est AC in DA, sicut est tribus 5 vicibus ACB in DAC. Abstrahe AD, remanet AE. (Fig. 17.)

XX. (AD ALTITUDINEM MONTIS INVENIENDAM.) 35.

Dum quaeris altitudinem alicuius montis, pone hastam ante te in plano pro monte longiorem te: et est hasta AB, et tu CD. Postea contemplare huc illuc te movens, donec recto oculorum visu per A usque F 10
53v videas. Tunc con|sidera, quanta sit GC ad GA, tanta est CH ad HF. Utputa, si GC dupla est ad GA, dupla est CH ad HF; et quantalibet GC ad GA, tanta est procul dubio CH ad HF; et quanta est AG ad GC, tanta est FH ad HC, et HF est mons.

Quod si fluvius habetur aut aliud obstaculum inter C et H, et non 15 possis pertingere ad montis radicem, ut praedictam invenias mensuram, accipe hastam, id est AGB, et ambula retro XXX cubitos aut quantumlibet, et iterum contempla recto visu de M per K usque F, quod est
54r montis summitas, et | postea vide, quanta sit MO vel NL ad OK, tanta est MH vel NI ad HF. Abstrahe de MH vel NI CH vel DI, et vide, 20 quod remanet, tanta est altitudo montis. Utputa, si invenisti CH duplum ad HF, et post MH quadruplum ad HF, tolle CH de MH, id est duo de quatuor, remanent duo, quod MC dices. Quia MC duplum est HF, dona XX cubitos ad MC et X ad HF. Et si CB triplum est ad HF, et MH septuplum est ad HF, abstrahe de MH CH, id est III de VII; 25 quadruplum est MC ad HF. Sic in aliis. (Fig. 18.)

XXI. (DE EADEM RE SINE MUTATIONE HASTAE.) 36.

Si quaeris sine mutatione hastae, sic facies. Est mons AB. Accipe hastam duorum cubitorum longiorem te, et pone ante te in plano. Postea considera ipsam hastam, quae est CDE, et visum tuum recte mitte de F 30 per D usque A, dividens ipsam hastam super unum cubitum; et vide, quantum sit FE ad ED, tantum est FG ad GA. Ambula retro, quous-
54v que videas de H per C usque A|, ubi est summitas montis, et vide, quantum sit HE ad EC, tantum est HG ad GA. Invenisti forsitan antea FG quadruplum GA, et HG decuplum ad GA: minue FG de HG, id est 35

1) Dass durch die Einschaltung unsrer Handschrift erst die ganze Darstellung richtigen Sinn erhält, ist leicht einzusehen.

IV de X, remanent VI. Sic est HF sescuplum ad GA, vel GA sexta ad FH. (Fig. 19.)

XXII. (AD INVENIENDAM PER SPECULUM ALTITUDINEM.) 37.

Si per speculum aut per concham plenam aquae quaeris scire alti-
5 tudinem montium vel turrium, accipe speculum, et pone prope montem[1])
in plano, et in tantum te ipsum et speculum positum in terra moveas
huc et illuc, quousque videas A in B, id est summitatem montis in medio
speculo. Et, quomodo sint invicem BC et CD vide, sic sunt invicem
EB et EA. Et si sit obstaculum, quod non possis probare hoc, ambula
10 retro cum ipso speculo, et pone in terram, ut videas mo|vendo[2]) te a D 56r
in Z. Et quantam proporcionem habent invicem PK et KZ, eandem
habent EA et ZE invicem. Minue inde BE, et remanet BZ. Et vide,
ut antea in superioribus figuris, quantum habeant proportionem BZ et
EA.[3]) (Fig. 20.)

15 XXIII. (AD LATITUDINEM FLUVII INVENIENDAM.) 38.

Si quaeris scire latitudinem fluvii vel alicuius campi vel curtis vel
cuiuslibet rei, accipe lignum, quod pertingat usque ad tuos oculos, secun-
dum alios minus uno cubito, et pone eum in ripa fluvii, et sta prope
eum, et est lignum, ut subtus vides, quasi AB, et pone aliud lignum
20 super ipsum erectum, sicut est CD. Postea contemplare recto oculorum
visu per AD usque videas E, id est ripam vel terminum ex altera parte.
Nam BE est fluvius, et ADE visus directus. Postea considera, quantum
sit AC | ad CD vel e contra, quantum est DC ad AC, tantum est ACB 56v
ad BE vel e contra BE ad ACB. Utputa, si DC est duplum AC,
25 duplum est BE ad BCA; si triplum, triplum et cetera. (Fig. 21.)

XXIV. (AD IDEM ALIUS MODUS.) 39.

Si quaeris aliter scire, pone hastam minorem te quasi ad pectus, et
pone in ripa fluvii, et accipe aliud lignum pertingens usque ad oculos,
sicut est CD. Et ambula retro quantumlibet, et pone ipsum fustem.

---

1) Dass dies die richtige Lesart ist, dürfte von selbst einleuchten. 2) Blatt 55 ist für die Figuren eingeheftet und enthält keinen Text. 3) Nach Herrn Weissenborn, *a. a. O.*, S. 84, soll dieses Capitel erst im 12. Jahrhundert durch Savosarda in das Hebräische und aus diesem durch Plato von Tivoli in das Lateinische übersetzt sein. Da es sich aber schon in einer Handschrift des 11. Jahrhunderts befindet, so dürfte das von Libri erwähnte Stück doch wohl ein anderes sein als das vorliegende, und alle daraufhin von Herrn Weissenborn gezogenen Schlüsse verfehlt.

Et tu tantum move te huc et illuc, quousque videas de C per A usque E, id est alteram fluminis ripam. Dehinc minue AB de CD, remanet FC. Vide, quomodo sint AF ad FC, sic sunt BE ad BA. Si triplum est AF ad FC, triplum est BE ad BA. (Fig. 22.)

XXV. AD ALTUM CUM SAGITTIS ET FILO MENSURANDUM. 40. 5

57[r] Dum geometricis figuris intenti philosophorum iam fatigabundi inven|tionibus inhaeremus, ne omnino deficiamus militaribus exercitiis animum relevemus. Sicut enim corpus cottidianis sumptibus fastidiens inusitato recreatur cibo, sic mens philosophicis onerata austeritatibus coniecturali poetarum relevatur figmento. Quapropter, ut animam nostram reficiamus, 10 militare inventum post multa supponamus.

Si cuiuslibet rei altitudinem investigare volueris, huiusmodi militari ingenio investigare poteris. Sume arcum cum filo, et una fili summitate, sagittae postremitati inhaerente, altera in manu remanente sagitta arcu 57[v] emissa altitudinis | mensurandae cacumen contingat. Post haec alterius fili 15 summitas eodem modo sagittae alteri vel alicui iaculo alligetur, et horum utrumvis proiectum altitudinis radicem, ut prius cacumen, feriat. Quo facto utrumque filum retrahas, et, quot pedum vel cubitorum sit utrumque, diligenter mensuratum inspicias. Deinde cuiusque fili numerus in se ductus multiplicetur, et, quanta utriusque multiplicationis summa fuerit, perpendatur, 20 ac minor summa de maiore subtrahatur, et tunc eius numeri, qui remanserit de maiori summa, tetragonale latus diligenter inquiratur. Hoc vero inquisito ac diligenter invento, sapienter tot pedum vel cubitorum ambiguitate semota altitudo, de qua inquiritur, pronuntietur, quot pedum vel cubitorum tetragoni illius latus unum habet. Et ut, quae dicimus, apertius 25 cognoscantur, altitudo et fila cum notis et numeris figuraliter subiiciantur. Sit altitudo, quae investigetur, AB; sit prioris fili, quod summitatem tetigit, quantitas quinario numero determinata AC; sit alterius fili, quod altitudinis radicem percussit, longitudo quaternario numero diffinita CB. Post haec vero prioris fili numerus in se multiplicetur, in XXV concrescit; quatuor 30 vero posterioris fili numerus in se ductus in XVI consurgit. Dein minore numero, id est XVI, de maiori, id est XXV, sublato erit remanens IX, cuius tetragonale latus III invenitur, quia III in se ductus in IX cumulatur. Trium igitur pedum erit altitudo AB. Sed quia potest accidere, quod remanentis tetragonale latus interdum integris numeris nequit inveniri, 35 subtilitas minutiarum necessario debet adhiberi, de quibus, quia longum est disserere, praetermittatur, et figura cum numeris et notis supponatur.

Rebus in obscuris oritur lux clara figuris. (Fig. 23.)

Bis zu unserm Cap. XVII hat ein und dieselbe zweite Hand geschrieben, bishierher sind auch die mitgetheilten Ueberschriften der einzelnen Capitel mit rothen Versalien geschrieben vorhanden. Die weitern Abschnitte XVIII bis XXIV (34—40) sind dann ohne Unterbrechung, aber auch ohne jede Ueberschrift, nur durch grosse in rother Farbe ausgeführte Anfangsbuchstaben als solche kenntlich gemacht, geschrieben. Nur bei Cap. XXIV (40) ist wieder die Ueberschrift hinzugefügt. Die Hand, welche zuletzt schreibt, ist deutlich von den beiden vorhergehenden unterschieden, dass aber die Fortsetzung der vorhergehenden Capitel beabsichtigt ist, wird dadurch klar, dass Blatt 52 unten in der Mitte die lateinische Nummer VII trägt, während, abweichend von allen früheren Bezeichnungen, das folgende Blatt 53 auf der Vorderseite in der Mitte des unteren Randes die Bezeichnung VIII hat und rechts in der unteren Ecke die arabische Ziffer 9.

Betrachten wir nun für einen Augenblick zunächst den Inhalt der von der zweiten Hand geschriebenen zusammengehörigen Nummern, so sehen wir, dass die in den Druckausgaben als 22 und 23 bezeichneten Capitel oder Paragraphen vollständig fehlen. Von ihnen ist 22, nebenbei gesagt, das einzige Capitel, in welchem dreimal das Wort *alhidada* statt *mediclinium* vorkommt, und auf welches WEISSENBORN[1]) ein so grosses Gewicht gelegt hat. Nach den beiden einleitenden Paragraphen haben wir nun zunächst sieben Methoden der Höhenmessung, dann folgen drei Längenmessungen, eine Höhenmessung, welche auf die bei der einen Längenmessung benutzte Methode ausdrücklich Bezug nimmt, wieder eine Längenmessung, zwei Tiefenmessungen und zum Schlusse noch eine Höhenmessung.

Ausser den beiden schon genannten Capiteln 22, 23 fehlt vor allem die zweite Erklärung des *quadratum geometricum* nach der Darlegung einer Höhenmessung mit Hilfe eines beweglichen, aus Stäben zusammengesetzten rechtwinkligen Dreiecks ohne feste Hypotenuse in Cap. 28. an einer Stelle, wo diese Erklärung gerade so hinpasst, wie die Faust aufs Auge. Damit entfällt ein zweiter Vorwurf, welchen Herr WEISSENBORN[2]) der Darstellung dieses zweiten Theiles macht. Auch diese Erklärung findet sich nur in einer einzigen späten Handschrift, und dürfte ebenso wie Cap. 22 auf

1) A. a. O., S. 86 u. 92. Ich habe schon an anderem Orte (Deutsche Litteraturzeitung 1888, No. 22, Sp. 818) darauf hingewiesen, dass nur eine einzige Handschrift das Capitel 22 enthält, und dass, da diese erst dem XII. Jahrhundert angehört, man den Zeugnissen der übrigen Codices gegenüber wohl berechtigt sei, diesen Paragraphen als Interpolation eben dieser einzigen Handschrift anzusehen. 2) A. a. O., S. 104.

Interpolation beruhen. Es fehlt die Bemerkung in Cap. 25^{a}: *Est etiam alia altitudinis metiendae regula etc.,* welche auch PEZ nicht kennt, obwohl sie in den von CANTOR[1]) als Fortsetzung der Gerbertschen Geometrie aus dem Salzburger Codex mitgetheilten Paragraphen sich befindet. Es fehlen die von OLLERIS in Parenthesen eingeschlossenen Zusätze, und die von WEISSENBORN[2]) richtig als Glosse erkannte Stelle am Schlusse von Cap. 16.

Alles in allem stellen diese XVII Capitel in der von unserem Manuscripte gegebenen Reihenfolge eine wohlgeordnete Anleitung zum Höhen-, Längen- und Tiefenmessen dar, nur muss man nicht verlangen, dass zwei Methoden, welche dem Wesen nach gleich, sich nur durch das angewendete Messinstrument von einander unterscheiden, von dem Verfasser oder Compilator auch als ein und dieselbe Methode erkannt werden. Wie soll der Mann, der nicht einmal die beiden Messungen mit den gleichschenklig rechtwinkligen und mit dem Pythagoreischen Dreiecke als ein und dieselbe Methode erkennt, dazu kommen, die in § 25^{b} bei OLLERIS, unserem Cap. IX, abgehandelte Höhenmessung z. B. als im Princip auf dieselbe Methode wie die beiden vorhergehend abgehandelten beruhend anzusehen? Und wenn Herr WEISSENBORN[3]) behauptet, das in Cap. 33 bei OLLERIS, unserm XII, beschriebene geometrische Quadrat sei mit dem Horoscope und dieses wiederum mit dem Astrolabium identisch, so steht dem die Beschreibung selbst entgegen, in der es ja heisst: „*Post haec extremitati oppositi lateris mediclinium,* ***ut in horoscopo,*** *sic copulatur*“, wodurch deutlich genug gezeigt wird, dass das Horoscop von dem Schreiber für ein anderes Instrument gehalten wird, als das hier beschriebene *quadratum geometricum.*[4]) Um jene Zeit gab auch die kleinste Verschiedenheit eines Apparates Grund, denselben anders zu nennen, als den ähnlichen. Ich will nur an das *Instrumentum Albion* erinnern, das sich von dem unter dem Namen *Cylindrus* beschriebenen Zeitmesser HERMANNS DES LAHMEN in fast gar nichts unterscheidet, aber eine ganze Litteratur hervorgebracht hat, wie jedes Handschriftenverzeichniss ausweisen wird. Wir von unserer bessern Kenntniss aus sagen, Astrolabium, Horoscop und Quadratum geometricum sind ein und dasselbe; zu GERBERTS Zeiten war das eben nicht der Fall; speciell unterschied sich ja das Astrolabium vom Horoscope, wie Herr WEISSENBORN[5])

---

1) Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Leipzig 1875. Anmerkung 283. Hier hat CANTOR jedoch nicht bemerkt, dass dieser Passus in der Ollerischen Ausgabe sich findet. Er hat freilich den Pezschen Thesaurus benutzt. 2) A. a. O., S. 111. 3) A. a. O., S. 104. 4) Dass das *Quadratum geometricum* stets für etwas anderes gehalten ist, als das *Astrolabium,* bezeugt auch PEURBACH, dessen ebenso benanntes Instrument nichts weiter ist als eine verbesserte Form des GERBERT zugeschriebenen. 5) A. a. O., S. 109.

selbst hervorgehoben hat, durch seine Eintheilung nach *gradus dierum* statt der Zwölftheilung des Horoscopes.

Die von der dritten Hand geschriebenen 7 Capitel fügen den vorhergehenden nach, was die Hilfsmittel betrifft, neuen Methoden noch eine Reihe von Tiefen-, Längen- und Höhenmessungen hinzu. Die Längenmessungen, in die Form der Breitenmessung eines Flusses gebracht, sind wie die Höhenmessungen durch CANTOR[1]) als Messung mit der festen Stange charakterisiert worden. Den Schluss macht die militärische Höhenmessung. Von ihr meint Herr WEISSENBORN[2]), sie sei wohl von dem Verfasser nur zur Verspottung aufgenommen worden. Ich glaube gerade im Gegentheile, dass ähnliche Versuche wirklich gemacht worden sind, und dass, wenn alle Militärschriftsteller vor GERBERTS Zeit und ihre Werke auf uns gekommen wären, sich auch für diese Methode die Urquelle auffinden lassen würde, jedenfalls aber nicht bei einem Araber, sondern aus römischen Quellen.

Von derselben Hand, welche die Paragraphen 30—40 (unser XVIII bis XXIV) geschrieben hat, schliessen sich nun von den Ollerischen noch die folgenden an: 53—64; 66—84, 90, 93, 94. Darauf folgt wieder eine von allen vorhergehenden Händen verschiedene Hand, welche noch Folgendes hinzufügte: Cap. 41; 43; 46; 47—52; 64 nochmals; 65. Von den in CANTORS Agrimensoren, Anm. 283 veröffentlichten Stücken Absatz 1; Cap. 85—89; 91; 93; Agrimensoren, Anm. 283, Absatz 2 u. 3; Cap. 49, 2. Absatz; 46, 2. Absatz.

Ausser den Capiteln 22 u. 23 fehlen also noch gänzlich: Cap. 42; 44; 45; und von Cap. 56 die fünf letzten Absätze.

Für das Folgende begnüge ich mich wieder in der Reihenfolge, wie unsere Handschrift sie giebt, die *Varia lectio* mitzutheilen, wobei ich jedoch oftmals darauf aufmerksam machen werde, wann entweder durch die Anordnung der Capitel, oder durch die Lesart des vorliegenden Manuscriptes der Sinn des Ganzen gebessert wird, speciell auch Dittographien vermieden werden.

Seite **452.** (Cap. 53.) 5—6. *sunt dispositae.* — 6. *sic quaeratur.* — 7. *quinta sumenda est.*[3]) — 8—9. *numerum arborum, quam et alia inveniendi regula est.* — 10. *diuisis.* — 14. *id est.*

(Cap. 54.) 18. *Rumbi, cuius sint.* — 21. *rumbi.*

(Cap. 55.) 25. *Omnis trigonus aequilaterus unum latus.* — 26. ipsum latus.

453. 1. *similiter* fehlt. — 3. *Omnis* fehlt. — 4. *expostulat.* — 5. *medietatem reliqui.* — 6. *Omnis* fehlt; *qui aequis continetur lateribus* fehlt; *quater lateris.* — 7. *unius lateris* fehlt; *in se multiplicat.* — 8. *et*

1) Agrimensoren, S. 163. 2) A. a. O., S. 23—24. 3) Die Lesart: *sic quaeratur. Utriusque partis quinta sumenda est* ist jedenfalls richtig. Sie giebt erst einen vollständig zutreffenden Sinn.

reliqui. — 9. *Omnis* fehlt; *multiplicationem lateris* fehlt; *aream ter.* — 10. *Octogonus septies, aream quater.* — 11—12. *Ennagonus septies, aream quinquies.* — 13—15. *Decagonus octies, aream sexies, et caeteri ad hanc consequentiam.*

(Cap. 56.) 18. *rotundi vel circuli; et embadum invenire.* — 19 *XXII*[da] *unitate sublata.* — 23. *integrum, et tunc medietas vel quarta pars circuitus perdiametrum, et tunc totum, et idem.* — 25. fehlt.

454. 1—14 fehlen.

(Cap. 57.) 17. *emiciclo; diametrum XIIII.* — 19. *quarta decima fiunt CCCVIII.* — 20. *emicicli.*

(Cap. 58.) 23. *longitudo est pedum.* — 24. *Hi.* — 25. *Hi* fehlt; fient CXXXIIII Ss. — 26. *pedes VIIII, unciae VII et* £; *semis* bis *semuncia* fehlt.

455. 1. *sphaera.*

(Cap. 59.) 6. *trigono.* — 8. *dinoscere.* — 9—14. *embado totius circuli per supradictas regulas invento XI vicesimas primas subtrahas, id est, tolle vicesimam primam et multiplica undecies, fit area circuli, multiplica decies, fiunt excessiones trigoni.*

(Cap. 60.) 21. *permixtio; unitate sublata.* — 23. *superficiei multiplicatae.* — 24. *demus de singulis.* — 25. *singula latera.* — 26. *sit embadum.* — 28. *id est CCXX.*

456. (Cap. 61.) 4. *Tetragoni; latera singula pedum X.* — 8. *fientque CCX.*

(Cap. 62.) 11. *aequis.* — 12. *eandem.* — 14. *augmentata.* — 15. *fient.* — 16. *exagonis.*

(Cap. 63.) 24—25. *uno interius, uno exterius.*

457. *tres decimas quartas.* — 2. *regulam, id est dimidio.* — 3. *scias* fehlt. — 4. *tribus decimis quartis superari. Ex.* — 5. *et ei quatuor.* — 6. *cuius quantitatis; demptae.* — 8. *et eam.* — 13. *L et VI.*

(Cap. 64.) 16. *habeat circuitu pedes CCC, in.* — 19. *totius montis. Sed ad iugera invenienda per pedes unius iugeri, id est* $\overline{XXVIII}$ · *DCCC ille supradictus.*

458. (Cap. 66.) 28. *maius XV.* — 29. *in se fiunt.* — 30. *fiunt; hypotenusa.* — 31. *fiunt.*

459. 1. *minor praecisura.* — 2. *quam cadit kathetus. Haec.* — 3. *CXLIIII.* — 6. Ss. — 7. *minoris facito.*

(Cap. 67.) 10. *si vis oves.* — 11. mittere sic. — 12. *duc bis vicenus; de CC.* — 14. *implebis numerum.*

(Cap. 68.) 17. *quacumque.* — 24. *numerum XXXVIII.* — 25. *autem fuerit.* — 26. *latitudine; erunt LXXVI.*

460. 2. *Semotim ducas longitudinem.* — 3. *si vis perpendere.* — 5. *invenies embadum.* — 6. $\overline{V}$. *D* fehlt.

(Cap. 69.) 9. continet. — 10. una XXXIV, in altera XXXII; *agnoscas*. — 15. *VII tunc esse*. — 15—16. *in illud campo* fehlt.

(Cap. 70.) 19. *in secundo*. — 22. *perticas* fehlt. — 23. *hoc autem; unus et* ϛ, *remanentibus*. — 24. ubique fehlt.

(Cap. 71.) 28. *habet*.

461. 1. *comprehende. De*. — 2. Das dritte *id est* fehlt. — 6. *XCVI* ϛ*C*ϛϛ *et nichil*.

(Cap. 72.) 9. *in altero* $\overline{I}$. — 10. pedes fehlt. — 11. *fac*. — 12. *iunctae* fehlt; *fiunt; duae* fehlt. — 13. *fiunt*. — 16. *sume*.

(Cap. 73.) 21. *capiantur; ut unaquaeque; domus* fehlt. — 22. fac — 23. *fiunt XLV*.

462. (Cap. 74.) 3. *si vis locare*. — 8. quinquies millies $\overline{\text{CI}}$. XCVI. — 8—9. *trigesies XX*.

(Cap. 75.) 12. *est pedum*. — 13. *implere*. — 16. *CXLIIII; per longitudinem et latitudinem multiplicans*. — 16—17. quater millies millia $\overline{\text{CXLVII}}$. CC. — 19. *pavimentum dictae basilicae; queunt*.

(Cap. 76.) 22—23. Die Glosse fehlt. — 23. *habet pedes*. — 24. *velis locare; pervius*. — 25. *quotiens sint; habeantur* fehlt. — 26. *quatuordecies; remanentibus duobus* fehlt. — 27. *sunt IV*. — 27—28. *VII quatuordecies*.

463. (Cap. 77.) 3. *XIV pedum*.

(Cap. 78.) 8. *ducas XIV*.

(Cap. 79.) 12. *emiciclo; basis sit*. — 13. *XXXVIIII et duabus*. — 14—15. *remanentibus, id est VIII* fehlt; *Quod idem*. — 18. *area sit*. — 18—19. *Ducatur quatuordecies, fiunt* $\overline{\textit{VIII}}$. *DCXX IIII*.

464. (Cap. 80.) 1. *et his*. — 2. *hypotenusa*.

(Cap. 81.) 5—6. Die Glosse fehlt. — 7. *laevum, iugera sic*. — 8. *iugera* fehlt; *fit* fehlt. — 9. *pedibus constat. Ascensiumque in unum sume dimidiam, quae fit DCCC pedibus*[1]); *fiunt* $\overline{\textit{DCXL}}$. — 10. repperies.

(Cap. 82.) 14. *in* fehlt. — 17. *eius* fehlt. — 22. *hypotenusa*. — 23. *ad summum; illic*. — 25. *visum tamdiu*.

465. 2 *illius rei, quam quaesiisti, tene*. — 2—3. *altitudinis inveniendi certa ratio est*. — 3. *erectus* fehlt. — 4. *plana sit*.

(Cap. 83.) 8. *in* fehlt.

(Cap. 84.) 22. *in se inviceem ductis*. — 24. *fit*. — 25. Das zweite *de* fehlt. — 27. *diversitas* statt *profunditas*.[2])

---

1) Hier ist durch die Ergänzung der Sinn erst klar geworden. 2) Dass es *diversitas* heissen muss, wie auch Pez liest, ist klar. Wenn die Durchmesser des Fasses zu grosse Verschiedenheit zeigen, so ist die entwickelte Formel eben nicht mehr anwendbar.

467. (Cap. 90.) 22. *XX pedum.* — 23. *adicias.* — 24. *fiunt.* — 26. *id est* fehlt. — 27. *XLIV* fehlt.

468. (Cap. 93.) 21. *itemque.* — 22. *nosse; huius artis* fehlt. — 23. *tenuit.* — 24. *Syene usque Meroen; dispositique per.* — 25. *locorum* fehlt.

469. 1. *tot.* — 4. *notareque unumquemque.*[1]) — 8. *est mensurae.* — 9. *quingentorum.* — 10. *pertineat.* — 14—15. *portio.* — 17. *sextae horae.* — 18. *ut et.* — 19. *scribemus.* — 20. *sciroterum.* — 21. *exeat et aliquando* fehlt. — 22. *umbras* fehlt. — 24. *ingressum umbrae* fehlt.

470. (Cap. 94.) 7. *C, D, E.* — 8. *longissima erit umbra.* — 10. *describamus; stat.* — 11. *gnomo **AB** planitie **B**.* — 11—13. *umbram, et in planitie notemus signo D, sic et terram signo E, ut sint in vasi proportione longitudinis suae BEDC. Eiciamus hypotenusas.*[2])

446. (Cap. 41.) 6. *In ampligonio.* — 7. *super quam.*

447. 1—2. *hypotenusae minoris multiplicatione aggregata.* — 3. *multiplicationem; superhabundaverit adiecto uno.* — 4. *quotiens.* — 6. *nisi eiecturam.* — 7. *sumas latus, quod.* — 10. *fiet CL numerus embadi.*[3])

(Cap. 43.) 25. *trigonum orthogonium.*

448. 2. *superhabundaverit.* — 3. *videlicet iuncto.* — 5. *de* fehlt.

449. (Cap. 46.) 8. *scilicet* fehlt. — 11—17. fehlen.[4])

(Cap. 47.) 22. *adicias.*

(Cap. 48.) 28. *Trapitezii, cuius; embadum.*

450. 1. *dinoscere.* — 2. *basis plus quam coranstum ducas.* — 3. *sunt CCCCL; XX medium.* — 4. *invenitur* fehlt.

(Cap. 49.) 8. *singula latera.* — 9. *si vis prius; in se duc.* — 10. *DCCCC. Item alterius lateris mediam in se fient CCXXV. Hos detrahas de DCCCC remanebunt.* — 11. *basis.* — 13—25. fehlen.

451. (Cap. 50.) 3. *ysoscelis.* — 5. *in se, id est.*

(Cap. 51.) 12. *utrisque.* — 14. *CCCCL; dimidio, id est.*

(Cap. 52.) 24. *fient VIIII.*

452. 2. *et* fehlt.

Es folgt hier nochmals Cap. 64, genau in derselben Fassung, welche wir oben nachgewiesen haben.

457. (Cap. 65.) 25. *ducta.* — 27. *ducta.* — 29. *vel dempto uno et ducta.* —

1) Daraus folgt, dass die Pezsche Lesart *et notare* statt der von Olleris *notare etiam* die richtigere ist. 2) Der erste Abschnitt von Cap. 93 findet sich in der Ausgabe des Macrobius von Jan I, 219 Anmerkung zu 7, der zweite Theil, sowie das Cap. 94 ist aus Hyginus. (Siehe Gromatici veteres ed. Lachmann S. 188, 14—191, 11, wo auch der Schluss des Capitels gegeben ist.) 3) Es folgt noch offenbar ein Stück aus dem nächsten Capitel vorweggenommen: *Kathetus et basis sic quaerantur. Hypothenusae.* 4) Dadurch ist wieder ein Anstoss, welchen Weissenborn an diesem Capitel genommen hat, durch unsere Handschrift beseitigt. (Gerbert, S. 29 u. 33.)

458. 2. ducta. — 3—4 fehlen. — 6. *ducta.* — 8. *ducta.* — 9. *XXXVI facit quadratum, cuius quadrati latus acceptis VI et ducta.* — 12. *ducta; decima octava.* — 14. *ducta.* — 15. *accrescat numero.* — 16. *augmentationes* bis *naturaliter* fehlt. — 18. *et sic in caeteris.* — 19—20. *Inter* bis *caeteris* fehlt, steht aber von andrer Hand geschrieben auf dem obern Rande. — 20. *incipienti auctiones.* — 21—22. *Nam pentagoni multiplicatio.* — 23. *id est I et IIII.*

Es folgt hier mit der Ueberschrift: *Quotiens in leuga rotetur rota* der erste Absatz der Anmerkung 283 in den Agrimensoren Cantors mit folgenden Abweichungen[1]: 2. *a primis; habeat.* — 8. *Utali, Bawarii.* — 10. *sint in Mille ut quadragies quinquies; fiunt $\overline{IX}$.* — 11. *scilicet unus.* —

Daran schliesst sich der erste Absatz von Cap. 55 nochmals an, ohne Abweichung von dem Drucke. Nun folgt von Cap. 25 der vorletzte Absatz in folgender Fassung, zugleich Cantor: Agrimensoren, Anmerkung 283, Absatz 3.[2])

Est etiam alia metiendae regula, qua cum umbra ipsius altitudinis ipsa altitudo mensuratur, quam sic notam putamus, ut expositione carere aestimemus. Hae duae figurae principatum debent optinere cum suis regulis, sed parvitas spatii sic fieri vetuit.

Dazu sind die beiden Figuren 4 (Cap. V, 16) und Fig. 2 (Cap. III, 17) nochmals gezeichnet. Die Worte *Hae* bis *vetuit* sind aber wieder durchgestrichen, denn der Raum hätte sicher erlaubt, jene beiden Methoden nochmals abzuhandeln. Jedenfalls stand das genau so in der Vorlage, aus welcher abgeschrieben wurde, ist einfach übernommen, dann das nun Folgende ebenso mechanisch abgeschrieben, und ein späterer Ueberarbeiter, von dem mehrfach Randglossen vorhanden sind, hat diesen Passus gestrichen. Es folgen nun zunächst aus Cantor: Agrimensoren, Anmerkung 283, Absatz 4 und 5 mit folgenden Abweichungen:

31. *origenis.* — 34. *egresipum vel eugepium.* — 36. *decies quam tantum.* — 37. *est in latere a dorso.* — 38. *metieris.* — 39. *ad dexteram in sinistram, vel ad sinistram in dextram.*

Dann weiter

466. (Cap. 85.) 4. *Ex coadunatione.* — 5. *quanta summa concrescat.* — 7. *numerus terminorum.* — 8. *velis scire.* — 10—11. *impar autem numerus terminorum.* —

---

1) Jedenfalls geht aus dem Vorkommen dieses Absatzes in einer Handschrift des XI. Jahrhunderts hervor, dass er schon um jene Zeit vorhanden sein musste, also nicht erst im XII. Jahrh., wie Cantor und nach ihm Weissenborn annehmen, verfasst sein kann. 2) Dass sich der Passus bei Gerbert findet, war Cantor a. a. O. entgangen.

(Cap. 86.) 19. Ueber *inauraturam* ist übergeschrieben *id est soliditatem vel spissitudinem.* (Hierüber sehe man die Bemerkung am Schlusse der Abhandlung.)

(Cap. 87.) 3. *pedes* fehlt.

(Cap. 88.) 7. *facies.* — 8. *aequalis* statt *et qualis.* —

(Cap. 89.) 13. *octogonium.* — 14. *circulum;* die Glosse fehlt. — 15. *et* fehlt. — 17. octogonium.

468. (Cap. 91.) 3. *fuerit prisma; pedum VIIII.* —

(Cap. 92.) 11. *vel longilatero.* — 12. *summarum inde.* — 13. *diagonio.* — 17. *ducatur, de ea summa nona tollatur, remanet.* —

Nun folgt von Cantor: Agrimensoren, Anmerkung 283, Absatz 2 mit folgenden Abweichungen:

15. *genera sunt.* — 16. *est exterior.* — 17. *videre vis.* — 18. *triangulus* bis *duobus* fehlt. — 20. III[es]; *quidem.* — 21. *determinent.* — 23. *descendant.* — 26. *tres circulos lineas.*

Hieran schliesst sich von gänzlich anderer Hand Cap. 49, 2. Absatz:

450. 14. *iterum basim et.* — 15. id est V, in se, qui. — 16. *fient.* — 18. *id est ex CLXIX; XIII* bis *fiunt* fehlen. — 19. *autem si.* — 21. *katheton quoque.* — 24. *dimidiam.* —

Endlich findet sich noch Cap. 46, Absatz 2:

449. 13. *orthogonis, vel oxigoniis, vel ampligoniis.* — 16. Die Glosse fehlt.

Damit schliesst Blatt 75[v]. Auf dem untern Rande desselben steht die römische Zahl X, die letzte, welche als Bezeichnung der verschiedenen Lagen vorkommt. Auf Blatt 76[r] steht schon die arabische Nummer 13. Zwischen den Blättern 41 und 47 sind fünf Blätter eingeheftet worden, welche die lateinische Ordnungszahl mit den arabischen in Widerspruch gebracht haben. Wie das gekommen sein dürfte, möchte ich hier noch auseinandersetzen:

Diejenige Hand, welche die ersten 13 Capitel des Gerbert abschrieb, sollte auch noch die Blätter 45 und 46 abschreiben. Da sie jedoch, vielleicht durch die eingeschalteten Figuren, zu weit vorgerückt war, — es blieben dem Schreiber nur noch $2\frac{1}{3}$ Seiten übrig, während er noch 4 Seiten schreiben musste —, so benutzte er die beiden noch übrigen Seiten zu andern Zwecken. Die zweite Hand hatte schon auf die ersten beiden Blätter einer vierblättrigen Lage ihr Pensum zu schreiben angefangen, nahm nun eine weitere vierblättrige Lage, schrieb auf die letzten beiden Blätter das von der ersten Hand Versäumte nach und benutzte die beiden ersten Blätter zu einem andern Stücke. Da aber der Raum von 4 Seiten nicht reichte, so wurde noch, wie deutlich zu sehen ist, ein 5[tes] Blatt eingeheftet. Nehmen wir die fünf Blätter heraus, so ist die durch die lateinische Custodenbezeichnung angeordnete Reihenfolge der Quaternionen vollständig gewahrt.

Der 7. Quaternio hat dann 6 Blätter, der 8. ebenfalls 6 und ist ihm, um für zwei Figuren, für welche sonst der Platz mangeln würde, einfügen zu können, ein etwas kleineres Blatt eingeheftet worden; der 9. besitzt 8 Blätter, ebensoviel der 10. — Die fünf eingehefteten Blätter tragen die arabische Nummer 7, der mit VII bezeichnete Quaternio hat arabisch 8, der mit VIII bezeichnete, wie schon oben gesagt wurde, besitzt die Nummer 9, der mit VIIII bezeichnete die Nummer 10. Bei dem X. Quaternio hat der Schreiber wieder aus Versehen das ganze Blatt, welches das erste und achte desselben bilden sollte, hintereinander beschrieben; es musste daher einzeln eingebunden werden, und so haben denn die Blätter 68 und 69 die arabische Nummer 11, die 6 andern des Quaternio X aber 12. Damit schliesst aber nach unserer Ueberzeugung die ursprünglich beabsichtigte Handschriftensammlung ab, wie schon aus dem Fehlen der römischen Custoden im Folgenden einleuchtend sein dürfte. Wir werden später noch einen weitern Grund für unsere Behauptung aus der Beschaffenheit der Handschrift beibringen.

Auf den $2\frac{1}{3}$ Seiten, welche der erste Schreiber mit andern Sachen ausfüllte, und den drei Blättern, welche der zweite Schreiber einfügte, steht nun Folgendes:

9) Bltt. 40v, 14—23: Gedicht über die Farbe der Lämmer.

Quis color in pullis pecodum si forte requiris,
His poteris signis sine visu noscere certis.
Agnus enim natus **be** *statim clamitat albus,*
Me *referat nigrum repetitis vocibus agnum,*
5 *Alternat varius* **be, me** *sic voce canorus.*
Talibus indiciis protendunt signa coloris.
Si sexum quaeris, his sensum decoque curis.
A *feminas notat, mares* **e** *voce serenat.*
Hoc habeas studium, si vis dinoscere verum,
10 *Numquam falleris, si sic vigilabis in istis.*

10) Blatt 41r enthält zunächst das Fragment einer Anleitung, eine von einem andern gedachte Zahl zu errathen. Ich setze dasselbe hierher, vielleicht gelingt es jemandem, die Herkunft desselben festzustellen.

et ex quincuplatione natum numerum decies ducere. Postea quot centenarii exinde concreverint interroges, et quotquot centenarii fuerint, tu L superesse sciens, ipsosque L cum ducentis auferens, quot centenarii his sublatis remanserunt, tot tu unitates collige, et ex his numerum, quem ille concepit, minime 5 *cuncteris edicere.*[1])

1) In dem CLM. 14908, Bltt. 38v findet sich aus dem XV. Jahrhundert folgende ähnliche Betrachtung. *Nota nym fur dich ein zal, wye uil du wilt, exempli gracia Ich nem fur mich 17. illa duplica; erit 34, adde 5, erit 39; nunc multiplica 39*

11) Daran schliesst sich Bltt. 41ʳ, 7 bis 41ᵛ, 18, das aus den *Carmina Burana* No. 92 bekannte Gedicht „*Ludus scacorum*". So heisst bei uns ebenfalls die Ueberschrift.

Anfang: *Qui cupit egregium scacorum noscere ludum,*
Audiat, ut potui carmine composui.

Schluss: *Sepius est mattus servorum turbine septus,*
Et mattum suffert, si via nulla patet.

12) Darunter stehen die beiden Verse

Quatuor. et penta. duo. monas. tris. mias. unus.
Hinc dias. ambo. trias. unus. dias. et duo. monas.

Sie sind an späterer Stelle (Blatt 80ᵛ) wiederholt und ihre Gebrauchsanweisung beigefügt. Es sind Verse, welche die Anordnung enthalten, um das sogenannte Josephspiel, *ludus Joseph*, mit Christen und Heiden, von denen die Hälfte über Bord geworfen werden soll, so durchzuführen, dass nur Heiden das Loos trifft.

13) Bltt. 42ʳ—44ᵛ enthalten einen arithmetischen Tractat, welchen ich, seines hohen Interesses halber, vollständig folgen lasse. Von der Hand, welche das Inhaltsverzeichniss schrieb, ist übergeschrieben „*Wirceburgensium*". Worauf sich das gründet, wird später klar werden.

42ʳ | DE AGGREGATIONE NATURALIUM NUMERORUM.

Si naturales numeros, id est I, II, III, IV, V et ceteros quotlibet ordinatim volueris aggregare, et quotum pariter conficiant numerum invenire, ultimum aggregandum, si par sit, in duo aequa divide, et per medietatem eius imparem sequentem multiplica. Si autem impar sit, eum nichilominus 5 in duo seces, et per maiorem partem ipsum imparem ultimum scilicet aggregandum multiplices, et numerum totius aggregationis invenies. Taliter autem nati numeri trigoni vel trianguli solent nuncupari.[1])

cum 5 erit 195; adde 10, erit 205; illa multiplica cum 10 facit 2050. Nu merck sein regel, et est 350, dy zeuch ab von der sum, vnd waz vber pleibt; daz tail in 100, et sic factum est. Et idem est, cum vis scire, quid unus iaceret cum tribus taxillis. Noch näher dürfte folgendes aus dem CLM. 14684 dem XIV. Jahrh. angehörend dem Obigen kommen (Blatt 30ᵛ, 23—27): *Si velis scire in quota feria osculatus est aliquis amicam suam, dic ei, quod duplet feriam adiciendo 1, quot totum multiplicet per 5, post hoc productum per 10, et de tota summa reiciat 50. Post hoc quaere hanc certitudinem, quotiens possint 100 subtrahi de tota summa. Si semel sit, est dies dominica, si bis, secunda feria, si ter, tercia feria, et sic deinceps.* Würde hier 5 statt 1 addiert sein, so würde genau die Regel unseres Manuscriptes herauskommen.

1) Ist das letzte Glied $2n$, so ist die Summe $n\,(2n+1)$, ist aber das letzte Glied ungerade, also $2n+1$, so entsteht $(n+1)\,(2n+1)$ als Summe.

DE IMPARI NUMERO AGGREGANDO.

10 Si impares tantum numeros vis aggregare, idem ultimum aggregandum in duo divide ita, ut unitas tantum aequalitatem impediat, et maiorem partem in sese multiplicans, quod quaesieras, invenies. Tales quoque numeri tetragoni vel quadranguli solent nominari.[1])

DE PARIBUS AGGREGANDIS.

15 Si autem pares mavis aggregare, idem proximum imparem sequentem in duo simili modo partire, et per minorem partem maiorem multiplicans repperies, quod quaesieras. Et hii itidem numeri parte altera longiores ab Arithmeticis solent vocari.[2])

Singularis unitas in omnes articulares unitates intenditur, si per singulas 20 superparticulares species tot proportiones assumis, quot duplas a triangulari unitate ponis. Et omnes articulares unitates in singularem unitatem remittantur, si per singulas superparticulares species tot propor|tiones aufero, 42v quot intendendo assumpsisti. Sicut a singulari unitate incipiendum est, cum intendis, item ab articularibus unitatibus item incipiendum est, cum 25 remittis. Quoscumque repperias in superparticulari ultimos praecedentis speciei copulativos, scias esse sequentes eodem numero non eadem parte; et tot ex illis superpatientes procedere, quot superparticulares. Sive intendas, sive remittas, copulativos, quos praedixi, invenire non neglegas. Quibus inventis, si qua incuria deviabis, per illorum inventionem ad certum tramitem 30 remeabis. Sicut pater cum parvulo puero vel filio loquitur, ut ab eo possit intellegi, sponte palbutiit, ita item vellem abacista humili et simplici sermonis mei inductione ad intelligenda, quae dicturus sum, viam parare, si pateretur hoc subtilitas et obscuritas ipsius rei, quae adhuc inculta et ab ipsius sapientiae thesauris noviter producta nemini patet, nisi in nume-35 rorum computatione bene exercitatis, nec his, nisi omni mentis intentione intellectum exhibeant.

In requirendis copulativis memor esto, quoto loco primus subsesqualter ponatur ab unitate, et quem eodem loco triplum invenies ab unitate, sit copulativus sesqualterae et sesquitertiae et radix superbipartientium.

40 Item, quem eodem loco quadruplum invenias ab unitate, sit copulativus sesquitertiae et sesquiquartae radixque supertripartientium.

---

1) Ist das letzte Glied $2n + 1$, so ist dieses nach der Regel in n und $n + 1$ zu theilen. Die Summe aber ist $(n + 1)^2$. 2) Ist wieder das letzte Glied $2n$, so soll $2n + 1$ in n und $n + 1$ zerlegt werden, und die gesuchte Summe ist $n(n + 1)$.

43r Item quem eodem loco quincuplum invenias ab unita|te copulativus sit sesquiquartae et sesquiquintae radixque superquadripartientium.

Item, quem eodem loco sescuplum invenias ab unitate, copulativus sit sesquiquintae et sesquisextae radixque superquinquepartientium. 45

Item, quem eodem loco septuplum invenias ab unitate, copulativus sit sesquisextae et sesquiseptimae radixque supersexpartientium.

Item, quem eodem loco octuplum invenias ab unitate, sit copulativus sesquiseptimae et sesquioctavae radixque superseptempartientium.

Item, quem eodem loco nonuplum invenias ab unitate, sit copulativus 50 sesquioctavae et sesquinonae radixque superoctopartientium.

Hac inventione copulativorum contentus numeros copulativos interpositos his praeceptis quaeras. Secundum arbitrium tuum ordinatis in radice ab unitate duplis, medietatem per ternarium multiplica, et primum sesqualterum procreabis; sic deinceps ternarii per medietatem procreati ducto 55 per solos sesqualteros ad primum copulativum ascendis.

Hic expers medietatis ad procreandum primum sesquitertium tertiam suam multiplicandam dat quaternario; sic deinceps quaternario per tertiam procreati ducto per solos sesquitertios ad secundum copulativum ascendis.

Hic expers tertiae ad procreandum primum sesquiquartum quartam 60 suam multiplicandam dat quinario; sic deinceps quinario per quartam procreati ducto per solos sesquiquartos ad tertium copulativum ascendis.

Hic expers quartae ad procreandum primum sesquiquintum, quintam suam multiplicandam dat senario; sic deinceps senario per quintam pro-43v creati ducto per solos sesquiquintos ad quartum co|pulativum ascendis. 65

Hic expers quintae ad procreandum primum sesquisextum sextam suam multiplicandam dat septenario; sic deinceps septenario per sextam procreati ducto per solos sesquisextos ad quintum copulativum ascendis.

Hic expers sextae ad procreandum primum sesquiseptimum septimam suam multiplicandam dat octonario; sic deinceps octonario per septimam 70 procreati ducto per solos sesquiseptimos ad sextum copulativum ascendis.

Hic expers septimae ad procreandum primum sesquioctavum octavam suam multiplicandam dat novenario; sic deinceps novenario per octavam procreati ducto per solos sesquioctavos ad septimum copulativum ascendis.

Hic expers octavae ad procreandum primum sesquinonum nonam suam 75 multiplicandam dat denario; sic deinceps denario per nonam procreati ducto per tot varietates partium, per tot discrimina proportionum unitas reddit in suam formam.

Insuper haec est admirabilis consideratio huius figurae, in qua continentur tres unitates: prima ex qua intenditur, tertia de qua remittitur, 80 media per quam intenditur et remittitur, et quod per omnes assumptiones

superparticularium proportionum partes numeris, quibus partes fiunt, et forma et quantitate diversae sunt; in solis sesquinonis partes numeris suis fiunt conformes, et sicut transcensis sesquinonis unitas reddit in suam
85 formam, ita transcensis sesquioctavis in sesquinonis eadem est forma numerorum, quae suarum partium.

Nec illud praetereundum | est, quod in singulis superparticularibus 44r speciebus duae certae et legitimae partes inveniuntur in sesquialteris media et tertia, in sesquitertiis tertia et quarta, in sesquiquartis quarta et quinta,
90 in sesquiquintis quinta et sexta, in sesquisextis sexta et septima, in sesquiseptimis septima et octava, in sesquioctavis octava et nona, in sesquinonis nona et decima, ita ut prima omnium dux sit ad intendendum, secunda omnium dux sit ad remittendum. Non enim uniformiter intuenda est haec intentio ab unitate, cuius singularis et simplex assumptio fit VIIII modis,
95 quorum primus assumit in superparticulari VIII, numerus secundus XVI, tertius XXIIII, quartus XXXII, quintus XL, sextus XLVIII, septimus LVI, octavus LXIIII, nonus LXXII, ut omnes assumptiones octonario numerositate se transcendant. Sed nos computistarum sollertiae ceteros numeros relinquentes, ultimum et maximum cum omni diligentia et magna affectione
100 speciem cum suis partibus, quorum generatio talis est. Primi copulativi tertiam per V multiplica, et primum superbipartientum procreasti, sic deinceps quinario per tertiam procreati ducto ceteros superbipartientes aggregasti. Item secundi copulativi quartam per VII multiplica, et primum supertripartientem procreasti; sic deinceps septenario per quartam procreati
105 ducto ceteros supertripartientes aggregasti. Item tertii copulativi quintam per VIIII multiplica, et primum superquadripartientem procreasti; sic deinceps novenario per quintam procreati ducto ceteros superquadripartientes aggregasti. | Item quarti copulativi sextam per XI multiplica, et primum 44v superquinquepartientem procreasti; sic deinceps undenario per sextam
110 procreati ducto ceteros superquinquepartientes aggregasti. Item quinti copulativi septimam per XIII multiplica et primum supersexpartientem procreasti, sic deinceps XIII⁰ per septimam procreati ducto ceteros supersexpartientes aggregasti. Item sexti copulativi octavam per XV multiplica, et primam superseptempartientem procreasti; sic deinceps XV⁰ per octavam
115 procreati ducto ceteros superseptempartientes aggregasti. Item septimi copulativi nonam per XVII multiplica, et primum superoctopartientem procreasti; sic deinceps XVII⁰ per nonam procreati ducto ceteros superoctopartientes aggregasti.

Sufficiant haec praecepta de sola intentione unitatis huius scientiae
120 amatoribus. Quem copiosior investigatio delectet, certus sit, omnium digitorum reformationem si id(!) articulis reperturum, si per singulas super-

particulares species tot proportiones assumuntur, quot dupli a singulari digito ponuntur. Praeterea inveniuntur in hac calculatione reformationes ab omnibus speciebus multiplicis. Sed nos *Wirzeburgenses*[1]) de illis dicere differimus, donec cognoscamus, quid inde moderni iudicant philosophi, utrum nostrum an veterum aestiment inventum, tribuant ab illis residuas reformationes requirant. 125

Eine Reihe, wie sie der Autor fordert, ist z. B. die folgende:

1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81, 90, 100.

Die *numeri copulativi* sind hier 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90. Zuerst ist zweimal die *proportio dupla* vorhanden, dann zweimal *proportio sesqualtera*, da aber 9 *expers est medietatis*, so tritt nun die *Proportio sesquitertia* zweimal auf; ebenso ist wieder 16 *expers tertiae etc.* Zuletzt ist 81 *expers octavae*, deshalb tritt an Stelle der *proportio sesquioctava* die *sesquinona*, welche dann nach noch zweimaliger Anwendung die 100 zum Vorschein kommen lässt, den *articulus* zu dem *digitus* 1. Anders ausgedrückt lässt sich die obige Reihe auch in der Form folgenden Produktes schreiben:

$$1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} = 100.$$

Geht man etwa von dem *digitus* 5 aus, so erhält man die Reihe:

5, 10, 20, 40, 60, 90, 135, 180, 240, 320, 400, 500, 625, 750, 900, 1080, 1296, 1512, 1764, 2058, 2401, 2744, 3136, 3584, 4096, 4608, 5148, 5832, 6561, 7290, 8100, 9000, 10000

oder als Produkt geschrieben:

$$5 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot$$
$$\cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} = 10000.$$

14) Nach der *Geometria Gerberti* folgt jetzt Blatt 76^r—77^v, 6 ein Stück mit dem Anfange: „*Tria Genera Musicae studiosis comprehensa esse feruntur*" und dem Schlusse: „*Octavum habet primum in se duplum*". Nach dem Handschriftenverzeichniss ist es ein *Tractatus de mensura fistularum organicarum*, Auszug aus Aureliani *de Musica* in dem Sammelwerke Gerberts.[2])

15) Daran schliesst sich ohne irgend welchen Absatz Blatt 77^v, 7—18: ein Abschnitt *de Luna*. Anfang: „*Etatem lunae multiplica per quatuor*", Schluss: „*Ubicumque haec lunatio completa fuerit, in die sive in nocte ibi sequentis initium esse cognoscat.*"

16) In derselben Zeile fortfahrend erstreckt sich dann bis Blatt 78^r, 15 ein Stück „*de mensuris*". Anfang: „*Hora habet punctos V. Minuta X.*

---

1) Hieraus hat der spätere Glossator seine Ueberschrift „*Wirceburgensium*" genommen. 2) *Scriptores ecclesiastici de musica*. St. Blasien 1784. Bnd. I, S. 32 ff.

Uncias XII, partes XV. Momenta XL, Ostenta LX" und schliesst: „*Centuria antiquitus C iugerum erat, postea duplicium. pristinum tamen obtinuit nomen.*"

17) Von Blatt 78^r, 15 bis 78^v, 5 findet sich wiederum absolut anschliessend der dritte Absatz des Cap. 82 von GERBERTS *Geometrie* (OLLERIS, 464—465). *Varia lectio:* **464.** 19. *alia* fehlt. — 20. *vel trium* fehlt; *sit* fehlt; *vel IV* fehlt. — 20—21. *vel V* fehlt; *rem illam.* — 23. *ad terram* fehlt; *in summum.* — 23—24. *illic, ubi basis hypotenusae iungatur.* — 25. *que* fehlt; *summum tibi.* — 27. *et* fehlt. —

465. 1. *illius, et hoc spatio.* — 2. *altitudine illa, de qua.* — 2—3. *Haec ratio pro altitudine certissima est.* — 4. *plana sit.* —

18) Blatt 78^v, 6—80^r, 17: „*Incipiunt numeri, per quos potest, qui voluerit, alterius cogitationes cognoscere de numero quolibet, quem animo conceperit.*"

Das Stück ist abgedruckt in *Bedae venerabilis opera*[1]), und ich gebe hierunter die Abweichungen der Handschrift dem Drucke gegenüber an.

Theil I, Spalte 100. 2. *assumetur.* — 3—4. *Qui triplicatus.* — 6—7. *fuerint. iterum triplicabis, quae maior fuerit.* — 8. *triplicatur VIIII; possunt.* — 10. *est autem quod postquam triplicetur.* — 13. *fuerit.* — 13—14. *remansissent.* — 14. *aliquod supra remansit.* — 16. *est numerus; mente fuerat.* — 18—19. *fiunt VI. Sex vero diuisi per binarium III fiunt. Qui triplicati in VIIII consurgunt, nec aliquid remanet.* — 20. *primum.* — 22. *et* fehlt.

101. 1—3. *in senarium* bis *dictum* fehlt. — 5. *idem* fehlt. — 8. *quilibet* fehlt. — 8—9. *ac triplicetur, triplicatus vero.* — 10. *numeri* fehlt. — 11. *esse ambas.* — 12. *unus adsumatur.* — 21. *quot novenarii in eis; interrogetur.* — 23. *quot* statt *quotquot; tot novenarios.* — 24. *ut* fehlt. — 25. *faciunt, qui divisi.* — 27. *qui divisi.* — 29. *est* fehlt. — 29. *sunt* fehlt. — 30. *tunc in maiori.* — 31. *In quatuordecim semel, de his IIII.* — 33. *fiunt VI.* — 34. *primum.* — 36. *paritati* fehlt. — 39. *quia haec bis diuiditur et triplicatur.* — 41. *vero* fehlt. — 43. *quislibet.* — 44. *Quamcumque.* — 44—45. *cuius feriae.* — 47. *iungere debet; est* fehlt. — 48. *decies totum.* — 49. *toto CCL tollere.* — 50. *teneto, ut* fehlt. — 52. *quinquies ducti; qui decies.* — 53. *de totius summae collectione* fehlt. — 54. *et* fehlt; *centenarii remanserint.* — 55. *superius dictum est.* — 60. *quinquies fiunt XLV.* — 60—61. *decies fiunt ducti.* — 62—70. *si de tertia* bis *significant* fehlt. — 70. *qui quinquies.* — 71. *fiunt* fehlt. — 72. *qui* bis *significat* fehlt; *si autem de.* —

---

1) *Venerabilis Bedae Presbyteri Anglo-Saxonis viri sua aetate doctissimi Opera quotquot reperiri potuerunt omnia. Hac ultima impressione ornatius in lucem edita.* Coloniae Agrippinae Sumptibus Johannis Wilhelmi Friessem. Anno MDCLXXXVIII. 8 Bde. fol. ist die benutzte Ausgabe.

73. *VII*ª *ratio habeatur; fiunt XIIII.* — 74. *qui quinquies; fiunt CV. Hi vero decies.* —

102. 1. *multiplicati fiunt; et remanent.* — 3. *tuum* fehlt.[1])

19) Das Blatt 80ʳ, 17—80ᵛ 18 Befindliche ziehe ich seines Interesses halber vor vollständig mitzutheilen. Es lautet:

A E I O V (with dots above: : ⁝ . ∷ ⁙)

V ⁝ RS ⁙ S ✝ B ∷ N · F : C ·· ⁝ P · SC ∷ P · GL ∷ R · ∷ S · Q ⁙ ⁝ M : RT · R · S

Genus huius descriptionis, tam quod supra punctis V et vocalibus, quam subtus equalibus vocalibus, quam solitum est, informatum continetur, fertur, quod sanctus Bonifacius archiepiscopus et martyr de angulis saxis veniens hoc antecessoribus nostris demonstraret, quod tamen non illo inprimis coeptum est, sed ab antiquis istius modi usus crevisse comperimus.

B · F · K · P · X · KBRXS · XP̄PFPRIKS · TKRPKNS TERSBFFKRP · BRCHKIF · NFNSSCKPTPRRFGNKXTDFCXS · B · O · X · R · K · A · E · I · O · V · B · F · K · P · X.[2])

20) Ad fures inveniendos scribis in quattuor foliis lauri ana ✳BAAA ÑAhAnAAABANAA, et mittis immissorio, et vocas, quem suspectum habes, et manducare non poterit. Ad fures inveniendum pingis in IIIIᵒʳ foliis lauri ªa ⁝ ✳B33 ⁝ 333 istas formulas, et vocas eum, quem suspectum habes, manducare non poterit.

21) Quatuor · et pentas · duo · monas . tris · mias · unus.
Hinc dias · ambo · trias · unus · dias · et duo · monas.

Quorum quidem versuum universalis regula tali poterit monstrari experientia, ut non solum sicut in his versibus auferendi auferantur, sed etiam quovis numero, quos volueris tollantur. Ponantur enim quilibet numeri duplici proportione constituti, quorum, quem vis remanere, duplus ponatur, quem vero vis auferre, subduplus ponatur. Computo solummodo per VIIII, vel VIII, vel quemcumque numerum voluero, et quem VIIII, vel VIII, vel quicumque numerus, per quem computavi, monstraverit, tollo,

---

1) In dem bekannten Buche des Jesuiten Leurechon: „*Recreation mathematique. Composee de plusieurs problemes plaisants et facetieux En faict d'Arithmetique Geometrie, Mechanique, Opticque, et autres parties de ces belles sciences. Au Pont-a-Mousson. M.DC.XXVI.*" ist das *Probleme I. Deuiner le nombre que quelqu'un aurait pensé,* nichts weiter als eine ziemlich wörtliche Uebersetzung dieser Abhandlung von Beda dem Ehrwürdigen. Ob schon der Vorgänger Leurechons, Bachet, dieselbe aufgenommen hatte, ist mir nicht bekannt. 2) Dass hier der Schreiber seine Vorlage falsch abgeschrieben hat, ist klar. Es soll überall *A* durch *B*, *E* durch *F*, *I* durch *K*, *O* durch *P*, *U* durch *X* wiedergegeben sein. Anfang und Schluss sind klar: *A.E.I.O.V. Karus Christoforius Tiro . . . . . architenens sciotoregni ut decus auri AEIOUBFKPX,* aber die Zwischenworte zur Lösung zu bringen, ist uns nicht gelungen.

et inde duplos tuli, subduplos pono, et eodem duplos, quo ordine positi, 25 si auferendi sunt, aufero.[1])

22) Hieran schliessen sich wieder (Blatt 80v, 19—82v) von derselben Hand ohne jeden Absatz geschriebene Wiederholungen von Capiteln der GERBERTschen Geometrie und zwar von den Olleris-Capiteln die Nummern 22, 23, 28, 32, 34, 35, von denen das letzte mitten im Satze abbricht, so dass der Schreiber des Inhaltsverzeichnisses darunter „deest" geschrieben hat. Figuren sind nicht beigegeben, die Hand ist keine von denen, welche früher in der Geometrie GERBERTS vorgekommen sind. Ich lasse die Varianten hier folgen.

433. (Cap. 22.) 4. *cuiusque.* — 5. *dumtaxat.* — 6. *halgidadae.* — 8—9. *halgidadae.* — 8. *stet* bis *supra* fehlt. — 10. *proportionum altitudo* fehlt. — 12. *habent.* — 12—13. *umbrae.* — 15. *si omnes XII.* — 17. *halgidada.* — 18. *corporis erecti.* — 20. *transversum.*

(Cap. 23.) 23. *Si vero est invenire; operatio sit.* — 24. *quacumque cuiusque diei; astrolabium.* — 25—26. *et* bis *corpore* fehlt. —

437. (Cap. 28.) Stimmt absolut mit der oben (S. 90) gegebenen *varia lectio* überein, auch darin, dass die zweite Beschreibung des *quadratum geometricum* sich nicht vorfindet.

439—440. (Cap. 32.) 5. *est* fehlt. — 6. *sit notum.* — Alle übrigen Varianten sind die nämlichen wie oben (S. 85).

442. (Cap. 34.) 5. *Puteus autem.* — 6. *et* fehlt; *in profunditate.* — 7—8. *pedes tuos hasta alia similis.* — Auch die übrigen Varianten, besonders die Einschaltungen gegen den Druck, wie sie oben (S. 92—93) angegeben sind, sind vorhanden.

---

1) Die Aufgabe wird zuerst in HEGESIPPUS *de bello judaico* erwähnt. CANTOR hat sie als Bestandtheil der mathematischen Betrachtung zuerst bei CHUQUET im XV. Jahrh. nachweisen können. Hier haben wir sie schon aus dem XI. Jahrh. und zwar offenbar nicht als etwas Neues, sondern auch schon als alten Bestand. Der Verfasser scheint sich nur die allgemeine Lösung zuzuschreiben, dass nicht, wie bei der gewöhnlichen, es immer der neunte Mann sein muss, welchen das Loos trifft. Aus dem Clm. 14908 auch dem XV. Jahrh. angehörend, wie CHUQUET, entnehme ich über dieses sogenannte Josephspiel folgende Merkverse. Die hinzugeschriebenen Zahlen besagen, der Wievielte jedesmal durch das Loos ausgemerzt werden soll. Nur die Vokale haben den Zahlenwerth $a = 1$, $e = 2$, $i = 3$, $o = 4$, $u = 5$.

Rex angli cum veste bona dat signa serena. 10.
Non dum pena minas a te declina degeas. 9
Arte parare mea veniant adistere secte. 8
Larga dei pietas bene manes omnia papam. 6
Ibant per montes, querebant desidiosa. 12 proponendo videas.
Item 15 christiani et 15 iudei.

Siehe des Weitern meine Abhandlungen in der *Bibliotheca mathematica* 1894 und 1895, wo Nachweisungen aus dem X. und XII. Jahrhundert gegeben sind.

(Cap. 35.) Stimmt ebenfalls mit der früheren Lesart überein. Der Schluss von Seite **443**, 3 *plum est* bis *in aliis* (Zeile 5) fehlt.

23) Mit Blatt 83^r^ beginnen Auszüge aus den *Gromatici veteres*[1]; und zwar *Nomina limitum et agrorum*[2]) (I, 246, 25—249, 5), beide jedoch in folgender Weise durcheinander gemischt (Blatt 83^r^, 1—17):

Orientales dicuntur decumani. Ager assignatus. Septemtrionales. cardines. Ager centuriatus. Maximi k. m. Ager subseciuus. Actuarii. Ager dextratus. Intercisiui. Ager citratus. Quintarii. Ager tesselatus. Cultellati. Ager normalis. Nouali. Ager triumuiralis. Maritimi. Ager neronianus podismatus. Temporales qui solis ortum sunt secuti. Ager 5 commutatus ex beneficio Augusti. Gallici. Ager locorum. Regales. Ager sinistratus. Subruncivi. Ager ultratus. Sellati. Ager epidonicus. Linearii. Ager tetragonus. Sextanei. Ager cultellatus. Tetragonales. Ager solitarius sylanus. Montani. Ager caesarianus. Austrinales. Ager meridianus. in XXV iuga. Qui per anticam et posticam diuiduntur. In potenii salas. 10 Prefecturales. Ager ex alieno sumptus. Egregii. Ager cineribus deputatus. Undecimani. Ager intraclusus. Colonici. Ager qui finibus augustinori continet. Passivi. Solitarii et Perpetui. —

Blatt 83^r^, 18—83^v^ 18 folgt *Ratio limitum regundorum* (I. 358, 15—359, 10). Die Namen der Limites *A* · *B* · *C* u. s. w. fehlen. Bei *I* fehlt die Angabe der Länge. Bei *K* steht CCCL statt ∞CL; bei *L* statt ∞ ∞, CCCC; bei *N* CC statt ∞C; bei *O* CCC statt ∞C; bei *T* MC statt MD; bei *V* MCC statt MDC; bei *Z* endlich MCCCC statt MCCC. —

Es folgt 83^v^, 19—20. *De mensuratione iugeri* (I, 359, 12—13). Darin steht *terram* für *terra*. Weiter

83^v^, 21—84^v^, 12. *De compositione limitum vel terminorum*. So die Ueberschrift des Codex. (I. 359, 15—360, 32): **359.** 17—18. *interpretaretur non extorquet, sed ita est.* — 20. *extorquet.* — 22. *Babylonis* fehlt. — 23. *impinguet.* — 25. *inveniuntur signa.*

360. 6. *cissuram.* — 10. *victum.* — 11. *epictaticum; massaticium.* — 15. *fontentem(!).* — 17. *scissuram.* — 18. *scissum.* — 20. *Terminus si trestas circa(!).* — 21. *nominum bifurcium samarcia.* — 22—23. *si* bis *dare* fehlt. — 25. *olivastellam.* — 26. *convallium.* — 28. *demonstrat.* — 31. *demappas.*

---

1) Die Schriften der Römischen Feldmesser bearbeitet und herausgegeben von F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff. Erster Band. Texte und Zeichnungen. Berlin bei Georg Reimer 1848. Auch unter dem Titel: *Gromatici Veteres ex recensione Caroli Lachmanni. Diagrammata edidit Adolfus Rudorffius.* Berolini Impensis Georgii Reimer. 1848. 2) Der Titel findet sich nicht in der Handschrift. Im Folgenden wird stets gesagt werden, ob das Manuscript die betreffende Capitelüberschrift hat, oder nicht.

Ohne weitere Ueberschrift folgt (Blatt 84ᵛ, 12—85ʳ, 17) Gr. V. I. 361, 3—362, 6.

361. 3. *invenies in quadrifinio.* — 4. *sunt positae in qudrifinio.* — 7. *et* fehlt. — 9—10. fehlen. — 11. *in fine.* — 14. *Pressum.* — 15. *Olivastellam.* — 20. *direxerimus.* — 21. *direxerimus.* — 25. *in fine* fehlt. — 32. *collectarium.* — 33. *picititos.* —

362. 2. *nativales.* — 6. *observantur.* —

Nun folgt mit der Ueberschrift: *Quomodo literae latinae sive graecae terminorum rationem et locorum qualitatem designant,* erst von Blatt 85ʳ, 17—86ᵛ, letzte Zeile I, 362, 30—364, 22 und daran ohne Unterbrechung anschliessend (Blatt 86ʳ, l. Z.—87ʳ, 18) I, 325, 12—327, 3.

362. 30. *in singulis terminis; quas.* — 31. *sunt nudorum sed rationes.* —

363. 3. *invenies* fehlt; *bifurcium.* — 7. *decimanum.* — 18. *rigarum.* — 20. *invenies* fehlt. — 24. *finalem.* — 28. *habentes atque a septentrione.*

364. 2. *signis aliis; finales literas.* — 3. *tytulus* beidemale. — 6. *rivum respicit.* — 7. *collicaelum.* — 9. *inveneris; possionem.* — 15. *decumano fine.* — 17. *habet* fehlt. —

325. 14. *vivas duo sub se flumina.* — 15. *aspectus.* — 16. *mordet ibidem.* — 21. *si colligit.* — 25. *iacet* fehlt. —

326. 2. *vivam, habet flumen.* — 4. *sub* fehlt. — 7. *inferius laucrum est.* — 9. *colliget.* — 10. *gramen germanum.* — 13. *vivam aquam.* — (π und ϱ sind miteinander vertauscht). — 17—18. *vivam aquam.* — 19—20. *revertitur in aquam.* — 22. *habet* fehlt. — 25. *et* fehlt. — 25—26. *et* bis *inferius* fehlt. —

Mit der Ueberschrift: *De conditionibus et mensuris agrorum* folgt nun Blatt 87ʳ, 18—89ʳ, 4; I. 354, 2—356, 10.

354. 2. *iugerum; CCLXCXVIII.* — 15. *igitur una tabula perticas quadratas.* — 6. *per unum latus.* — 27. *L, nam eum metiri; quot.* — 8. *se* fehlt. — 9. *VIII tabulas* fehlt. — 10. fehlt. — 12. *multiplica.* — 13. *si sumis.* — 14. *remaneant.* — 19. ∞ fehlt; *tabulam unam LXMDCCCLX.* — 20—21. *trigonia ysopleurus.* — 21. *unum latus.* — 22. Das erste *latus* fehlt. — 23. *quae sunt; tabulas.* — 24. *perticas.*

355. 1. *in uno latere.* — 2. Die drei *et* fehlen. — 3. *dividis.* — 5. *quem dividi.* — 8. Ueberschrift: *De agro lunato.* — 9. *aequas* fehlt. — 10. *et unam partem facis.* — 12. *II tabulae.* — 15. *habeat* fehlt. — 18. *decimam* fehlt; *DCXXVI S.* — 19. *diximus esse.* — 21. *rotundus erit.* — 22. *diametrum.* — 26. *unum pedum est V.*[1]) — 27. *perticas XXIII.* —

356. 2—3. Statt *esto* bis *basi* steht: *XX XX coniungo numerum.* —

---

1) Hier ist natürlich die Abkürzung für *quincunx* ⩪ als *est* gelesen.

4—6. *horum* bis *sunt* X fehlt. — 8. *diximus.* — 8—9. *iunctus itaque numerus.* — 9. *perticas* fehlt. — 10. *hoc* fehlt. —

24) Hieran schliessen sich zunächst Blatt 89r, 5—90r, 10 einige von Cantor in seinen Agrimensoren veröffentlichte Stücke aus Epaphroditus, die ich mir erlaube unter Zuhilfenahme des Cantorschen Textes herzustellen.

89r, 5 Seite 208. § 7. | Ager est longus pedum [CXX, latus pedum] LXX in quo dispositae sunt arbores XvX inter pedes V. si vis scire numerum arborum, quae in eo consitae sunt, sumas longitudinis partem quintam, quod haec est XXIIII, similiter et latitudinis quintam partem, quod est XIIII. His adicias bases singulas, ut fient XXV et quindecim. Dehinc multiplices 5 latitudinem per longitudinem sive longitudinem per latitudinem, quindecies enim XXV sive vigesies quinquies XV faciunt trecentos LXX quinque: tot sunt enim arbores.

Daran schliesst sich folgende Fortsetzung, deren Sinn unklar ist:

Sint in agro LXX arbores CCCLXXII. Huius summae quaero latus, fit CXCII, huic adicio VIII fit CC. sumpta parte XXa fit X. his de aglos(!). 10

Nun folgen:

89v § 25. Sphaera est, cuius diametrum pedum XIIII, quaero | huius sphaerae inauraturam, hoc est profunditatem sive spissitudinem. Sic quaero. Diametrum duco bis, fit XXVIII. Hoc multiplico in se, vigesies octies XXVIII faciunt DCCLXXXIIII. hoc duco per XI, fit $\overline{\text{VIII}}$. DCXXIIII. huius summae sumpta parte XIIIIa fiunt DCXVI; tot pedum erit huius sphaerae in- 15 auratura.[1])

§ 26. Si fuerit cyclus, cuius diametrum est pedum XIIII, quadrati huius aream quaero hoc modo. Multiplico diametrum in se, fit CXCVI, et hoc duo undecies, fiunt $\overline{\text{II}}$ · CLVI. huius summae sumo partem quartam decimam, fit CLIIII; tot pedum erit huius cycli embadum, hoc est area. 20

§ 27. Si fuerit circuitio pedum XLIIII, diametrum pedum XIIII, quaero huius areae pedes per hunc modum. Sumo circuitionis partem dimidiam, fit XXII, diametri dimidiam partem, quod est VII. hoc duco per XXII, fit CLIIII; tot erunt huius areae pedes.

§ 28. Si fuerit emicyclus, cuius sit basis pedum XXVIII, curvatura 25 pedum XIIII, quaero huius emicycli aream. Sic quaero. multiplicabo basim huius emicycli per curvaturam, id est XXVIII per XIIII, fit CCCXCII. hoc 90r duco per XI, fiunt $\overline{\text{IIII}}$ · CCCXII. | sumpta parte quarta decima fit CCCVIII, tot pedum est huius emicycli area.

§ 29. Absidem ad circinum datam sic quaero. curvaturam altitudinis 30 per basim multiplicatam duco undecies. sumo partem quartam decimam; erit embadum.

1) Ueber *inauratura* siehe die Anmerkung am Schlusse der Abhandlung.

§ 30. In trigono orthogonio circulum inscribere si vis, qui omnes eius lineas tangat sic quaere. iunge kathetum et basim, deme hypotenusam, 35 erit diametron circuli.

25) Daran schliessen sich noch einige ähnliche Paragraphen Blatt 90^r, 11—90^v 5.

Sphaera fuerit data, cuius dyameter sit pedum VII, eius solidos pedes sic quaere. Multiplico dyametrum, id est VII in cubo. Primo in se, fit pedes XLVIIII. Deinde hoc rursus per VII, fiunt pedes CCCXLIII. hoc semper ducimus per undecim, fiunt $\overline{\text{III}}$ · DCC · LXXIII pedum. Huius 40 sumamus partem XXI, fiunt pedes CLXXVIIII; tot pedum erit eiusdem inauratum.[1])

Si datus fuerit circulus, cuius area habet pedes VI centos XVI, et scire volueris dyametrum eius | sic invenias. ducas quater decies areae 90^v pedes, fiunt pedes $\overline{\text{VIII}}$ · DC · XXXIII. Dehinc hanc summam partiaris 45 per XI, fit undecima pars DCCLXXXIIII. Huius summae latus est XXVIII; tot pedum erit diametrum.

26) Es folgt ein Abschnitt (Blatt 90^v, 5—92^r, 14) mit der Ueberschrift:

DE GEOMETRIA COLUMNARUM ET MENSURIS ALIIS.

Geometria columnarum hoc modo fieri debet ab artifice, ut fiat, quantum grossa possit esse, quantaque eius longitudo fuerit. Columna septimam partem longitudinis debet habere in imo, hoc est in parte, quae 5 supra pedem manet. Superior autem pars columnae, ubi capitellum insidet, octauam partem debet longitudinis tenere.[2])

Mensura columnarum, ut possit aestimari, quantam altitudinem possit tenere mensurandi in circuitu. Si habuerit collurus super stragulum in circuitu pedes V, habebis in altum colluris pedes XII et dimidiam. Si 10 habuerit vero collurus in circuitu pedes (X), habebis in altum pedes XXV, quoniam unus pes in circuitu levat in altum pedes duos et dimidiam.

Si columna fuerit, quae sit in imo lata pedum XIII, in summo lata pedum V, alta pedum XXX, si scire voluerimus, quot pedes solidos haec teneant, multiplicemus latitudinem imam in se, hoc est XIII, fiunt CLXVIIII. 15 Dehinc multiplicemus summam latitudinem in se, hoc est V, fiunt XXV. Deinde multiplicemus primam summam quinquies, quinquies enim XIII fiunt LXV. Post haec metiamur has tres summas in unum, fiunt CCLVIIII. Haec ducamus per XI. Undecies enim CCLVIIII faciunt $\overline{\text{II}}$ · DCCC · XLVIIII. Hinc igitur sumamus partem decimam quartam, quod sunt CCIII et semis.

1) Quelle vom 2. Absatz des Cap. 82 bei Gerbert Olleris 464. 2) Dies ist die Quelle für den ersten Absatz von Gerberts Cap. 82. (Olleris, *464.*)

illud quae ducamus per XXX fiunt $\overline{\text{VI}}$ · CV. Huius summae facimus octavam 20 partem fiunt DCCLXIII, tot erunt solidi pedes huius columnae.[1])

Pes quadratus tenetur VIII pedibus, palmis LXVIII, unciis mille DCCXXVIII, digitis $\overline{\text{IIII}}$ · XCIII. Digitus unus £, pes quadratus amphoram capit semipedem longum, semipedem latum et altum, capit congium. hac ratione semis per semum fit, et semispes fit. Semper enim longum per 25 latum et per altum erunt pedes quadrati.

Mensura unius pedis quadratos si habuerit in altum digitos XVI, grassitudinem digitos XVI, computa XVI digitos in se fit CCLVI, et rursus computa digitos XVI per CCLVI, fiunt in unum digiti $\overline{\text{IIII}}$ · XCVI; tantum colligit. Unus pes quadratus capit sextarios urbi CCLXCVI. 30

Si cupa, id est vagina, in imo per dyametrum habet IIII pedes, in summo pedes II, in medio V, alta pedum XII, si vis cognoscere, quot amphoras capiat, sic quaeras. Multiplica dyametrum medium in se, id est V, fiunt XXV; id duplices, fiunt L. Post dyametrum multiplices secundum in se. coniunge X et IIII, fiunt XIIII; hoc iunge ad XLV, fiunt LVIIII. Item multiplicemus 35 dyametrum imum in se, quod sunt duo, fiunt IIII. iungo cum summa superiore, fiunt LXIIII. iungo dehinc in unum dyametrum imum ac summum, fiunt V. multiplicemus per dyametrum medium, hoc est V, fiunt XXV. Hoc iungo ad summam superiorem, fiunt in unum DCCCCLXVIII. hunc numerum diuido per tertiam altitudinem, hoc est per dyametrum tertium, 40 quod est quatuor, fiunt $\overline{\text{II}}$ · XLII; tot erunt amphorae in cupa nominata.[2])

---

1) Ist d_1 der untere, d_2 der obere Durchmesser, h die Höhe, so würde die Anweisung auf folgende Formel herauskommen:

$$v = \frac{11}{14} \cdot \frac{h}{8} (d_1{}^2 + d_1 d_2 + d_2{}^2),$$

während die richtige Formel heissen müsste:

$$v = \frac{11}{14} \cdot \frac{h}{3} (d_1{}^2 + d_1 d_2 + d_2{}^2).$$

Sollte etwa an cannelierte Säulen zu denken sein? 2) Hier ist überhaupt aus der ganzen Auseinandersetzung nicht klug zu werden; jedenfalls muss die letzte Zahl CCXLII heissen. Nach der Handschrift *„Clm. 14783“* Bltt. 479ᵛ—480 heisst die Regel so: „Multipliciere den mittlern, den obern und den untern „Durchmesser in sich selbst; dann den obern in den mittlern und den „untern und addiere alles. Darauf multipliciere die Summe mit $\frac{11}{14}$ und „dann noch mit dem dritten Theile der Höhe, so ist das Produkt der „Inhalt des Gefässes.“ Sind d_1, d_2, d_3 die drei Durchmesser die Höhe h, so lautet die Vorschrift also so

$$v = \frac{11}{14} \cdot \frac{h}{3} (d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2 + d_3 (d_1 + d_2)).$$

Da heisst das Beispiel $d_1 = 6$, $d_2 = 5$, $d_3 = 2$, $h = 12$, und das richtige Resultat giebt $272\frac{20}{14}$!

Si fuerit puteus, cuius dyametrum sit pedum VI, altitudo XL pedum, et quaeritur, quot amphoras capiat. Sic quaere. Primum inveniamus aream, cuius dyametrum fiat IIII m(!), et remanent DXX. huius summae tolle XIII^am^
15 partem, quod est quadraginta. Hoc duc per altum, fiunt mille ducenti. Tot amphoras continet nominatus puteus.

27) Blatt 92^r^, 14—93^r^, 6 folgen zwei Abschnitte aus Hyginus *de limitibus constituendis* (I, 170, 3—8; 182, 14—183, 16) mit der Ueberschrift.

„*De limitibus constituendis secundum rationem solis*“.

Abweichende Lesarten sind:

170. 3. *per mundi.* — 4. *quod in semel; ferramenta.* — 5. *postea auspicaliter.* — 7. *limites duxerunt.* — 8. *in VIam horam non continet.*

182. 14. *quia ad.* — 14—15. *usi sunt hac ratione.* — 16. *crediderint, aut fefellit scientia errorem.* — 17. *neglexerint; contenti ei.* —

183. 1. *metiri.* — 1—2. *ortum singulis regionibus rectum esse.* — 3. *descendat.* — 4. *quicquid.* — 7. *non est facile, quia.* — 9. *si* fehlt; *illa.* — 10. *altero.* — 11. *apertiori.* — 12. *quo; citius.* — 12—13. *si non longe a monte nascatur cardo sive decumen.* — 14. *cursus recte potest comprehendi.* — 15. *luceat adhuc.* — 15—16. *et eidem campis adhuc interiori parte refulgeat.* —

28) Nun kommt ein Stück aus Boethius (Blatt 93^r^, 6—94^r^ 5) I, 378, 14—379, 21. Die ersten Zeilen stehen so:

Trilaterum nec non amplius, in quo obtusus angulus fuerit. Oxygonium vero, id est acutum angulum, in quo tres anguli sunt acuti, vero quod est obtusum angulum, in quo obtusus angulus fuerit, figurarum formae sunt. In orthogonium, id est rectiangulum, quod quidem ut triangulum, quod
5 habet angulum rectum, ambligonium vero, quod est angulum obtusum.

Weiter folgen die Varianten:

378. 20. *quadratum figuratur.* — 22—23. *sed non est aequilaterum.* —

379. 1—2. *angulos tenet compares, id est autem non rectis.* — 2. *nec comparibus continetur lateribus.* — 3. *Praeter ista.* — 4. *coloniae; cognominantur.* — 6. *coniunctae atque.* — 8. *thimata; id est* fehlt; *partitus ab.* — 9. *omnem; lineam rectam.* — 12. *aequos sub centro; sibi* bis *esse* fehlt. — 13. *et* bis *partes* fehlt. — 14. *composuerit minores.* — 15. *lineas metiri ad eas.* — 17. *ynas et nyas.* — 18. *haec, quae sunt idem sunt comparia.* — 18—19. *comparia.* — 19. *a paribus paria.* —

Es fährt noch mit Gr. Vet. I. 385, 23—386, 2 fort: *Gnomon ergo parallelogrammi spatii eorum, quae circa eandem sunt dyametrum, quodlibet unum quinque cum supplementis duobus*

29) Ohne irgend welchen Absatz folgt Blatt 94r, 5—95r, 4 ein Abschnitt mit der Ueberschrift

94r, 5 | DE PROPORTIONE.[1])

Magnitudo minor maioris magnitudinis mentis, quando minor maiorem magnitudinem permetitur. Maior ergo magnitudo minoris magnitudinis multiplex est, quotiens a minore maior integra dimensione completur. Proportio est duarum magnitudinum cogunt(!) ad se invicem comparatione veniens magnitudo. Proportiones vero ad se invicem tenere dicuntur, quae 5 possunt esse invicem multiplicationem transscendere. Eandem ergo proportionem prima magnitudo ad secundam magnitudinem, tertia ad quartam tenere prohibemus, quando primae aut tertiae magnitudinum per quae multiplices eas, quae sunt secundae atque tertiae, aeque multiplices, vel simul transcendant, vel ab his pariter transcenduntur, vel bis in simul exse- 10 quuntur, cum scilicet in alterna comparatione sumatur. Quae vero eandem retinent proportionem, ut proportionaliter esse dicuntur, quando vero earum magnitudinum, quae sunt aeque multiplices primae quidem magnitudinis, multiplicem superat, tertiae vero magnitudinis multiplex, secunda vero magnitudo multiplicem superat, tertiae vero magnitudinis multiplex, quartae 15 magnitudinis multiplicem minime superat: tunc prima magnitudo ad secundam magnitudinem maiorem proportionem quam tertia ad quartam tenere prohibetur. Proportionalitas vero et minimum terminis inventum proportionales idem eiusdem magnitudines proportionis esse dicuntur, praecedentes praecedentibus et consequentibus consequentes. Quando autem 20 magnitudines proportionaliter fuerint constitutae, tunc prima ad tertiam duplicem proportionem quam ad secundam dicitur possidere. Quando vero 95r magnitudines pro|portionaliter fuerint constitutae, tunc prima ad quartam triplicem proportionem quam ad secundam dicitur obtinere. Conum vero summum sumere magnitudines proportionaliter fuerint constitutae. 25

Der Rest des Blattes ist leer.

30) Blatt 96r—117v, 1. umfasst eine Abhandlung, welche von der Hand, welche das Inhaltsverzeichniss geschrieben hat, die Ueberschrift trägt:

„*Geometrica*“

Dieselbe ist eine Compilation. Soweit dieselbe noch nicht herausgegeben ist, lasse ich sie hier folgen. Von denjenigen Stücken, welche gedruckt vorliegen, gebe ich nur die Varianten.

1) Der folgende Abschnitt „*De proportione*“ ist nichts weiter als eine Uebersetzung der Erklärungen des 5. Buches Euklids. In einer andern Handschrift aus dem X. Jahrhundert der Münchner Hof- und Staatsbibliothek ist der Abschnitt besser und vollständig überliefert. Ueber diese Handschrift im Vereine mit noch zwei andern werde ich anderswo Näheres mittheilen.

| Igitur geometricae artis peritiam qui ad integrum nosse desideret, 96r necesse est, ut huius artis expositores diligenti cura perlegat, et ea, quae perlegerit, tenaci memoriae commendet. Nam in primis eum scire oportet arithmeticam artem, quae continet numerorum causas et divisiones, id est, 5 qualis est diffinitio et diuisio; de paribus et imparibus numeris, et qualis est compositus numerus, et qualis incompositus; qualis est perfectus numerus, et qualis imperfectus; qualis est divisibilis numerus, et qualis indiuisibilis; qualis est particularis numerus, et qualis minus particularis; qualis superparticularis numerus, et qualis superpartiens; qualis est superfluus numerus, 10 et qualis diminutus; qualis est multiplex numerus, et qualis submultiplex; qualis est solidus, et qualis est sphaericus.

Item quomodo inventa est geometria; unde vocata est geometria; quid sit geometria; quae utilitas; qui ordo praescrip|tionis; quae sit ratio 96v propositionis, quae dispositionis, quae descriptionis, quae demonstrationis, 15 et quae conclusionis. Qualis est recta linea; qualis est definita linea; quot genera sunt extremitatum, quanta sunt summitatum; Qot genera sunt angulorum, qualis est planus angulus, qualis est obtusus angulus, qualis[1]) angulus, qualis est rectus angulus, qualis est acutus. Nec non et de mensuris sciendum est. Quae mensura sit pertica; quantum trahit 20 stadium, quid sit actus, quid climma, quid centuria, quid leuva, quid aripennis, quid iugerum, vel quid centuria. Quid punctum, quid diametrum, quid parallelogramum. Quid sit figura, vel quid sit circulus, aut in quae sit divisio. Qui scit ista omnia ad plenitudinem, novit locorum segregationem; nam qui ignorant regulam huius artis multa obponunt falsa pro veris.[2])

Nach dieser Einleitung folgt jetzt mit der Ueberschrift:

Quid sit ipsa geometria et quae eius effectiva potentia

eine Abschrift der Geometrie des Cassiodorius.[3]) Von ihr setze ich nur die abweichenden Lesarten hierher.

576. 2. *usuale.* — 2—3. *quod ut praeconiis* fehlt. — 4. *geometricare.* — 5. *amplicetur.*

577. 1. *caelo; creatur.* — 2. *adplicetur; sententia diffinitione forsitan.* — 3. *dicere, quodammodo geometrizat sancta divinitas.* — 3—4. *suae creaturae, quam.* — 4. *famulasque.* — 6. *quae sunt fixa.* — 8. *demensio.* — 10. *Egiptus propriis dominis fertur esse partita, quia Nili inundatio confusionem*

1) Diese Lücke befindet sich in der Handschrift. 2) Wie ich nachträglich gesehen habe, ist das Stück schon in der Boethius-Ausgabe Basileae 1570 auf Seite 1541, Z. 16—46 abgedruckt, doch ist unser Manuscript vollständiger als der Abdruck. 3) Ich benutzte die Ausgabe: M. Aurelii Cassiodori Senatoris V. C. opera omnia. Genevae Excudebat Philippus Gamonetus Anno MDCL.

fecit in agris. Unde controversiam ortam geometriae disciplinis prudentiores quippe sedare curarunt. Cuius iam. — 12. *consistere.* — 13. *homines constat demensiones; vagantibus populis.* — 15. *partitus* fehlt; *edicti.* — 16. *ita reperta.* — 18. *caeli.* — 18—19. *peritissimos* fehlt. — 19. *adsecutos.* — 22. *Cerellium quintum; spatia ipsius.* — 23. *caeli terrae ambitum.* — 24. *descripsit dicens.*

Und nun wird aus CENSORINUS, *de die natali*[1]) folgender Passus eingeschoben (S. 22, 22—24, 12). Auch hier gebe ich nur die Varianten.

22. 25. *numerabilem arithmon.* — 26. *distantiis diastematis.*

23. 2. *concinnent melodiam.* — 3. *carpere.* — 5. *fore stadiorum; ducentorum.* — 6. *Pythagoras* fehlt. — 7. *in terra.* — 9. *sexcentorum.* — 12. *pitagoras.* — 12. *mercurii lunam stellam.* — 15. *semitonion.* — 16. *bosphoron.* — 17. *semitonion.* — 19. *a terra* fehlt; *dimidium a terra.* — 21. *tesseron autem ad martis stellam.* — 24. *pheton nominatur*, *dimidium ipsius.* — 25. *amphenon.* — 26. *semitonion.* — 27. *semitonion.*

24. 1. *tesseron.* — 3. *fore VI.* — 4. *simphonia; multa* fehlt. — 5. *retulit; et in hoc omnem; enarmion esse innotuit.* — 7. *alii dixerunt; illud dacoraon.* — 10. *tantum tamen.* — 12. *musica; revertar.*

Jetzt wird mit der neuen Ueberschrift:

DE DIVISIONE GEOMETRIAE, IN QUOT PARTES DIUIDITUR.

der Auszug aus CASSIODORIUS fortgesetzt.

577. 25. *vero* fehlt; *quae dividitur.* — 31. *et in rationem.* — 35. *rationabiles et inrationabiles; Rationabiles quarum.* — 36. *inrationabiles; vero* fehlt; *quarum.* — 37. *igitur hae solidae; longitudine et.* — 40. *caelestibus concluditur.* — 41. *Euclides.* — 42. *Euclidem oblatum romanae linguae magnificus Boetius dedit.*

Damit schliesst CASSIODORIUS. Woher das nun Folgende genommen, weiss ich nicht zu sagen. Es hat folgenden Wortlaut:

100r, 3 | DE UTILITATE GEOMETRIAE.

Quae autem supra diximus de utilitate geometriae, sciendum est, quod utilitas geometriae triplex est. Cuius quaedam species pertinent ad facultatem enim, ut scientiae mechanicae vel architecturae; ad sanitatem vero, ut disciplinae sunt medicorum. Quia, sicut ritus artis mechanicae nulla 5 ratione consistunt absque mensura et descriptione liniamentorum, sic nec ars medicinae sine mensura et pondere atque herbarum discretione ullo modo subsistere valeat. Ad animam vero pertinet geometria, quia philo-

---

1) *CENSORINI de die natali liber.* Rec. FR. HULTSCH Lipsiae 1867 ist die benutzte Ausgabe.

sophorum disciplinis discretionem et moderationem in omnibus rebus habere
10 ⟨debet⟩. Quid enim aliud prudentia, iustitia, fortitudo et temperantia nobiscum agunt, nisi ut prudenter, iuste, aequanimiter et temperanter vitam ducamus | et secundum praecepta conditoris nostri ordinabiliter et 100v recte vivamus. Quia, sicut supra dictum est, quicquid in nostra conversatione bene disponitur atque completur, potest disciplinae huius quali-
15 tatibus applicari.

DE ORDINE PRAESCRIPTIONIS GEOMETRIAE.

Ordo autem conscriptionis in geometria considerari debet, quia secundum quoddam ordo geometriae in disciplinis aliquatenus post arithmeticam secundus est, aliquatenus tertius, quia quidam geometriae musicam ante-
20 ponunt. Sed qui diligentius de hac re investigaverunt secundo loco post arithmeticam geometriam, musicam vero tertio loco posuerunt et quarto astronomiam, quia sine dubio omnis motus est post quietem, et natura semper statio motu prior est. Mobilium vero astronomia, immobilium geometria doctrina est, et ideo cum motus sequatur post quietem, con-
25 sequens est, ut motum astrorum armonicae modulationis continetur concentus. | 101r

DE RATIONE PROPOSITIONIS.

Ratio propositionis in geometria est, ut perpendamus, quod primum in ipsa arte proponi atque considerari oporteat. Quia enim mensura in aliquo et alicuius esse debet, primo loco constituamus fundum, in quo
30 mensurae universae disponuntur. Fundus enim dictus est, quod in eo fundentur, vel stabilientur quaelibet res. Fundus autem et urbanum aedificium et rusticum secundum antiquos intelligendum est, de quibus rebus geometria maxime tractat ac figurarum omnium rationem disponit.

DE DISPOSITIONE.

35 Dispositio geometriae est linearum intendere genera, utrum vel circumferendo vel flexuose pergar, de quo in sequentibus plenius dicendum est.

DE DISSCRIPTIONE GEOMETRIAE.

In disscriptione quoque notari debent anguli, sicut in distributione inspiciuntur figurae, quod demonstrabitur, cum de angulis et de figuris
40 universis dicemus.

DE DEMONSTRATIONE GEOMETRIAE.

In demonstratione autem, quantae sint summi|tates, intueri oportet. 101v
Nam summitatum genera sunt duo: summitas et plana summitas. [Se-

cundum geometricam enim appellatio summitas est, quae longitudinem et latitudinem habet tantummodo. Summitatis finis lineae sunt. Plana 45 summitas est, quae aequaliter rectis lineis est posita] ad longitudinem atque latitudinem, quae alio nomine superficies dicitur.

Was ich zwischen eckige Klammern gesetzt habe, findet sich in den *Grom. Vet.* I. an drei verschiedenen Stellen. **99**, 11—14; **411**, 10—14; **414**, 14—18. Nach folgender Einleitung:

DE EXTREMITATIBUS.

De extremitatibus quoque, quomodo pertineant ad conclusionem, noscendum, quod
folgt nun weiter aus den *Grom. Vet. I* das Stück 414, 24—415, 4 mit folgenden Abweichungen.

414. 24. *quippe* fehlt; *duo, hoc est.* — 25. *per rigorem; per flexuosum observatur; rigoris.* — 26. *velut.* — 26—27. *rectum perspicitur.* — 27. *vero* fehlt.

415. 1. *quicquid ad horum immitationem in forma. Nam; mensura.* — 2. *directum.*

Weiter

DE PRINCIPIO MENSURAE.

Grom. Vet. I. 377, 2—7. Voran geht: *Principium mensurae punctus vocatur, cum medium tenet figurae.*

377. 2. *cuius figurae pars.* — 3. *puncti.* — 5. *et.*

Ferner

DE GENERIBUS MENSURARUM.

Grom. Vet. I. 96, 1—97, 13. Abweichungen sind folgende:

97. 1. *et crassitudinem.* — 2. *cum longitudinem.* — 3. *mirabilia.* — 4. *similia multa.* — 5. *vocant.* — 6. *habeamus.* — 6—7. *per quae etiam agros metimur* fehlt. — 9. *et illis alia similia; est* fehlt. — 10. *nos autem; appellamus* fehlt. — 12. *Pirarum idem opus rotundum, pyramidem aut lapide macherias.*

Von hier an fehlen weitere Ueberschriften. Es finden sich aber der Reihe nach noch folgende Theile der *Grom. Vet. I.:*

415. 4—5: 4. *singuli.* — **415.** 1—4: 2. *directum.*

98. 15—106, 11.

98. 15. *est, ut iam diximus; vero.* — 16. *rectae* fehlt.

99. 1. *positae cunctae; non* fehlt. — 3. *tria.* — 6. *singulorum suorum distat.* — 7. *arborum aut signorum.* — 8. *similitudine.* — 9. *multorum; rerum* fehlt. — 14—14. fehlt. — 15. *summitatum.*

100. 2. *si quis.* — 3. *ratione angulorum.* — 3—4. *ipsas extremitates.* — 5. *habes* — 8—9. *generis sui* fehlt. — 9. *hebes.* — 10. *ethigrammos.* —

11—12. *rectus super rectam lineam trans ordinem.* — 12. *ut singuli.* — 13. *sint.* — 14. *insistit vertex est.*

101. 1. *ex recto angulo.* — 3. *positionem qua si.* — 5. *habebit.* — 6. *compressior.* — 9—10. *intra finitimas lineas.* — 11. *plus normalis* fehlt. — 12. Ueberschrift: *De speciebus linearum.* — 13. *sunt tres generis sui.* — 14. *cyrculum.* — 15. *per* fehlt; *transferet.* — 15—16. *par e altero.* — 17. *quaecumque vero linea ordinata dimensione semicirculum erit.*

102. 1. *qui; et linearum per.* — 2. *interiacebit, hebetes angulos faciet generis sui; infra.* — 3. *dimensione; lineae* fehlt. — 5—6. *anguli, ut diximus, sunt rectum; acutum; rectum.* — 7. *per rectum punctum.* — 8. *parte* fehlt. — 8—9. Statt *ebes et acutus* steht *Ceteros autem.* — 9. *dimensione a recta linea.* — 11. *cludit.* — 13. *acuta hoc modo fiunt.* — 14. *pares circuli.* — 16. *faciunt; Hebetes; contrarii.* — 17. *hi inter.* — 18. *inducuntur.* — 18—19. *rectus angulus. hebes et acutus dicuntur.* — 19—20. *fuerunt inter se.* — 20. *intra se.*

103. 1. *altero.* — 3. *medio; hebetes.* — 5. *exilissima plenissime finiantur.* — 6. *et angulorum.* — 8. *complures* fehlt. — 10. *ergo.* — 11—16 fehlen. — 17. *Angularis igitur; tenet duas.* — 18. *planitie.* — 19. *et* fehlt. — 20. *Nam solidus.*

104. 1. *Forma sive figura.* — 4—5. *rationali.* — 5. *circumferentibus et rectis.* — 6. *rectis et circumferentibus.* — 7—12. fehlen. — 13. *circumferentium formarum.* — 14. *unius.* — 15. *et* fehlt. — 16. *accedentibus usque infinitum.* — 17. *plurimum.* — 18. *sub; atque ab.* — 19. *positae.*

106. 1—3. *ex duabus* bis *ex recta* fehlt. — 3—5. *Quadrilatera forma est quatuor lineis totidemque angulorum ex duobus circumferentibus et duabus rectis. Plura latera.* — 6. *plusplus.* — 6—7. *continetur.* — 8. *ex tribus circumferentibus et duabus rectis.*

Endlich 378, 5—14.

378. 5. *Rectae lineae.* — 6. *Tria latera.* — 7. *tribus* fehlt. — 8—10. *finitima* bis *servatur* fehlt. — 10. *vero* fehlt; *quae quatuor.* — 11. *continentur; est* fehlt. — 12. *tribus comparibus clauditur.* — 13. *tenet latera comparia.*

Nun folgen Ergänzungen der von Cantor in den *Agrimensoren* aus Epaphroditus veröffentlichten Paragraphen, speciell zu § 7 und folgende, welche ich mir wörtlich mitzutheilen erlaube.

I. | Idem ager est longus pedum CCXL, cuius latitudo ignoratur, sed 106r, 1[illegible]
in eo dispositae sunt arbores inter quinos pedes singulae crassae pedum
duorum DXXV. Si quaerere vis latitudinem agri, adicias ad longitudinem
quinarum numerum, quia inter pedes V dixi sitas esse arbores, fiunt CCXLV.
5 Tunc sumas partem septimam, quia arbores | cum intervallo habent pedes VII, 106v

fiunt XXXV. Sumas tricesimam partem quintam de numero arborum, hoc est de quingentis XLV, fit XV. Hoc ducas septies, fit CV. Hinc ducas intervallum, hoc est pedes V, remanent C; tot pedes latitudo agri.

II. At cum erit mons, qui tenet in vertice per circuitum pedes trecentos et in ascensu pedes octingentos, ad pedem autem habet in circuitu pedes mille. Si quaeris, quot iugera in eo sint, iungas in unum duas circuitiones, id est mille et trecentos. Dein sumas partem dimidiam, hoc est sexcentos quinquaginta. Ducas per ascensum montis, hoc est per octingentos, fiunt $\overline{DXX}$; tot igitur pedes erunt quadrati in superficie montis. Deinde, ut inveniamus, quot sunt iugera in eo, videas, quoties teneat $\overline{XXVIII}$ · DCCC, quia tot pedes constratos habet unum iugerum, id est $\overline{XXVIII}$ octingentos, erunt iugera XVIII insuper pedes mille sexcenti.

107^r III. Item | mons est qui tenet in imo prope pedem in circuitu pedes $\overline{II}$ · D in medietate per gyrum pedes MDC, in cacumine adaeque in circuitu pedes C, cuius ascensus pedum est D. Si igitur quaeris, quot iugera in eo sint, iunge in unum tres circuitiones, id est pedes $\overline{II}$ · D et MDC, nec non et centum, fiunt simul $\overline{IIII}$ · CC. Hinc sume partem tertiam quae fit MCCCC. Hoc multiplica per altitudinem, et facit $\overline{DCC}$. Deinde vide quotiens habeat $\overline{XXVIII}$ · DCCC, hoc est vicies quater. Tot sunt iugera in eundem montem, hoc est tabulae quatuor et remanent pedes CC.

IV. Mons est strabus, qui habet ad pedem in circuitu pedes MCCC, in cacumine per circuitum pedes CC, sed est altus in parte dextera pedum DCCCL et ex parte laeva pedum DCCL, quaero, quot sunt in eo iugera. Sic quaere. Iungo in unum duas circuitiones, hoc est MCCC et CC. Sumo partem dimidiam fit DCC. mitto per circuitum $\overline{II}$ · D ascensus ambas in 107^v unum, id est DCCCL · DCCL, fiunt MDC. Hinc sumo medietatem, | quo.[1])

Damit bricht die Sache ab, und ist hier der Auszug aus dem *Geometrica* überschriebenen Abschnitte zu Ende.

31) Es folgen nun wieder Blatt 107^v 2—109^r Capitel aus Gerberts Geometrie und zwar die *Ollerischen* Nummern 45, 42, 44, 23, 22 mit folgenden Abweichungen:

448. (Cap. 45.) 28. *Katheti dimidium.*

---

1) Aus diesen vier Paragraphen in Verbindung mit dem auf Blatt 89^r des Manuscripts befindlichen lässt sich nun wohl sagen, was auf dem einen fehlenden Blatte des Arcerianus von Epaphroditus enthalten gewesen sein dürfte. Es war zunächst die weitere Ausführung des bei Cantor unvollständigen § 7, dann kamen noch zwei Aufgaben über Bäumezahl, bei welcher einmal die Länge, einmal die Breite des bestandenen Ackers gesucht wurde, dann kam von den jetzigen vier Paragraphen No. II. Der letztere schon von Cantor durch Divination erschlossene Ergänzung, die Quelle zu Gerberts Cap. 64. *(S. 457.)* § IV lässt sich aus Cantor unschwer vervollständigen.

447. (Cap. 42.) 15. *adiciatur.* — 17. *linearum rectarum.* — 19. *erit* fehlt; numeri $\overline{\text{I}}$ · CCXXV.

448. (Cap. 48.) 14. *praecisuras.* — 15. *dinoscere; ducto.* — 16. *summam simul.* — 17. *CCCLXV.* — 18. *quod superfuerit.* — 20. *praecisurae.* — 22. *praecisuram.* — 23. *superhabundantis.*

433. (Cap. 23.) 23. *Si vero est.* — 24. *quacumque cuiusque, astrolabium.* — 26. *conlatio*
comparatio.

(Cap. 22.) 1. *Ad mensurandum cum quadrato astrolabii in plano stantem per suam ipsius quamlibet altitudinem.* — 4. *cuiusque.* — 5. *per umbram ipsius* ausradiert. — 6. *solis radio; alhidadae.* — 7—9. *quod* bis *quadrato* fehlt. — 10. *eandem; proportionem altitudo* fehlt; *ad umbram* ausradiert. — 12. *habent; umbra* ausradiert. — 14—15. *sesqualtera.* — 15. *si omnes XII.* — 16. *et umbra* ausradiert. — 17. *alhidada; umbra* ausradiert. — 19. *inumbrata* ausradiert; *bassis est.* — 23. *dinoscitur.*

Blatt 109ᵛ, 110 und 111 sind leer.

32) Von Blatt 112ʳ bis 118ʳ, 14 erstreckt sich dann eine Abhandlung, welche von der Hand des Inhaltsverzeichnisses „PONDERA" überschrieben ist. In Wirklichkeit ist es eine Abhandlung über das Rechnen mit römischen Minutien. Ich theile dieselbe mit, soweit sie Interesse hat, und gebe dort, wo ein solches in beschränktem Masse besteht, dieselbe nur auszüglich wieder.[1])

| DE DIVERSITATE TALENTORUM. 112ʳ

Mna C dragma, id est XXV solidi. Talentum minimum est librarum L, medium LXXII, maximum CXX. Siliqua lentis duo grana sunt et duae tertiae.

Uncia in unciam fit dimidia sextula.	XXIIII
5 Sesquuncia in sesquunciam. sextula et obolus.	XXXVI
Sextas in Sextantem fit duella.	XLVIII
Quadrans in quadrantem fit semuncia et sicilicus.	LXXII
Triens in trientem fit uncia et duella.	XCVI
Quincunx in quincuncem fit sextans et dimidia sextula.	CXX
10 Semis in semissem fit quadrans.	CXLIIII
Septunx in septuncem fit triens et dimidia sextula.	CLXVIII
Bisse in bissem fit quicunx et duella.	CXCIX
Dodras in dodrantem fit semis semuncia et sicilicus.	CCXVI
Dextas in dextantem fit bisse et duella.	CCXL
15 Deunx in deuncem fit dimidia sextula.	CCLXIIII
As in assem fit as.	CCLXXXVIII

1) Es ist ein Abschnitt von Gerberts *Regula de abaco computi* (Olleris 333, 25 bis 341, 16).

DE SIMILITUDINE MULTIPLICI.

Ecce animadvertere potes, qualiter haec multiplicationis similitudo in diminutionem cadit. Sic enim dixi semis in semissem, quasi sex in senarium. Sed sex in senarium (112v) in XXXVI consurgit, semis vero in semissem in | quadrantem descendit. Sed quia cuiusque ductione in se breviter dictum est, quod postmodum lucidius demonstrabitur, nunc etiam in alterum ducere longum non videatur.

Sem. XII
Duel VIII
Sicil. VI
Drag. III
Dim. S. II
Scrip. I
Obol. M
Cerat. Q
Calcus ◡

De uncia. Uncia in assem uncia .... uncia in sescunciam dragma.

De sescuncia. Sescuncia in quamcumque ducatur, eius octavam requirit, in quam ducitur, quia ipsa octava assis existit.

De sextante. Sextas in quadrantem semuncia .... sextas in assem sextas.

De quadrante. Quid quadrans in unciam, vel in sextantem, vel in (113r) se ipsum | faciat, superius dictum est. Idem est enim quadras in unciam vel sextantem, quod uncia vel sextas in quadrantem. Nunc vero, quod in ceteris reddat, videndum est. .... Quadras in assem quadras.

De triente. Triens in quincuncem uncia semuncia sextula .... Triens in assem triens.

De quincunce. Quincunx in semissem sextas semuncia .... Quincunx in assem quincunx.

(113v) *De semisse.* | Quid semis in unciam vel sextantem, vel quadrantem, vel trientem, vel quincuncem faciat superius demonstratum est, quando dicebatur, quod uncia, vel sextas, vel quadras, vel triens, vel quincunx in semissem redderet. Hoc enim scire oportet, quod in omni multiplicatione sive numerorum, seu unciarum, sive minutiarum tantumdem valet conversio, quantum directio. Sic enim idem mihi est, si dicam vel directim ter quatuor, vel e conversim quater tres; utraque multiplicatio ad duodenarium convergit. Sic idem mihi erit sive directim triens in semissem, vel conversim semis in trientem dicam; utrumque duorum ad sextantem descendit .... Semis in assem semis.

De septunce. Septunx in bissem triens semuncia sextula .... Septunx in assem septunx.

(114r) *De bisse.* Bissis in dodrantem semis | ... Bissis in assem bissis.

De dodrante. Dodras in dextantem septunx semuncia .... Dodras in assem dodras.

De dextante. Dextas in deuncem dodras sextula. Dextas in assem dextas.

De Deunce. Deunx in asse deunx.

De asse. As in assem fit as.

Ne mireris me semis in semissem, vel quadras in trientem, vel triens in quadrantem dixisse, cum potius semissis semissem, vel quadrantis
60 trientem, vel trientis quadrantem et cetera eodem modo dicere debuissem. Quia enim superius me earum detrimenta sub optentu multiplicationis ostensurum promisi, nunc semis in semissem quasi sex in senarium dixi. Quia vero quid quaeque in se, quid in invicem facerent, minus capacibus monstravi, universalem regulam subnectere collibuit: Omne quod sub uni-
65 tate locatur, sive in numerum quemlibet, sive in aliquod eorum, quae sub unitate sunt, sicut superius demonstratum est, ducatur, non multiplicationem exposcit, sed totam partem illius, in quam ducatur, quota pars ipsum assis existit. Verbi gratia si unciam in XXIIII ducas, non extra XXIIII numerum quaerere, in quem illa inductio excrevisset, labores, sed infra XXIIII totam
70 partem, quota est uncia assis, id est duodecimam, | requiras, quae erit binarius. 114v Ex XXIIII igitur et uncia repraesentatur binarius. Si vero eandem unciam in deuncem duxeris, vel dextantem, vel in ceterorum aliquem, quia ipsa est assis duodecima, duodecimam deuncis, vel dextantis, vel ceterorum alicuius accipias. Sed forte dicis deuncem non habere duodecimam, cum
75 non nisi undecim contineat uncias. Ego vero tibi respondebo, cum uncia habere possit duodecimam, id est dimidiam sextulam, unciae duodecima undicies ducta, eo quod et ipsa undecies intra deuncem teneatur, faciet deuncis duodecimam. Sextas autem, quia sexta est assis, in quemcumque numerum sive minutiam ductus, in quem ducitur sextam requirit. Quadras,
80 quia quarta, quartam; triens, quia tertia, tertiam; quincunx, quia quinque sunt assis duodecimae, quinque duodecimas illius, in quam ducitur, exposcit. Semis, quia media, mediam; septunx, quia septem duodecimae, septem duodecimas; bissis, quia duae tertiae, duas tertias; dodras, quia tres quartae, tres quartas; dextas, quia X duodecimae, X duodecimas; deunx, quia un-
85 decim duodecimae, XI duodecimas.

Est et alia regula numeros tantum comparandi ad uncias. Quilibet numerus si cuilibet supradictorum comparetur, id est vel deunci vel dextanti, numerus unciarum in deunci vel dextanti per numerum comparatum ducatur|, et hi, qui inde excreverint, per duodenarium partiantur. Quot- 115r
90 cumque vero in hac partitione duodenarios reperies, totidem asses in ipsa unciarum et comparati numeri multiplicatione excrevisse cognoscas. Si aliquae vero extra duodenariorum partitionem superfuerint, hos pro unciis teneto, verbi gratia, si quinque, pro quincunce, si IIII pro triente. Si autem infra duodenarium illa multiplicatio remanserit, quicumque numerus
95 tibi sub duodenario venerit, eum pro totidem unciis teneto. Quod usque

modo dictum est, exemplificare libet. Ecce quadrante octonarius comparetur. Sed tres unciae in quadrante tenentur, quae per octonarium ductae in XXIIII surgunt. Sed in XXIIII bis duodenarius apparet; duo igitur asses ex octonarii et quadrantis multiplicatione veniunt. Item si octonarius trienti comparetur, quia triens IIII unciarum est, quaternarius per octo- 100 narium multiplicatur. Sed quater VIII XXXII. In XXXII vero bis duodenarius habetur remanentibus VIII; erit igitur ex multiplicatione unciarum trientis et octonarii XXXII unciae, id est asses II et VIII unciae, id est bisse. Item quaternarius sextanti comparetur. Sed sextas duarum est unciarum, binarius ergo in quaternarium ducatur, de quo nascitur octonarius. 105 Quia igitur infra duodenarium remanet octonarius, infra assem etiam erit, et pro VIII unciis, idest pro bisse, deputabitur.

115v | Videor in culpam illam incidisse in quam Porphirium, cum de genere tractabat, dicunt devenisse. Cum enim omnem demonstrationem ex notioribus oporteat constare, deputant illi in vicium ad generis diffinitionem 110 speciem ignotiorem adhibuisse. Ego quippe similiter comprobor. Cum enim unciarum comparationes ex notioribus monstrare debuissem, minucias ignotiores, id est sextulam, sicilicum et ceteras intermiscui. Sed Boetius Porphirio succurrit et mihi, dum dicam, nullam rem nisi ab his, in quibus substantiam suam habet, posse demonstrari. Sicut enim genus a specie substantiam 115 sumit, sic et uncia a partibus suis, id est sextula, sicilico et ceteris, quibus praeeuntibus ipsa non manebit. Nec autem paululum unciis intermissis aliquantulum scribere non pigeat de minutiis, ut et minutiis et unciis pleniter cognitis de utrorumque divisionibus et ductionibus postmodum abunde dicatur. Ne mireris autem nos distinctionem inter minutias fecisse, cum 120 et unciae minutiae possint vocari. Uncias quidem propter excellentiam suam tantum uncias, minutias vero, quae parvitate sua post unciam locantur, appellare placet tantum minutias.

Unciae divisione ultimus terminus calcus occurrit. Prima autem eiusdem divisionem secundum medietatis naturam semuncia suscipit. Unciae 125 116r igitur | medietas semuncia dicitur; tertia duella; quarta sicilicus; sexta sextula; octava dragma; duodecima dimidia sextula, vicesima quarta scripulus; quadragesima octava obolus; nonagesima sexta cerates; centesima nonagesima secunda calcus. Sed qui fastidium respuunt, non nisi ad scripulum descendere volunt, qui vicesima quarta est unciae, assis vero 130 ducentesima octuogesima octava, ut in prima paginula huius libelli videre perfacile est. Ascripulo igitur propter minus capaces incipiens, quod quaeque in se vel in quamlibet aliarum valeat, monstrabo, servata tamen in illis etiam, sicut in unciis, regula prima universaliter superius dicta.

De minutiis. Scripulus in scripulum fit pars calci trigesima sexta, 135

quae ob parvitatem sui nomen habere non meruit. Dimidia sextula in se calci nona. Dragma in se calci quarta. Sextula in se oboli nona. Sicilicus in se calcus. Duella in se duae scripuli nonae. Semuncia in se obolus.

140 Quod autem in invicem faciant, vel etiam in ipsas uncias, sic accipe.

De scripula. Scripulus in dimidiam sextulam XVIII[a] calci .... Scripulus in unciam oboli sexta, quod esse dicunt siliquae medietatem | 116[v] .... Scripulus in assem scripulus.

De dimidia sextula. Dimidia sextula in dragmam calci sexta ....

145 Dimidia sextula in dodrantem scripulus et medietas scripuli | .... Dimidia 117[r] sextula in assem dimidia sextula.

De dragma. Dragma in sextulam calci tertia ... Dragma in assem dragma.

De sextula. Sextula in sicilicum ceratis tertia .... Sextula in se-

150 missem dimidia sextula | .... Sextula in assem sextula. 117[v]

De sicilico. Sicilicus in duellam tercia oboli .... Sicilicus in assem sicilicus.

De duella. Duella in semunciam tercia scripuli .... Duella in semissem sextula | .... Duella in assem duella. 118[r]

155 *De semuncia.* Semuncia in unciam scripulus .... Semuncia in assem semuncia (Bltt. 118[r], 14).

33) Nun folgt von der nämlichen Hand, aber durch eine Zeile Zwischenraum getrennt, Folgendes:

| Ambitus totius terrae $\overline{\mathrm{CCLII}}$ absolvitur stadiorum, quae faciunt 118[r], 1 leuvas gallorum $\overline{\mathrm{XXI}}$; Milliaria $\overline{\mathrm{XXXI}}$.D; Passus tricies et semel mille millia et D; Pedes centies quinquagies et septies mille milia et D; Uncias milies octingenties nonagies mille milia; Digitos $\overline{\mathrm{V}}$.DC[ies] LXX[ies] $\overline{\mathrm{III}}$. Digitus

5 est minima pars agrestium mensurarum. Uncia habet digitos III; Palmus in IIII protenditur digitos; Pedem XVI metiuntur digiti, Passus V pedum mensuram sortitur|; Pertica duos passus, id est X pedes explicit. Passus 118[v] CXXVI stadium absolvunt; Stadia VIII miliarium praestant; Mille passus, id est miliarium et dimidium, leuvam faciunt habentem passus M et D;

10 duae leuvae sive milliaria tria efficiunt restam.

34) Daran schliesst sich Bltt. 118[v], 5—11 ohne jeden Zwischenraum die *„Divisio de limace“* aus den *Propositiones ad acuendos iuvenes* (Bedae *opera* I, 102) ohne jede Abweichung von dem gedruckten Texte, ausser dass in der Lösung die Zahl der Uncien richtig als 90 000, nicht wie im Drucke als 90 angegeben wird.

35) Weiter folgt 118[v], 11—124[r], obwohl völlig heterogenen Inhalts, ebenso unmittelbar anschliessend eine Abhandlung über astronomische

Gegenstände. Sie hat folgende Capitel oder Paragraphen: *De solis cursu; De cursu solis per XII signa; De cursu lunae per XII signa; De cursu VII planetarum;* sie schliesst Bltt. 123[v]: *Sed inter haec omnia sydera martis maxime inobservabilis est cursus.* Bltt. 124[r] enthält dann noch ein dazu gehöriges astronomisches Diagramm.

36) Da auf Bltt. 119[v], einer grösseren auf Bltt. 120[r] folgenden Figur halber, etwa eine halbe Seite Platz geblieben war, so hat eine ähnliche, jedoch sicher andere Hand den Platz mit folgender Bemerkung ausgefüllt, welche sich auf die Theile des Asses bezieht.

Unaquaeque pars assis a deunce usque in £ quot semunciis consistit, tot ϛϛ ad unciam sibi requirit. A semuncia vero usque in obelum, quot obelis consistit, tot semuncias scripuli ad unciam sui requirit. Et hoc in minimis partibus assis probemus. Quaeramus unciam in ÷ hoc modo. Uncia habet duas £, totidem ϛϛ[as]., qui sunt qʒ ad unciam sui requirit. 5
£[a] autem tres £ habet, totidem quoque ϛϛ[as], qui sunt ⚹, ad unciam sui requirit.

37) Auf Bltt. 124[v] findet sich an erster Stelle die 19. Idylle des Ausonius mit der Ueberschrift:

Duodecim Herculis erumnae, quas victor sustinuit
Euristeo iubente Iunonis prece.

38) Darunter steht folgende Melodie:

Ūt ré fá rē mí ré ūt ré mí mí
fá sól mí rē mí ūt ré fá sól lá
sͦol fá mí ré mí mí sól la sͦol mí
fá sͦol rē lá sól lá fā sól lá lá
sͦol fá ré ūt mí rē

und die Bemerkung:

Armo grece, coaduno latine, unde armonia coadunatio vocum dicitur.

39) Bltt. 125[r]—127[v] enthält eine Abhandlung mit dem Titel „*Mensura Monochordi*". Anfang: *Primum divide monochordum per quatuor a magdala usque ad magdalam.* Schluss (Bltt. 127[v] 6): *et duos tonos habebis.* Auf Blatt 127[v] steht dann noch eine Tabelle der Töne und Halbtöne.

40) Nun folgt Blatt 128[r]—132[v], 23 der Brief Adelbolds an Gerbert über das Volumen der Kugel. Da derselbe in den bisherigen Drucken noch nicht in seiner Vollständigkeit veröffentlicht ist, sondern zu seinem vollen Verständniss wesentlich nothwendige Sätze, der Mangelhaftigkeit der benutzten Handschriften halber, weggelassen sind, so lasse ich denselben hierunter vollständig abdrucken.

| *Domino* SILVESTRO *Summo Et Pontifici Et Philosopho* 128r
ADELPOLDUS *scolasticus vitae et felicitatis perpetuitatem.*

Valde peccare est publicis intentum utilitatibus privatis inquietare conventionibus, sed hoc ingenio vestro confido, ut simul et rebus publicis 5 possit sufficere, et mihi ex hoc, quod quaero, satisfacere. Et tamen temere ago et non ignoranter pecco, quod tantum virum quasi conscolasticum in naeniis convenio. Sed confessio peccati veniam non tantum dico quaerit, sed exigit. Fortasse cogitastis, ut sic peccem, ut me peccasse poenitere nolim, ac ideo sine fructu poenitentiae confessio nec veniam debeat quaerere, 10 nec remissionem aliquam exigere. Ad haec respondeo, quia si benignitatem vestram in hac conventione offendero, ultra quam credere possitis, me vos convenisse dolebo: ac ideo dolenti, et poenitenti, simulque se peccasse fatenti, et deinceps ab eiusmodi peccato se abstinere volenti veniam concedendam esse censebo, ab eo maxime, qui vicem illius tenet, cui dictum 15 est: „*Non dico tibi usque septies* etc[a].“

Si autem non offendere, sed id, quod quaesiero, cum benevolentia vestra adeptus fuero, scitote, quod in adeptione mea et mihi et multis prodesse gaudebo. Quaestiuncula, quam iam auctoritati vestrae transmisi, quia non resolvatur, me | in ea aut vos offendisse timeo, aut pro dilatione 128v 20 solutionis aliquid grande futurum spero. Sed aliud quoddam proponam, ut aut ex hoc, quod timeo, magis doleam, et doloris magnitudo vos flectat ad veniam, aut ex eo, quod spero, magis gaudeam, et gaudii mei plenitudo remunerationem vobis implorit futuram. Et hoc quidem, quod nunc proponere volo, quibus rationibus discuti, et ad intellectum usque deduci 25 possit, videor videre, sed ad determinandam diligentiam vestram expecto, ut tanti viri auctoritas praeceptionis meae fiat aut correctio aut integritas.

Quid ergo sit, quibusque imaginationibus circa illud vel delusus habear, vel certus tenear, iam nunc aperiam, ut vulnere aperto haesitationis a vobis praesto sit medicamentum certitudinis.

30 Macrobius super somnium Scipionis ubi loquitur de magnitudine caeli, terrae, solis et lunae eorumque rotunda globositate, compertum esse ait aput geometricos peritissimos, ut in duobus circulis, si diametrum unius duplum sit diametro alterius, eius crassitudo, cuius diametrum duplum sit, octupla fiat crassitudini illius circuli, cui duplum idem est diametrum. 35 De diametro circulum, de circulo diametrum, de diametro et circulo aream invenire, ac ideo diametrum ad diametrum, et circulum ad circulum, et aream ad aream comparare illis est facile, qui de talibus consuevere curare. | Crassitudinem autem ad crassitudinem quomodo potest comparare, qui 129r necdum, quid sit crassitudo, perceperit? Duarum enim rerum notitiam

earundem comparatio non praecedit, sed subsequitur. Unde fit, ut crassi- 40
tudinem aliquam crassitudini alteri octuplam esse comprehendere nequeat,
qui non noverit, unde cuiusque circuli crassitudo concrescat. Quod autem
iam inde mihi percepissem, aperiam; non, ut aiunt, Minervam litteras, sed
ut monstrem, quid sentiam. Quatinus, si erro, ad viam a sagacitate vestra
reducar, si viam titubantis teneo, auctoritati vestri assensus innitar. Sed 45
ut ad id, quod volo, perveniam, ab his, quae nota sunt pluribus, incipiam.

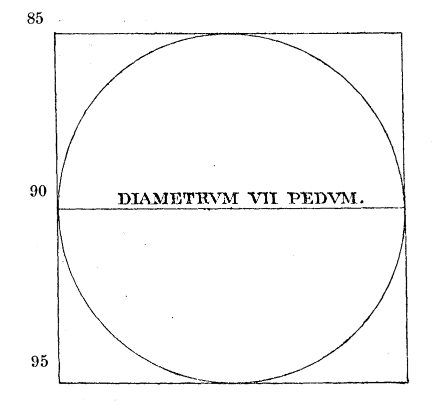
Diametrum VII pedum mihi facio; ex hoc circulum sic quaero: triplico
illud, et eius septimam triplicationi illi superaddo, et sic circulum in XXII
pedibus habeo. Medietate autem diametri, quod est III et S, et medietate
circuli, quod est XI, in invicem multiplicatis venit mihi area eiusdem 50
circuli in XXXVIII pedibus et S. Ecce diametrum, ecce circulum, ecce
aream habeo. Sed ut crassitudinem inveniam, diametrum idem cubico, et
cubum mihi eiusmodi facio, qui globositatem sphaerae lateribus contingat,
angulis autem et lineis ab angulo in angulum procedentibus excedat. Ab
eiusmodi cubo crassitudinem illam, quae a globositate usque ad angulos 55
129v et lineas procedit, necesse est | recidere, ut hac recisa solius sphaerae
soliditas remaneat. Hanc recisionem hoc modo facio: summam totius cubi
per XXI, id est vicesimas primas, divido; ex his vicesimis primis decem
excessionibus cubi deputo, undecim reliquas crassitudini sphaerae relinquo.
Quod idem esset, si summam totius cubi undecies ducerem, et ex illa 60
concretione unam vicesimam primam subducerem. Haec enim una vicesima
prima tanta esset, quantae illae XI, quae ex simplici cubi summa tollebantur.
Ut lucidius fiat, quod dicimus, certis numeris crassitudines duas assignabimus,
ut assignata in invicem comparare possimus. Non ut haec, aut veriora vos
ignorare credamus, sed ut viis nostris vestrae diligentiae monstratis a vobis 65
deinceps ducti errare nesciamus.

Circuli, cuius est diametrum VII pedum, crassitudinem sic quaero:
cubico diametrum et dico, septem septies fiunt XLVIII; rursus septies
XLVIIII fiunt CCCXLIII. Ecce cubus eiusmodi quadrati, cuius unum-
quodque latus VII sit pedum, et hic cubus globositatem sphaerae ex toto 70
concludit. Ut autem superexcedentia recidantur, sic facio: tollo vicesimam
primam ex CCCXLIII, quae est XVI et SS. Hanc si decies duco, habeo
130r CLXIII et SS, excessiones scilicet cubi; | si undecies, habeo CLXXVIIII et SS,
sphaerae videlicet crassitudinem.

Ut manifestius fiat, quod diximus, circulum cum quadrato subpingamus, 75
ut visa in planitie facilius intelligantur in crassitudine.

Ecce in hac sphaera diametrum est VII pedum, circulus XXII, area
XXXVIII et S, soliditas CLXXVIIII et SS. Non est autem mirandum, si
cubus in excessionibus suis fere medietatem crassitudinis obtineat, cum hic

quadratus in planitie supergressionibus suis vix tertiam partem retineat. | 130v Hic quippe in quadratura, cum unumquodque latus VII sit pedum, secundum laterum dimensionem area XLVIIII habebit. Cumque circulus ex his sibi XXXVIII et S acceperit, quadratura suis excisuris non nisi X et S retinebit. Quare autem mihi ita esse videatur, si vobis non sit fastidiosum audire, mihi non erit onerosum dicere.



Hic idem namque quadratus si septies in altum tollitur, CCCXLIII pedes reddit, excessiones scilicet suas et aream circuli secum in altum ducens. Septies enim X et S, id est excessiones, fiunt LXXIII et S, et septies XXXVIII et S, id est area circuli, fiunt CCLXVIIII et S. Sed LXXIII et S et CCLXVIIII et S reddunt CCCXLIII. Quare quadratum in altum tollere nihil aliud est, nisi excessiones suas et circuli aream secum deducere. Ab illo igitur cubo, qui ex area XLVIIII pedum consurrexerat, si quis septies X et S, id est LXXIII et semissem reciderit, nondum sphaericam globositatem expolivit, sed formam modii ab aequali area in aequalem aream deductam constituit in pedes scilicet CCXVIIII et S.

Ex hac autem forma non medietatem, ne in modum trochi ex utraque parte acueretur, sed tertiam partem quae est LXXXIIII et SSS, tollere debemus, ut sphaeram ex omni parte expoliamus. Sed haec tertia non tamen omnino rotundae formae, id est LXXXVIIII et SSS, et septem excessiones, id est LXXIII et S idem reddunt, quod X vicesimae primae, quae ob hoc ab integro | cubo tollebantur, ut sphaera undique rotundaretur, et haec X 131r vicesimae primae ad medietatem sphaerae fere pervenirent, nisi quadragesima secunda eiusdem cubi impedirentur. Iam facile est videre, cum quadratus nec tertia sui circulum devincat, quare cubus fere sui medietate sphaerae globositatem supervadat. Sed haec forma modii, quae recisis undique lateribus cubi rotundatur, quamvis ad plenum non possit, aliquatenus tamen subscribatur, ut, quod inertia linguae occultat, veritas picturae aperiat. Ecce videri potest, quantum post recisionem accuminum de cubo recidendum sit de modio, ut pura globositas sphaerae remaneat.

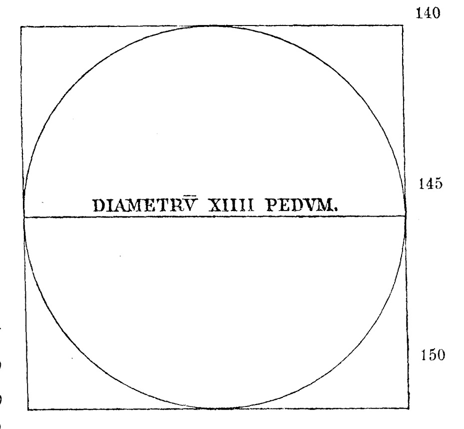
| Ecce satis dictum esse videtur, quomodo ex diametro VII pedum 131v crassitudo sphaerae concrescat. Iam nunc aliam statuamus, quae ex duplo diametro proveniat. Sit XIIII diametrum. Hoc cubico, XIIIIes XIIIIes XIIII fiunt $\overline{\text{II}}$.DCCXLIIII, hic est cubus sphaeram concludens. Huius si vicesimam primam accepero, quae est CXXX et SS, et eam decies duxero, venient

mihi Ī.CCCVI ςς, et his cubus sphaeram excedit. Si autem undecies, fiunt Ī.CCCCXXX et VII et ʒς, et haec est sphaerae crassitudo. Quam si quis eisdem rationibus velit informare, quibus superiorem informavimus, scilicet ut eam de cubo in formam modii, de modii forma in suam globositatem velit deducere, non tantum istam, sed et omnes, de quocumque diametro processerint, simili modo rotundare poterit. Sed uterque circulus depingatur, et is qui VII, et is qui XIIII pedes habet in diametro, ut numerus cuique suae soliditatis adscriptus demonstret, quantum minora maiore vincatur.

DIAMETRV̄ VII PEDVM.

132r | Huius sicut dictum est diametrum VII est pedum, circulus XXII, area XXXVIII et ς, soliditas CLXXVIIII et ʒς

Huius autem diametrum XIIII est pedum, circulus XLIIII, area CLIIII, soliditas Ī.CCCCXXXVII et ʒς. Diametrum et circulus sphaerae maioris diametro et circulo minoris dupla proportione iunguntur; area vero areae quadrupla; crassitudo autem crassi- 132v tudini octupla. Bis enim VII et bis XXII, quod est diametrum | et circulus minoris, faciunt XIIII et XLIIII, quod est diametrum et circulus maioris; et quater XXXVIII et ς, quod est area minoris, fiunt CLIIII, quod est area maioris; et octies CLXXVIIII et ςς, quod soliditas minoris, reddunt Ī.CCCCXXXVII ʒς, quod est soliditas maioris.



Iam nunc quidem nil dubitarem, quin haec esset ratio sphaericam crassitudinem inveniendi, si proprium esset sphaericae tantum crassitudinis, ut, si duplicitas in diametro constaret, octuplicitas in soliditate reperiretur; sed hanc eandem rationem in omnibus cubis invenio. Si enim ex binario unum fecero cubum et ex quaternario alterum, quia quaternarius duplus est binarii, cubus quaternarii octuplus erit cubo binarii, et etiam area binarii quadrupla erit area quaternarii. Et non tantum in cubis, sed etiam in puteorum idem invenitur profunditatibus.

In his omnibus si erro, oro, ut ad viam veritatis reducar; si viam teneo, nihilominus peto, ut via, quae me dubitantem tenet in tenebris, vestri assensus auctoritate illustrata reluceat. (Bltt. 132v, 20.)

41) An diesen Brief schliessen sich nun von der nämlichen Hand geschrieben ohne jeden Zwischenraum und nur durch rothe Anfangsbuchstaben

ausgezeichnet wieder Capitel aus GERBERTS Geometrie an, und zwar Blatt 132v, 21 bis 135, 18. Von den Capiteln bei OLLERIS sind es Nr. 58; 56, 3. Abs.; 15; 53; 72; 73; 74; 75; 56, 1. u. 2. Abs.; 57; 79; 56, 3. Abs. nochmals; 25a; 83. Hier wieder die Varianten.

Seite **454.** (Cap. 58.) 23. *sit longitudo pedum.* — 24. *fiunt; horum fiunt III et* ↄ. — 25. *Hi* fehlt; *CXXXVII et* ƨƨ. *Huius sumpta quarta decima parte.* — 26. *fiunt; VIIII et; et septunx* statt *et semis* bis *semuncia.*

455. 1. *vero haec; sphaerae.* — 2. *sive sit longa.*

453. (Cap. 56, 3. Abs.) 25. *eius cubices et.* — **454.** 1. *ex eaque summa vicesimam primam accipies; et haec erit crassitudo sphaerae.*

Daran schliesst sich folgender in GERBERT und bei CANTOR nicht befindlicher Abschnitt:

Ecce est pentagonus, qui unumquodque latus trium pedum habeat, et dicatur ter tres ter fiunt XXVII. Ex hac summa deducatur, id est abstrahatur, aera, id est latus, in quo sunt tres, remanent XXIIII. Huius medietas, id est duodenarius, huius pentagoni, qui tres in unoquoque latere 5 *habet, aream implet.*[1])

428. (Cap. 15.) 7. *sextas; dodras.* — 8. *climma; arripennis; dicitur* fehlt. — 9. *leuca* fehlt. — 11. *digiti tres; secundum quosdam, quod.* — 12. *digitus unus et tertia.* — 15. *sextantem.* — 16. *uncias XXIII.* — 18. *climma.* — 19. *in latitudine CX* fehlt; *CXX in longitudine.* — 20. *quod* bis *actis* fehlt. — 21. *CXX.* — 24. *passus M* fehlt. — 25. fehlt.

452. (Cap. 53.) 5. *Ager est; quo.* — 5—6. *sunt dispositae.* — 6. *sic quaeratur.* — 7. *quinta sumenda est.* — 9. *quem et alia inveniendi est regula.* — 10. *id est per.* — 11. *Ecce numerus arborum.* — 13. *partiantur.* — 14. *efficient; id est latitudinem.*

461. (Cap. 72.) 10. *domos ponere.* — 11. *pedum* fehlt; *vero* fehlt. — 12. *iunctae* fehlt; *fiunt.* — 13. *faciunt.* — 16. *tricesimam.* (Cap. 73.) 21. *unaquaeque.* — 23. *fiunt XLV.* — 26. *fiunt.*

462. (Cap. 74.) 3. *si vis locare.* — 5. *auferas, id est $\overline{VII}$ · DCXLIIII; vero tertiam sumas.* — 6. *hos et pro; ergo.* — 8. *pedibus* fehlt; *Ves $\overline{MMCI}$ · XCVI.* (Cap. 75.) 12. *sit.* — 13. *implere.* — 14. *habebit.* — 15. *Ces XXes CCXL.* — 16. *CXLIV; per longitudinem et latitudinem multi-*

1) Es ist nach der Formel für die Fünfeckszahl

$$P r_5 = \frac{3r^2 - r}{2}$$

für $r = 3$ gerechnet worden. Hier ist auch der Beweis dafür, dass die Annahme CANTORS, *a. a. O.* S. 125, es bedeute *aera* die Seite, richtig ist. Es heisst ja „*aera, id est latus*“.

plicans. — 16—17. *quater* $\overline{MMCXLVIII}$ · *CC, quos si dividis.* — 18. *fiunt; remanentibus* bis *unciis* fehlt.

453. (Cap. 56, 1 u. 2 Abs.) 19. *XXII*[da] *sublata.* — 21. *si vis deinde, vel.* — 21—22. *ducenda est diametrum.* — 22. *dimidia.* — 22—23. *dimidium diametri duceretur.*

454. (Cap. 57.) 17. *diametrum XIIII.* — 18. *fiunt; pedes* fehlt. — 19. *parte quarta decima fiunt CCCVIII; et* fehlt.

463. (Cap. 79.) 13. *diametrum in se.* — 14. *sumas; et duabus.* — 14—15. *remanentibus* bis *VIII* fehlt; *Quod et idem.* — 19. *ducatur area et fiunt pedes.*

Zwischen Zeile 17 und 18 dieses Capitels steht noch folgender in Gerbert nicht befindlicher Absatz:

De omni circulo XXII[dam] *aufer partem, et illius numeri remanentis tertiam partem pro circuli diametro semper habebis. Embadum si nosse desideras, numerum dimidium totius circuli per dimidium diametri multiplica, et huius summam pone in embadum.*

Es folgt nochmals Cap. 56 Abs. 3 absolut mit der obigen Fassung übereinstimmend.[1])

434. (Cap. 25[a].) 15. *Ad aestimandum cuiusque rei altitudinem sole lucente.* — 16. *res illa fuerit sub divo posita.* — 17. *semper* fehlt; *elige.* — 18. *virgam huic parte coaequatam.* — 20. *fuerit. quantum virga superat.* — 21. *virga mensuram habet.* — 22. *est umbra* fehlt; *a virga superatur.* — 22—23. *adicias.* — 24. *rei illius habeto.*

465. (Cap. 83.) 8. *quoti.* — 9. *uno pede.*

42) Darunter, Blatt 135[v], 19—23 steht folgender Text zu einem Gesange nebst einer sonstigen Bemerkung:

Cordex care cantilenam care canta caritativam chordas contrectando canens caeli conditori carmen, cui canunt chori caelorum canticam canticorum, cane chordis canta corde creatura creatorem.

Diapason et diatesseron symphoniae et intentae et remissae pariter consonantiam diapason in modulatione consona reddunt. 5

43) Die folgende Seite, Blatt 136[r], enthält nur die Worte „*Pondera*

---

1) In einem Werke „*Liber theoreumaciae*" betitelt, das spätestens aus dem 14. Jahrhundert stammt — es befindet sich u. A. in dem *Codex lat. Mon.* 14684 aus dem XIV. Saec. —, heisst das *18. theorema* des 2. Buches: CIRCULI SPERICAM CRASSITUDINEM INVENIRE. ARCHIMENIDES *dicit: circulum incrassare si vis, dyametrum eius cubices, et ipsam cubicationem 11*[es] *ducas, ex eaque summa 20*[am] *unam partem minuas et illa erit spere crassitudo.* Hier wird also unser vorliegender Absatz dem Archimedes zugeschrieben. Mit welchem Rechte? und woher stammt diese Behauptung?

et mensurae", ist sonst aber leer. Die betreffende Abhandlung, vielleicht schon im X. Jahrhundert geschrieben, — jedenfalls ist die betreffende Hand die älteste im ganze Bande[1]) — beginnt auf Blatt 136^v mit ganz vergilbten Schriftzügen folgendermassen:

Signa.

DE RATIONE VNTIARVM.

ϛϛ Scripulus est sex siliquae.

ψ Dimidia sextula. Duo scripuli vel siliquae XII.

ᴗ Sextula sive sescla. quatuor scripuli vel siliquae XXIIII.

u. s. w.

l Assis sive as. duodecim unciae.

Zwischen den Zeilen sind von etwas späterer Hand, die aber jedenfalls dem XI. Jahrhundert zugehört, Interlinearglossen mit bedeutend schwärzerer Schrift gemacht. Die beiden folgenden Capitel setze ich vollständig hierher.

| DE PROBATIONE AURI ET ARGENTI. 137^r,

Omne aurum purum cuiuslibet ponderis omni argento similiter puro eiusdem tamen ponderis densius est parte sui vicesima, quod ita probari potest. Si purissimi auri libra cum aeque puri argenti simili pondere | 137^v
5 sub aqua conferatur, in statera XII denariis, id est vicesima sui parte, aurum gravius argento, vel argentum levius auro invenitur. Quapropter si inveneris ossus aliquod auro formatum, cui argentum permixtione inesse videatur, scireque volueris, quantum auri, quantumve in eo contineatur argenti, sume argentum sive aurum, et examinato suspecti operis pondere
10 non minus pensatum massam de utrovis metallo fabricato, atque utrumque, et opus scilicet et massam, staterae lancibus inponeto aquaeque inmergito. Si argentea fuerit massa, quam fecisti, opus praeponderabit, si aurea fuerit, allevato opere aurum inclinabitur. Hoc tamen ita fiet, ut, quot partibus inclinatur aurum, tot idem partibus sublevetur argentum, quia quicquid

---

1) Es ist dies mit ein Grund, weshalb ich behaupte, dass mit Blatt 75 die eigentliche Sammlung von Werken schloss, und alles Übrige spätere Zuthat ist, wo aber das später sich nicht auf die Abfassungszeit, sondern auf die Hinzufügung zu dem eigentlichen Corpus der Handschrift bezieht, welche, wie ich oben gesagt habe, mit dem durch X bezeichneten Quaternio ihren Abschluss hatte. Dass der Abschnitt aus früherer Zeit stammt als die übrigen Theile, folgt auch daraus, dass der Text erst auf der Rückseite des Blattes beginnt, was nur bis in das X. Jahrhundert üblich war. Die Worte *Pondera et mensurae* sind von der Hand des Inhaltsverzeichnisses geschrieben.

138r in ipso opere fuerit sub aqua praeter | solitum per[1]) .... qui priorem 15
pertinere, quod .... ad argentum propter scarsitatem est referendum. et ut hoc facilius possit adverti, considerare debes tam in gravitate auri, quam in levitate argenti VII denarios significare libram, sicut prima lectionis huius fronte praefixum est.

DE MENSURA CAERAE ET METALLI IN OPERIBUS FUSILIBUS. 20

In fundendis operibus cuiusque ponderis metallum quotlibet ad certum caerae pondus respondere debeat.

Ad caerae unciam unam:

Stagni unciae VII et denarii XVII;
Aeris albi unciae VIII et denarii XVI; 25
Aeris cypri unciae VIIII et denarii III;[2])
Argenti unciae X et denarii XII;[3]) } (!)
Argenti unciae X et denarii XII; }
139v Plumbi unciae XII et denarii VI;[4]) |
Auri unciae XVIIII et denarii VIII. 30

Item si caerae fuerit libra, stagni VII librae et unciae X et denarii quattuor mittendi sunt, quia, quot uncias cera habuerit, tot VII uncias et XVII denarios stagni pondus habere debebit, et ideo si caerae fuerit libra, id est XII unciae, duodecies VII unciae stagni, quae faciunt VII libras, et duodecies XVII denarii mittendi sunt, qui faciunt CCIIII denarios, 35 id est uncias X et denarios IIII.

Si fuerit caerae libra, aeris albi librae VIIII sumendae sunt et duodecies XVI denarii, quod sunt uncias VIIII et denarios XII.

In libram caerae aeris cypri librae VIIII et denarii XII mittendi sunt.

Sic in libram caerae auricalci librae VIIII et duodecies tres denarii, 40 qui faciunt unciam unam et denarios XVI.

Contra libram caerae argenti librae X et duodecies XII denarii.

139r | Simili modo in libram caerae plumbi librae XIII et duodecies VII denarii mittendi sunt.

In auri fusione contra libram caerae auri librae XVIIII et duodecies 45 octo denarii, quod sunt unciae IIII et denarii XVI.

---

1) Es sind hier, offenbar mit Absicht, drei Zeilen vollständig mit Tinte überschmiert worden; soweit es möglich war, habe ich die Worte zu entziffern versucht. Eine von der Stelle genommene Photographie liess ebenfalls ein weiteres Lesen nicht zu. 2) Es muss heissen: *et denariis I,* wie aus dem Folgenden ersichtlich ist. 3) Hier sollte sicher stehen: *Auricalci unciae VIIII et denarii III.* Der Abschreiber ist offenbar aus einer Zeile in die andere gerathen. 4) Nach dem Folgenden müsste es heissen: *unciae XIII et denarii VII.*

Das folgende Capitel

DE MENSURA ET PONDERIBUS

ist wieder ein Ausschnitt aus den *Gromatici Veteres* (I, 371, 6—376, 5). Ich setze davon nur die Varianten hierher.

371. 8. *provinciis.* — 9. *provincias.* — 17. *pedes.* — 17—18. *pertica; pedes X* fehlt. — 26. *sive medico*(!). — 28. *quidam autem.*

372. 9. *pedes.* — 10. *pedes.* — 11. *XIIII.* — 17. *semi iugerum.* — 20. *pedes.* — 22. *pedes.* — 25. *quia apud.* — 32. *procellit.*

373. 1. *longitudinem.* — 6—7. Statt *qui* bis *demonstrat* steht *ac demonstratur.* — 29. *duo; faciunt* fehlt. — 29—30. *staterae.*

374. 8. *ex quattuor; et duodecim.* — 13. *IIII punctos; lunam V.* — 23. *quae habet.* — 27. *cyatum.*

375. 1. *X oxifalum; cyati.* — 2—3. *quod sunt; quattuor* fehlt. — 9. *coniugii.*(!) — 11. *coniugius. Coniugius.* — 18. *sicut* fehlt. — 28. *XX et quattuor.*

376. 2. *coaequatus.* — 5. Mit dem Worte *Modius* bricht der Auszug ab.

Blatt 144^r ist leer.

43) Auf Blatt 144^v bis 195^r, 10 und 160^r, 12—160^v folgt eine Schrift ohne Titel. Anfang: *Quicumque astronomicae disciplinae et caelestium sphaerarum geometricaliumque mensurarum altiorem scientiam diligenti veritatis inquisitione altius rimari conatur.*

Nach dem Handschriftenverzeichniss ist es Hermanns des Lahmen *liber de utilitatibus astrolabii.* Auf Blatt 159^r heissen die Schlussworte: *Huius autem divisionis exordium a meridiei linea, quae per medium primum gradum cancri ducitur, capit initium.* Auf Blatt 160^r beginnt dann die Schrift wieder: *Duo sunt extremi vertices mundi, quos appellant polos* und endigt ohne richtigen Schluss mitten im Satze abbrechend Blatt 160^v *In lacteo circulo inter pisces.*

44) Auf Blatt 159^r, 10—160^r, 12 ist nun, merkwürdig genug, so dass man ohne genaues Aufmerken es nicht finden würde, ein Fragment des Briefes Adelbolds an Gerbert zwischengeschrieben. Derselbe beginnt mit dem letzten Worte von Zeile 7 auf Seite 474 bei Olleris und geht bis zum Schlusse des Briefes. Er stimmt vollständig mit der Lesart überein, von welcher ich oben einen genauen Abdruck gegeben habe, weshalb ich von einer Mittheilung der *Vario lectio* Abstand nehme.

Mit Ausnahme von Blatt 136 bis 143, welche ich, wie oben gesagt, für den ältesten Bestandtheil der Handschrift halte, ist nur Blatt 1—75 unzweifelhaft aus der ersten Hälfte des XI. Jahrhunderts, während der

übrige Theil recht wohl aus den letzten Jahrzehnten desselben herstammen kann. Nur in den genannten älteren Abschnitten kommt niemals das sogenannte runde *s* vor, sondern steht ausnahmslos auch am Ende das lange *ſ*. Auch in den übrigen Theilen ist das *ſ* überwiegend, doch habe ich an wenigstens 6 Stellen schon das runde *s* verwendet gefunden, ein deutliches Zeichen späterer Entstehung.

Anmerkung zu Seite 102, 115 und 116. Das Wort *inauratura* kommt in der Lachmannschen Ausgabe der *Gromatici Veteres* nur Seite 97, Zeile 8 in folgendem Zusammenhange vor: *planum est quod Greci epipedon appellant, nos constratos pedes; in quo longitudinem et latitudinem habemus; per quae metimur agros, aedificiorum sola, ex quibus altitudo aut crassitudo non proponitur, ut opera tectoria, inauraturas, tabulas, et his similia.* Weder aus diesem Texte noch aus der zugefügten Figur 70 kann man errathen, was unter *inauratura* zu verstehen ist. Aus dem *Codex Arcerianus* hat dann Cantor eine Reihe noch nicht veröffentlichter Paragraphen der Gromatici, dem Epaphroditus zugeschrieben, in seinen *Agrimensoren* herausgegeben. In diesem Abschnitt (*Agrimensoren S. 213*) heisst es nun in § 25: *Sfera est, cuius diametrum ped. XIIII. quaero huius sferae inauraturam. S. Q. semper diametrum duco bis, fit XXVIII. hoc multiplico in se, fit DCCLXXXIIII. hoc duco XI, fit* $\overline{VIII}$ *DCXXIIII. sumptam partem XIIII. DCXG. tot ped. erunt.* Daraus folgt, dass unter *inauratura* die Oberfläche der Kugel verstanden werden soll. In unserer Handschrift ist derselbe Paragraph ebenfalls in etwas erweiterter Gestalt vorhanden. In ihm steht nun hinter *inauraturam: hoc est profunditatem sive spissitudinem,* was dieser Erklärung widersprechen würde. Ebenso widersprechend ist die Stelle auf S. 116 dieser Abhandlung, wo es anfangs heisst: *Sphaera fuerit data, cuius dyameter sit pedum VII, eius solidos pedes sic quaere,* und wo doch am Schlusse gesagt wird: *tot pedum erit eiusdem inauratum.*

Bei Gerbert (S. 466) heisst das Cap. 86: *Circuli inauraturam sic quaeras: diametrum circuli in se ductum vigesies bis multiplica. Effectae summae septimam accipias, et haec erit circuli inauratura; quod idem esset, si per diametrum circulum multiplicares.* Dass hier nicht mehr von der Oberfläche der Kugel die Rede ist, welche schon früher als *sphaerae area* berechnet worden, dürfte einleuchten. Dem ist aber auch wirklich so, denn in spätern Jahrhunderten wird der Inhalt des Kreisringes zwischen dem Kreise vom einfachen und dem vom doppelten Radius als *circuli inauratura* bezeichnet und, wenn auch fälschlich, als das Vierfache des Grundkreises berechnet, wie ich es in verschiedenen Handschriften der Münchner Hof- und Staatsbibliothek konstatiren konnte.

Wie *inauratura* die Oberfläche der Kugel bedeuten konnte, da die wörtliche Uebersetzung doch jedenfalls Vergoldung ist, und wie sich der Begriff dann auf jenen Kreisring verschieben konnte, hat mir Herr Professor E. v. Wölfflin in München auf meine Anfrage in freundlichster Weise so auseinandergesetzt:

München, 26. März 1895.

„Der Uebergang von „Vergoldung" zu „Oberfläche" scheint mir ganz natürlich. Es konnte doch einmal das Problem auftauchen: Wie viel Gold braucht man zum Vergolden einer Kugel? z. B. einer Kugel, auf der die Victoria steht. Wäre das

Gold, mit welchem wir die Nüsse vergolden, kreisförmig, nicht quadratisch zugeschnitten, so könnte man — so nahm man an — mit vier runden Plättchen die entsprechende Kugel vergolden. Wenn man nun auch annahm, der Kreis verhalte sich zu dem Kreisring wie 1 : 4, so lag nichts näher als den Ausdruck inauratura = das Vierfache, darauf zu übertragen."

Ich glaubte zur Aufklärung der merkwürdigen Anwendung obigen Wortes in so verschiedenartiger Bedeutung diese Auseinandersetzungen hinzufügen zu sollen.

Thorn, 7. September 1895.

Man verbessere gütigst in den beiden vorhergehenden Abhandlungen folgende Druckfehler:

Seite	47	Zeile	9	tilge	*dem.*
„	61	„	4	lies	*cariofoliis.*
„	69	„	3	„	*solidos.*
„	89	„	13	„	beidemale *BE.*
„	91	„	8	tilge	das Komma hinter *steterit.*
„	93	„	6	lies	*DAE.*

EINE

AUTOBIOGRAPHIE VON GOTTHOLD EISENSTEIN.

MIT ERGÄNZENDEN BIOGRAPHISCHEN NOTIZEN

HERAUSGEGEBEN

VON

F. RUDIO.

Bei Gelegenheit der Herausgabe der Briefe Eisensteins an Stern, welche ich in Gemeinschaft mit meinem Freunde und Kollegen, Herrn Prof. Hurwitz, übernommen hatte[1]), empfand ich es als ein Bedürfnis, die Situationen, denen jene Briefe entsprungen waren, durch eine kurze Darstellung der äusseren Lebensverhältnisse Eisensteins zu erläutern. Es schien mir dies um so wünschenswerter, als merkwürdigerweise über den allerdings nur allzu kurzen Lebenslauf des grossen Mathematikers, der plötzlich wie ein hellstrahlendes Meteor auftauchte, um eben so rasch wieder zu verschwinden, nur äusserst wenig — und das Wenige noch vielfach entstellt — in die Oeffentlichkeit gedrungen ist.

Den Ausgangspunkt meiner Nachforschungen boten mir die verschiedenen Legenden, welche sich an den Eintritt Eisensteins in das akademische Leben geknüpft haben. Nach der einen Version soll Eisenstein die Universität ohne Maturitätszeugnis bezogen haben; nach einer andern soll er zwar durch ein Maturitätsexamen hindurchgegangen sein, dabei aber in allen Fächern, mit Ausnahme der Mathematik, eine so unglaubliche Unwissenheit an den Tag gelegt haben, dass die Prüfungsbehörde, namentlich auch im Hinblick auf das angeblich wenig befriedigende sittliche Verhalten des Examinanden, die Abweisung desselben zu beschliessen im Begriffe war. Da habe sich im letzten Momente noch Schellbach erhoben und erklärt, man dürfe sich der Lächerlichkeit nicht aussetzen, einem jungen Manne heute das Reifezeugnis zu verweigern, den vielleicht morgen schon die Berliner Akademie zu ihrem Mitgliede ernennen würde. Daraufhin habe Eisenstein das Zeugnis der Reife erhalten.

Nachdem ich durch die gefälligen Bemühungen von Herrn Prof. Knoblauch in Erfahrung gebracht hatte, dass Eisenstein auf Grund eines Reifezeugnisses vom Friedrich-Wilhelms-Gymnasium an der Berliner Universität immatrikuliert worden war, wandte ich mich an meinen hochverehrten ehemaligen Lehrer, Herrn Stadtschulrat E. Fürstenau in Berlin, der sich mit dankenswertester Bereitwilligkeit der weiteren Nachforschungen annahm. Dieselben ergaben bald eine unerwartet reichhaltige Ausbeute. Am 21. Jan. d. J. schrieb mir Herr Fürstenau: „Der Direktor des hiesigen Friedrich-Wilhelms-

---

1) Siehe pag. 171 dieses Heftes.

Gymnasiums, Herr Nötel, hat mir auf meine Anfrage mitgeteilt, dass Eisenstein an dieser Anstalt am 22. September 1843 die Reifeprüfung als Extraneer bestanden hat. Direktor Nötels Mitteilung lautet weiter:

> „Schellbach schreibt unter die mathematische Arbeit bloss „sehr gut“ und im Zeugnis: „In der Mathematik reichen seine Kenntnisse weit über den Umfang des Gymnasialunterrichtes hinaus. Sein Talent und sein Eifer berechtigen zu der Erwartung, dass er einst wesentlich zur Ausbildung und Erweiterung der Wissenschaft beitragen werde.“ Auch sonst lautet das Zeugnis durchweg anerkennend und mindestens befriedigend. Von seiner umfangreichen Vita lasse ich Ihnen zur beliebigen Benutzung eine Abschrift anfertigen, die Sie baldigst erhalten sollen.“

Soweit der Brief des Herrn Direktor Nötel, der auch für mich sehr interessant gewesen ist, weil er eine ganze Anzahl Legenden, die auch von Eisensteins Bekannten geglaubt und weiter verbreitet worden sind, vollständig vernichtet. Sobald ich die in Aussicht gestellte Abschrift der Vita erhalten habe, schicke ich sie Ihnen. Ich darf wohl annehmen, dass dies Schriftstück noch weit interessanter ist, als die obigen Nachrichten, da es doch unzweifelhaft eine Darlegung des eigenen Bildungsganges enthalten wird.“

Die mir bald darauf von Herrn Fürstenau gütigst zugestellte Vita Eisensteins schien mir in der That trotz mancher jugendlicher Weitschweifigkeiten so viel des Interessanten zu bieten, dass ich mich, im Einverständnis mit Herrn Hurwitz, entschloss, dieselbe, losgelöst von den oben erwähnten Briefen, zum Mittelpunkte einer besonderen Publikation zu machen. Bevor ich sie aber jetzt in extenso folgen lasse, um dann später noch weitere Ausführungen daran zu knüpfen, ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Stadtschulrat Fürstenau und Herrn Direktor Nötel meinen verbindlichsten Dank dafür auszusprechen, dass sie mich in die Lage versetzt haben, ein Schriftstück mitzuteilen, welches von den zahlreichen Bewunderern des Genius Eisensteins gewiss mit Freude begrüsst werden wird.

Curriculum Vitae des Gotth. Ferdinand Eisenstein.

Indem ich einer Hochwohllöblichen Prüfungskommission hiermit die Schilderung meines Lebenslaufes vorlege, erlaube ich mir zuerst einige Worte über die Tendenz dieser Arbeit vorauszuschicken.

Eine Uebersicht des eigenen Lebens soll nicht allein die äusserlichen Schicksale und Ereignisse, die einen betroffen haben, die Verhältnisse, in

denen man sich befunden hat, überhaupt alles sämmtlich Erlebte und Erfahrene von der Geburt an bis auf den heutigen Tag zusammenstellen, sie muss auch den ganzen Verlauf der geistigen Ausbildung verfolgen, sie muss zeigen, wie man nach und nach durch Irrtümer und Fehler hindurch Verstand und Herz zu dem Standpunkte herangebildet hat, von dem aus man auf sein vergangenes Leben zurückblickt. Das Erstere ist gleichsam nur die Form, zu welcher das Letztere erst den wahren Inhalt liefert. Die Aufgabe, bloss die historischen Facta seines Lebens neben einander zu stellen, ist, indem dazu nur ein gutes Gedächtnis gehört, allerdings weit leichter, als die andere, sich aus seinem jetzigen geistigen Standpunkte heraus auf die verschiedenen Stufen seiner Entwickelung zurückzuversetzen und für einen Augenblick so zu denken und zu fühlen, wie man in seiner Kindheit gedacht und empfunden hat. Doch will ich, um diese Arbeit ihrer Bestimmung und meinem jetzigen Zwecke gemäss einzurichten, nämlich den Grad meiner sittlichen und Verstandesreife an den Tag zu legen, das Schwierige des Unternehmens nicht scheuen und also mit der Beschreibung meines äusseren Lebens, soweit es in meinen Kräften steht, eine Geschichte meiner inneren Entwickelung zu verbinden versuchen.

Ehe ich mich jedoch in die Vergangenheit zurückversetze, werde ich erst noch einen Blick auf die Gegenwart werfen.

Ein passender Zeitpunkt ist mir für die Anfertigung dieser Arbeit geworden; ein würdiger Ruhepunkt ist mir gegeben, um von demselben aus der Gegenwart in mein verflossenes Dasein zurückzublicken. — Ich stehe gerade im zwanzigsten Jahre. Eine wichtige und bedeutungsvolle Zahl im menschlichen Leben. Mit dem zwanzigsten Jahre tritt man in eine ganz neue Epoche des Lebens ein; man geht vom Knaben- zum Mannesalter über, aus einer Zeit der Ausbildung und Abhängigkeit in eine Zeit der Reife und Selbstständigkeit; bis dahin war man noch ein halbes Kind, andere Menschen, Eltern, Freunde, Lehrer, sorgten für einen, man wurde von anderen geleitet, nur auf einen kleinen Wirkungskreis war man beschränkt. Jetzt hat man das Alter erreicht, um ins grosse Leben einzutreten, man wird auf seine eigene Kraft hingewiesen, man soll jetzt das selbst für sich thun, was bisher Andere für einen gethan haben; bisher war man noch in steter Entwickelung, jetzt soll sich der Charakter und die Gesinnung festgesetzt haben, die einen nun für das ganze Leben begleiten werden. Im zwanzigsten Jahre kann man schon genau den Pfad erkennen, den der Mensch einschlagen wird, man sieht schon deutlicher, zu welchen Erwartungen und Hoffnungen man berechtigt ist. Der Mensch, der bisher ein Gegenstand der Nachsicht gewesen ist, dem man leicht einen Fehltritt als eine Uebereilung der Jugend verzieh, wird nun ein Vorwurf des strengen

Urteils, der jeden Schritt, welchen er thut, selbstständig verantworten und vertreten muss. Wenn man bisher noch über die künftige Bestimmung in Zweifel war, so muss man jetzt mit sich vollkommen im Reinen sein, welchem Berufe man sich für die Zukunft zu widmen gedenkt; man muss sich fürs ganze folgende Leben den Weg vorgezeichnet haben, den man mit Gottes Hülfe zu vollenden beabsichtigt. Was man bisher gelernt und erfahren hat, waren allgemeine Vorbereitungen, die die Grundlagen für jede specielle Richtung bilden sollen; nun muss man seinen ganzen Fleiss und Eifer auf Erlangung derjenigen Kenntnisse und Hülfsmittel wenden, welche für das besondere Fach, das man sich erwählt hat, notwendig werden. — Von hoher Bedeutung ist also dieses Jahr, welches gleichsam die Eingangspforte bildet, durch welche wir wie aus einer Vorschule in das ganze folgende Leben der Wirksamkeit und des Schaffens hinübertreten. Und besonders für mich ist dieser Zeitpunkt in hohem Grade wichtig, der ich, von feuriger Liebe zu einer speciellen Wissenschaft begeistert, nun den Pfad vor mir erblicke, auf den ich ihr ganz folgen, ihr mein ganzes Leben weihen darf. Während ich bisher mit Recht von Eltern und Lehrern dazu angehalten wurde, mich in allen Zweigen des Wissens zu fördern, und ich so fortwährend, wie stark es mich auch anzog, mit dieser vorherrschenden Neigung im Kampfe liegen musste, so soll mir jetzt die teure Freundin zur Begleiterin durch's Leben gegeben werden, ich werde, wenn mir mein jetziges Vorhaben nicht misslingt, nicht mehr genötigt sein, meine Kraft zu zersplittern, sondern werde dieselbe ganz auf dies eine Ziel wenden können, auf das mich mein innerer Beruf hinweist.

So will ich denn hier mit meinem vergangenen Leben gewissermassen abschliessen, um dann mit ruhigem Blicke, mit frischem Mute und Gottvertrauen in die Zukunft schauen zu können.

Das Licht der Welt erblickte ich am 16. April des Jahres 1823 in Berlin. Meine Eltern hatten sich im Juni des vorhergehenden Jahres verheiratet, und so war ich der erste Sohn ihrer Ehe; ich bekam später noch fünf Geschwister, drei Brüder und zwei Schwestern; diese Geliebten hat mir aber alle nacheinander der unerbittliche Tod geraubt, so dass ich jetzt von sechs Kindern meiner Eltern der einzig am Leben Gebliebene bin. Die heilige Taufe erhielt ich von dem Garnisonsprediger Ziehe, derselbe, der meine Eltern getraut hatte; so wurde ich in den Bund der evangelischen Christen aufgenommen.

Die erste Periode meines Lebens kann ich bis zum elften Jahre rechnen, weil ich in diesem zum erstenmale das elterliche Haus auf längere Zeit

verliess und nach dem zwei Meilen entfernten Dalldorf in Pension gegeben wurde. Aus dieser ersten Jugendzeit erinnere ich mich mit Dankbarkeit und Rührung der innigen und wahren Zärtlichkeit meiner Eltern gegen ihren Erstgeborenen, und ich hing auch meinerseits mit der herzlichsten Liebe an Vater und Mutter, besonders an der Mutter, von der auf Augenblicke getrennt zu sein, mich schon Thränen kostete. Ich fand wenig Geschmack an dem Umgang mit andern Knaben desselben Alters; ich lebte viel mit mir und in mir selbst und so konzentrierte sich mein höchstes Glück und Wohlsein im Schosse der Familie. Von der lauten und fröhlichen Lust der Gleichaltrigen zog ich mich durchaus zurück, ich konnte mich auch selten mit einem derselben gut stellen. Ich war sehr verschlossen und zurückhaltend, ja beinahe ängstlich; aber wenn ich einmal einem Freunde mein jugendliches Herz aufschloss, so blieb es auch mit ganzer Liebe an demselben hängen. Ich hielt mich lieber zu den Mädchen oder zu erwachsenen, besonders ernstern Leuten, und das grösste Vergnügen war für mich, der Rede eines geistreichen Mannes lauschen zu dürfen. Während andere Knaben spielten, sass ich zu Hause und horchte den Gesprächen der Erwachsenen oder liess mich von der Mutter unterhalten und belehren. Die Mutter gab mir eigentlich meine erste Erziehung, denn der Vater wurde durch sein Geschäft in Anspruch genommen und konnte sich daher nur wenig um mich bekümmern; von der Mutter habe ich meine ersten Begriffe, die ersten Anfangsgründe meiner Kenntnisse. Ich erinnere mich noch, wie sie, um mir die Zeichen der Buchstaben einzuprägen, jedes auf eine sinnbildliche Weise auslegte, ein 𝔒 war ein Thorweg, und so jeder Buchstabe nach seiner Form, 𝔎 (K) war ein Schlüssel u. s. w.

Ich war in meiner Jugend äusserst kränklich und schwach, daher auch sehr reizbar. Eine schwere Krankheit, die Gehirnentzündung, welche fast alle meine Geschwister hingerafft hat, bedrohte auch mein Leben. Ich wurde zwar wieder hergestellt; aber die üblen Folgen blieben zurück und sie scheinen mich auch jetzt noch nicht ganz verlassen zu haben. Wahrscheinlich sind sie die Ursache einer, von Zeit zu Zeit wiederkehrenden, mich nun schon seit zwei Jahren verfolgenden hypochondrischen Stimmung, die ich nicht zu überwinden vermag.

Meine Mutter bewohnte oft mit mir in der warmen Jahreszeit eine Sommerwohnung in einem freieren Teile der Stadt oder vor dem Thore, während der Vater in der Stadt das Geschäft versah. So lernte ich frühzeitig das Angenehme des Lebens in der freien Natur kennen, obwohl mir auch dieser Genuss, wie viele, durch meine Kränklichkeit und Reizbarkeit verbittert wurde; dieselbe wurde auch Ursache vieler Unarten, mit denen die Mutter hart zu kämpfen hatte; denn so sehr diese mich auch liebte, so

zeigte sich ihre wahre Zärtlichkeit erst darin, dass sie mich keineswegs verzog und mir durchaus nichts nachsah.

Durch meinen Krankheitszustand geschah es auch leider, dass ich hinter vielen zurückblieb, denen ich in der That geistig überlegen war. Besonders wurde es mir schwer, alles das zu begreifen, was Sitte und Uebereinkunft festgesetzt haben, den sogenannten Anstand des äusseren Lebens. Ich konnte eher als sechsjähriger Knabe den Beweis eines mathematischen Satzes verstehen, als dass man in der Stube die Mütze von dem Kopf nehmen oder dass man das Fleisch nicht mit der Gabel zerreissen, sondern mit dem Messer zerschneiden müsse. Indem ich von allen Dingen erst den Grund wissen wollte, machte ich durch meine Widersetzlichkeit meinen Eltern vielen Kummer. Ueberall, wo es auf eine Operation des Verstandes, auf ein Ergrübeln ankam, da war ich auf dem Platze, aber hartnäckig und eigensinnig stand ich da, sobald es hiess: Das ist so, das muss und soll so geschehen. Natürlich blieb ich bei dieser Sinnesart in allem dem, was praktisch ausgeübt, nicht theoretisch begriffen sein will, in allen diesen kleinen Fertigkeiten und sich stets wiederholenden täglichen Geschäften, in denen andere Kinder so schnelle Fortschritte machen, immer auf derselben Stufe stehen. Diese Lücke hat mir später manche Verlegenheit und Unannehmlichkeiten zugezogen, und ich musste nachher viel Kraft aufwenden, um das Versäumte nachzuholen, während ich es früher mit grosser Leichtigkeit hätte erwerben können. Ueberhaupt sind die übel daran, welche es in den Verrichtungen, die wir mit dem Tier gemein haben, nicht zu einer Geschicklichkeit bereits in der Jugend gebracht haben, sie werden überall anstossen, da es mit gereiftem Verstande später sehr drückend ist, sich noch mit diesen geringfügigen, aber doch unumgänglich nötigen Dingen zu befassen, wenn sie einem nicht von früher her zur Gewohnheit geworden sind.

Unter den verschiedenen Bekannten meiner Eltern, die in unserem Hause aus- und eingingen, erwähne ich nur einen, der vielen bedeutenden Männern noch aus der Erinnerung bekannt sein wird. Er ruht schon längst im Grabe, aber er hat zuerst meine schlummernde Neigung für die Mathematik erkannt und geweckt. Diese hatte sich bisher nur an den Tag gelegt durch eine grosse Lust, Alles zu zerstören, um auszufinden, was im Innern verborgen wäre, oder im Durchkriechen von allerlei verborgenen Räumen und Gängen, um zu sehen, wo man zuletzt hinkäme. Lautz war der Name dessen, der mich zuerst mit den Zahlen bekannt und vertraut machte, und obgleich sich diese Eindrücke wegen der zu grossen Jugend bald verwischten, so bin ich ihm doch eine dankbare Erinnerung schuldig. Er hatte unter Pestalozzi studiert und brachte dessen Ideen in unsere Familie.

Leider gehörte er zu denen, welche anders sind, als andere Menschen; ob er ein Genie gewesen ist, weiss ich nicht, ein grossartiger Kopf war er gewiss; aber er wusste sich nicht in Verhältnisse zu fügen, er war kein Freund regelmässiger Thätigkeit, und verstand es nicht, seinen Willen einem fremden unterzuordnen. Eine herrliche Anstellung als einer der ersten Lehrer an der Cauerschen Anstalt in Charlottenburg, deren Gründer er zum Teil war, gab er auf und starb im Elend. Er wurde mir von den Eltern als ein warnendes Beispiel vorgehalten, man prägte mir dasselbe um so mehr ein, als man bei mir Anlage zu einer ähnlichen Richtung zu bemerken glaubte.

Von meinem sechsten Jahre an besuchte ich die Bartelsche Schule in der Scharrenstrasse, welche noch existiert. Hier wurde der Grund zu meiner ersten wissenschaftlichen Bildung gelegt. In den untern Klassen erhielt ich meine Elementarbildung. Aus dieser Zeit entsinne ich mich noch, wie viel Qual mir das Schreiben, und im Rechnen die langen Multiplikationsexempel machten. Hieraus würde man nun mit Unrecht schliessen, dass es schlecht mit meinen mathematischen Fähigkeiten gestanden habe, wenn ich am Rechnen keine Neigung fand; denn nur das Mechanische, sich stets Wiederholende der Operation verdross mich, so wie mich noch jetzt verwickelte Rechnungen ohne weiteren Zweck anwidern, während ich keinen Fleiss scheute, wenn es etwas Neues gab, worin ich Geist, Idee bemerkte.

Mit grosser Leichtigkeit begriff ich die Formen der Grammatik und der Sprache, wie Alles, was sich auf logische Art fassen liess.

In den oberen Klassen lernte ich nun schon Geschichte und besonders Lateinisch, worin ich ziemliche Fortschritte machte. Neben andern Dingen wurden auch einige Hauptsachen aus der Physik vorgetragen. In dieser Zeit trat bei dem Knaben durchaus noch keine vorherrschende Neigung hervor; es fehlte der anregende Anstoss von aussen; sobald dieser gegeben ward, so musste sie sich in aller Kraft entwickeln, wie sich nachher zeigen wird.

Um meine Gesundheit zu stärken, gaben mich meine Eltern zu dem Prediger Horn nach Dalldorf in Pension, wo ich, von geistiger Anstrengung frei, ganz dem Genusse der Landluft leben sollte.

Höchst schmerzlich war mir diese erste Trennung von meiner Familie, und meine Sehnsucht nach den Eltern war fast unerträglich; ich konnte oft Stunden lang in Thränen zerfliessen. Ich schrieb die zärtlichsten Briefe an meine Teuren, in denen ich sie mit allerlei Liebesnamen benannte. Aus dieser Weichheit meiner damaligen Stimmung entstand eine gewisse poetische Richtung. Ich machte mehrere Gedichtchen, in denen sich die kindliche Liebe zu den Eltern aussprach. Diese Richtung ging später auf

andere Stoffe über, und ich habe seitdem immer so ab und zu, wenn mich meine Stimmung dazu anregte, ein Verschen niedergeschrieben. Ich nehme mir die Freiheit, am Schlusse dieser Arbeit eine Probe aus der neueren Zeit beizufügen, von deren poetischem Unwert ich übrigens vollkommen überzeugt bin.

Ich bekam damals einige Neigung zu landwirtschaftlichen Beschäftigungen. Ein Stückchen Land, welches mir gegeben wurde, grub ich selbst um, bepflanzte und besäete es und freute mich, wenn die Blumen so schön blühten und wuchsen.

Meine geistige Ausbildung wurde in dieser Pension, in der ich ein halbes Jahr blieb, nicht sehr gefördert, im Gegenteil vergass ich vieles, was ich auf der Schule bereits gefasst hatte, besonders im Lateinischen. Doch erhielt ich hier meinen ersten Unterricht auf dem Fortepiano durch den Küster des Dorfes Herrn Bergemann, zu dem ich viel Liebe fasste. Im Zeichnen leistete ich damals recht Gutes. Dieses letztere Talent hat mich jetzt gänzlich verlassen; ich habe es später nie wieder geübt, und wenn ich jetzt die Zeichnungen aus jener Zeit betrachte, so muss ich gestehen, dass ich nicht halb so Gutes leisten könnte. Die Musik jedoch habe ich bis auf den heutigen Tag mit vielem Eifer und Lust getrieben, und glaube es bereits zu einiger Fertigkeit auf dem Fortepiano gebracht zu haben. Auch zum Komponieren hatte ich nicht wenig Neigung; einige meiner Kompositionen gefielen wenigstens denen recht gut, welchen ich sie vorspielte. Es ist immer gut, neben seiner Berufsthätigkeit noch ein solches zweites Talent auszubilden, das einem gleichsam den Eintritt in die Gesellschaft eröffnet. Man kann die Leute am Ende nicht mit mathematischen Sätzen unterhalten, aber eine hübsche Sonate oder Ouverture hört Jeder gern. Bei meinem Aufenthalte in Liverpool und Dublin, wo man in solchen Dingen noch hinter dem Kontinent zurück ist, hielt man mich fast für einen Virtuosen, während ich hier doch nur für einen höchst mittelmässigen Spieler gelten kann.

Ich verliess diese Pension, um in die Cauersche Anstalt in Charlottenburg einzutreten, die, nach dem Tode Cauer's eingegangen, sich damals unter dem Schutze des Staates auf's Neue bildete. Ich war einer der Ersten, die in die auf diese Weise ganz neu entstehende Anstalt eintraten, die jetzt von dem Direktor Herrn von der Lage geleitet wird. Die Art, auf welche ich hier behandelt wurde, sagte mir auf keine Weise zu. Es herrschte in diesem Institute eine fast militärische Disciplin, die mir, der ich bisher immer unter der Sorgfalt einer liebenden Hand gestanden hatte, am allerwenigsten zusagte. Ich war bis jetzt sehr viel mir selbst überlassen gewesen und hatte das Meiste nach Bequemlichkeit und Laune ge-

than. Hier ging Alles nach einer strengen unumstösslichen Ordnung. Auf Kommandowort musste man aufstehen, zu Bette gehen, arbeiten, spielen. Unter beständiger Aufsicht des Lehrers konnten wir auch nicht das Geringste nach eigenem Belieben thun. Unter dieser ungewohnten strengen Zucht verlebte ich sehr traurige einförmige Tage. Doch habe ich dieser Anstalt viel Gutes zu verdanken. Vor allen war es hier, wo mein mathematisches Talent zuerst ins Licht gezogen wurde; hier genoss ich den ersten systematischen Unterricht in der Mathematik. Die Methode, welche der Direktor bei diesem anwandte, bestand darin, dass jeder Schüler selbst die Beweise der einzelnen Sätze nach der Reihe auffinden musste. Ein Vortrag fand durchaus nicht statt; keiner durfte seinen Beweis dem Nachbar mitteilen, und Jeder erhielt den folgenden Satz unabhängig von den Uebrigen, sobald er den vorhergehenden richtig bewiesen und gründlich erfasst hatte. Hier begann für mich eine ganz neue Thätigkeit, ein ganz neues Leben; mit ungeheurem Eifer und einem wahren Durste ergriff ich das Gegebene; schon bei den ersten Sätzen war ich schnell den Anderen vorausgeeilt, und ich bewies bereits den hundertsten Satz, während sich meine Mitschüler noch beim elften oder zwölften abmühten. Nur ein junger Mann, der jetzt auf der Universität Medicin studiert, konnte mir nacheifern. — Die Methode war sehr gut, denn zuerst wurde durch das Selbstdenken die Kombinationskraft des Verstandes gestärkt, und dann wurde auch durch das gemeinsame Streben ein allgemeiner Wetteifer unter den Lernenden angeregt. Doch allgemein dürfte diese Methode wohl nicht anzuwenden sein. Denn wie sehr ich auch das alles anerkenne, was zu ihrem Vorteile gesagt werden kann, so muss man doch gestehen, dass sie die Kraft zu sehr vereinzelt und dass sie keine Uebersicht des Ganzen gewährt, welche nur durch einen guten Vortrag erreicht werden kann. Jetzt, wo sich durch die mannigfaltigen und herrlichen neueren Entdeckungen ein so gewaltiger Reichtum des Stoffes gehäuft hat, ist man durchaus genötigt, in der Masse zu arbeiten, wenn man aus dieser unendlichen Fülle nur einigermassen das Hauptsächlichste und Wichtigste aufnehmen und sich zu eigen machen will. Das grösste mathematische Genie kann am Ende nicht allein alles das auffinden, was erst durch das Zusammenwirken vieler ausgezeichneter Köpfe entstanden und aus ihrem gemeinsamen Schaffen hervorgegangen ist. Diese Methode des Selbstauffindens ist für Schüler nur dann anwendbar, wenn es sich um die Auffassung eines kleinen Gebietes leichter, besonders geometrischer Sätze handelt, wo am Ende alles derselben Behandlungsweise unterworfen wird und keine neuen und scharfsinnigen Ideen erfordert werden. — Daher kam es auch, dass der Kreis meiner mathematischen Kenntnisse, so gründlich und sicher ich auch das einmal

Verarbeitete gefasst hatte, doch in quantitativer Hinsicht, als ich die Anstalt verliess, sehr klein war, und dass ich sogar in der ersten Zeit auf dem Gymnasium hinter meinen Mitschülern zurückstehen musste. — Wenn ich nun jetzt den grossen Umfang des Gebietes überschaue, das ich beherrsche, so scheint es mir fast ein Wunder zu sein, wie ich dies alles in den wenigen 5—6 Jahren ohne allen Unterricht erreichen konnte. Aber als ich nur einigermassen die nötigen Hülfsmittel erlangen konnte, warf ich mich mit einem solchen Eifer und mit einem solchen eisernen Fleisse auf das Studium, dass es wohl nicht anders kommen konnte. Denn ich lebte ganz in dieser Wissenschaft, und wenn ich Tage und halbe Nächte angestrengt bei meinem mathematischen Buche, oder einer Ausarbeitung, oder einer eigenen Idee sass, so war mir dies keineswegs eine Anstrengung, sondern die grösste Wohlthat und ich schätzte mich glücklich, wenn man mich nur nicht von aussen her störte oder daran hinderte. Wenn ich mich dann zur Ruhe legte, so schlief ich mit dem freudigen Gedanken ein, am folgenden Tage die Arbeit wieder fortsetzen zu können, und der früheste Morgen fand mich schon wieder am Pulte.

Ich kehre zu meiner Pension zurück, um die Fortschritte anzugeben, die ich ungefähr dort in den übrigen Zweigen des Wissens gemacht habe. Im Lateinischen waren mir die Hauptsachen aus der Grammatik schon bekannt; ich las hier den Cornelius Nepos und Julius Caesar; wir verfertigten Exercitien und Extemporalien. In der Geschichte erhielt ich eine allgemeine Uebersicht der Griechen- und Römerzeit. Griechisch wurde gar nicht getrieben; ich studierte für mich selbst in der letzten Zeit meines Dortseins die Buttmannsche Grammatik und brachte es bis zu den unregelmässigen Zeitwörtern. Es war mein Wunsch, sobald ich wieder nach Berlin käme, gleich in die Obertertia eines Gymnasii eintreten zu können. Xenophons Anabasis zu lesen gestattete man mir nicht, sondern nahm mir die Bücher fort.

Der Unterricht wurde in verschiedenen Klassen erteilt, die den unteren Klassen eines Gymnasii bis etwa Untertertia entsprachen. Ich habe sie alle durchgemacht, und meine Eltern nahmen mich nicht eher aus der Anstalt fort, als bis ich dort nichts mehr lernen konnte.

Das Leben der Pensionäre war, wie schon gesagt, ein höchst einförmiges und streng abgemessenes. Wir schliefen alle zusammen in einem grossen Saale unter Aufsicht eines Lehrers. Auf seinen Ruf erhoben wir uns um $5\frac{1}{2}$ Uhr des Morgens, wuschen uns und zogen uns an, um uns sodann zum gemeinschaftlichen Frühstück hinunter zu begeben, das aus Milch und Semmel bestand. Der sehr geräumige Schlafsaal wurde selbst bei der strengsten Kälte nicht geheizt, und so kam es denn oft im Winter, dass

ich, wenn es recht hart gefroren hatte, aus dem steinernen Wasserkruge mit dem Stiefelknechte das Eis loshauen musste, um den Neptun aus seiner krystallenen Behausung hervorzulocken. — Nach genossenem Frühstück fertigten wir die aufgegebenen Arbeiten; um 8 Uhr begannen die Lektionen und dauerten bis 4 Uhr Nachmittags mit einer Unterbrechung von zwei Stunden für eine kleine Erholung und das Mittagsbrot, an dem in einem grossen Saale Lehrer und Schüler auf gleiche Weise Teil nahmen. Bis 6 Uhr war wieder Arbeitsstunde; den Abend hatten wir frei und konnten uns nach Belieben unter Aufsicht des Lehrers beschäftigen. Wenn sich hier ein Lehrer nicht das nötige Ansehen zu geben wusste, so brach der jugendliche Uebermut um so stärker hervor, je strenger er die übrige Zeit in Fesseln erhalten wurde. — Der Direktor war so gütig, mich in den Winterabenden das Schachspiel zu lehren, welches mir viel Vergnügen gewährte.

Uebrigens waren wir fast immer in den Zimmern oder auf dem Hofe eingeschlossen und bekamen die Stadt kaum zu sehen.

Mein Gesundheitszustand war während dieser Zeit ein sehr trauriger, wahrscheinlich zum Teil eine Folge der ungewohnten Strenge, die vielleicht für andere junge Leute recht vorteilhaft sein mag, aber auf meine Persönlichkeit gerade die entgegengesetzte Wirkung hervorbrachte. Nicht allein, dass ich fortwährend an einer trüben Stimmung litt und nie recht munter sein konnte, ich war auch von Zeit zu Zeit recht ernstlich und oft gefährlich krank und musste mit Fieber und Kopfentzündungen kämpfen. Da ich fast immer unwohl war, so glaubte man zuletzt, dass ich mich nur verstelle, und so hatte ich neben meinen Schmerzen auch noch bittere Kränkungen zu ertragen, denn der Gesunde und Starke schaut auf den Kränklichen und Schwachen gewöhnlich mit Verachtung, und so macht es besonders die Jugend. Ich musste schon früh erfahren, was Leiden heisst, und die bittere Frucht des Lebens kennen lernen; meine sehr reizbare Gemütsstimmung liess mich alles doppelt empfinden, was Andere kaum berührte. Doch murre ich hierüber nicht, und aus derselben liebenden Hand des Schöpfers, die mir Anlagen und Liebe zur Wissenschaft schenkte, empfange ich auch die mir beschiedenen Leiden mit Ergebung.

Im September des Jahres 1837 verliess ich endlich die Cauersche Anstalt und kehrte nach langer Trennung in den Kreis meiner Familie zurück, die damals aus meinen Eltern, mir und einer kleinen Schwester von sechs Jahren bestand, an der ich mit grosser Zärtlichkeit hing, die mir aber nach dem Willen Gottes bald darauf durch den Tod entrissen wurde.

Von dieser Zeit an habe ich bis zum Juli des verflossenen Jahres 1842 die Gymnasien der Hauptstadt besucht und zwar das Friedrich-Wilhelmsche

des Herrn Direktor Spilleke ruhmwürdigen Andenkens, auf dem ich Obertertia und die beiden Sekunda durchmachte, und dann bei dem Herrn Direktor Bonnell die Prima des Werderschen Gymnasii. Diese neue Periode meines Lebens war wieder ziemlich gleichförmig; ich ging alle Tage nach dem Gymnasium, kam nach Hause, machte meine Schularbeiten und verwendete dann die ganze mir übrige Zeit auf meine mathematischen Beschäftigungen.

Meine Neigung zur Mathematik wurde jetzt so vorherrschend, dass ich oft darüber das Andere vernachlässigte, und meine Fortschritte in den übrigen Lehrgegenständen keineswegs glänzend genannt werden konnten. Wenn nun auch deshalb meine Lehrer nicht so überaus mit mir zufrieden sein konnten, so leistete ich doch so ziemlich das Aufgegebene und kam in der gehörigen Zeit durch die Klassen.

Ich hatte mich schon damals fest entschlossen, mich dem Studium der Mathematik zu widmen, und ohne erst zu fragen, welche Laufbahn mir auf diesem Wege offen stände, folgte ich hierin nur meiner Neigung und einer inneren Stimme. — Darin bin ich in der That glücklicher, als viele junge Leute in meiner Lage, dass mir die Natur selbst eine so bestimmte Richtung für's ganze Leben vorgezeichnet hat, von der ich nicht abweichen kann und auf die ich nach Abschweifungen in andere Gebiete immer wieder durch eine innere Gewalt zurückgeführt werde. Traurig scheint es mir, wenn Jünglinge, die studieren wollen, von einem zum andern schwanken, bald dieses bald jenes ergreifen und wieder fallen lassen, und oft im letzten Semester ihres Besuches von Prima nicht wissen, was sie nun eigentlich studieren sollen. Wie viele studieren auch blos aus falscher Eitelkeit, weil sie sich schämen, ein Handwerk zu ergreifen oder sich irgend einem anderen Berufe zu widmen, während doch am Ende jede Stellung dem Manne zur Ehre gereicht, der in ihr mit Lust und Liebe seine Pflicht erfüllt. Wer nicht in sich den Beruf und wahre Liebe zur Wissenschaft verspürt, der mag nicht studieren; wenn er sich auch noch so viele positive Kenntnisse vielleicht mühselig zusammenrafft, immer bleibt er ein dürftiger Nachbeter, ein Ungeweihter, und nie wird er sich zur Selbständigkeit erheben und mit schöpferischer Kraft der Begeisterung die Grenzen der Wissenschaft hinausrücken.

Es würde zu weitläufig sein, wenn ich mich genau über den Weg aussprechen wollte, den ich bei meinen mathematischen Bemühungen gegangen bin. Nur im Allgemeinen Folgendes. — Was mich an der Mathematik so gewaltig und ausschliessend anzog, war, neben dem Inhalte selbst, besonders die eigentümliche Art der Denkthätigkeit, mit welcher die mathematischen Dinge behandelt werden. Diese Art des Schliessens und Auf-

findens neuer Wahrheiten aus den alten, sowie die ausserordentliche Klarheit und Evidenz der Sätze, und das Geistreiche der Ideen, welcher ganze Theorien zu Grunde liegen, hatte einen unwiderstehlichen Reiz für mich. Keine andere Wissenschaft schien eine so reiche Ernte und einen so unerschöpflichen Stoff zur Ausübung dieser Geistesthätigkeit darzubieten. Kant zeigt ganz deutlich in seiner Kritik, dass dieses Feld das einzige ist, auf dem der menschliche Geist sich ohne alle Schranke ergehen und ohne Aufhören a priori die glänzendsten Entdeckungen machen kann; in der That ohne Aufhören, da jede neue Konstruktion, von einem genialen Geiste geleitet, neue Resultate hervorbringen muss. Ich gewöhnte mich bald daran, von den einzelnen Sätzen ab schärfer in den Zusammenhang zu dringen und ganze Theorien als eine Einheit aufzufassen. So ging mir die Idee des mathematisch Schönen auf. Es giebt ein solches mathematisch Schöne, ebenso wie ein aesthetisch Schönes, welches man aber nur dann erst begreift, wenn man voll Begeisterung ein ganzes System von Entwickelungen, welche sich an eine Hauptidee schliessen und durch ihre Gemeinschaft zu einem Endresultate führen, in ihrer Verkettung, Harmonie, und Genialität als ein organisches Ganze wie ein Gemälde im Geiste überschaut. Es giebt auch einen mathematischen Takt oder Geschmack, der der Untersuchung gleich von vorn herein ansieht, ob sie zu einem Resultate führen werde oder nicht, und die Betrachtungen und Entwickelungen demgemäss leitet.

Nachdem ich mir durch eigenes Studium (denn einen Privatlehrer hatte ich nie) die Elementarkenntnisse erworben hatte, ging ich zur höheren Mathematik über und studierte ausser andern Büchern über diese Gegenstände besonders die herrlichen Werke von Euler und Lagrange über die Differential- und Integralrechnung. Da ich es mir zum Gesetz machte, jede neue Theorie, sobald ich sie verstanden hatte, gleich schriftlich auszuarbeiten, so prägten sich mir die Dinge weit tiefer ein, und ich beherrschte sie vollkommen, wozu noch kam, dass ich jede Sache auf mannigfaltige Arten kennen zu lernen suchte. Oft spazierte ich im Garten oder Zimmer auf und ab und demonstrierte mir, gleichsam mich selbst unterrichtend, ganze Reihen von Sätzen vor, deren Beweise mir klar waren. Ich kann diese Methode als sehr praktisch empfehlen. Das Docieren war überhaupt meine Neigung und ich hätte dieselbe gern an meinen Mitschülern befriedigt, wenn diese nicht meiner Begeisterung mit einer wahren Eiseskälte entgegengetreten wären, und wenn ich nicht hätte mit Betrübnis bemerken müssen, wie wenig Interesse die jungen Leute an einer Wissenschaft nahmen, die ich meinerseits mit aller Liebe umfasste, deren ich nur fähig war.

Als ich in der höheren Analysis schon ziemlich fest war, wurde ich durch andere Betrachtungen auf die Zahlentheorie geführt, die ich bisher merkwürdiger Weise für unfruchtbar gehalten hatte. Ich erkannte meinen Irrtum und legte mich nun mit um so grösserem Eifer auf diesen Zweig der Mathematik, der in der Art der Behandlung und dem Stoffe nach von den übrigen Teilen durchaus abweicht, so dass er ganz getrennt von ihnen sein unabhängiges Bestehen in sich selbst hat, obgleich die höchsten und feinsten Partien beider Wissenschaften sich jetzt durch Dirichlet's und Jacobi's Forschungen aneinander zu neigen scheinen. Dieser doppelt schwierigen und doppelt interessanten Wissenschaft wandte ich seitdem meinen Hauptfleiss zu, und ich habe mir das Meiste und Wichtigste aus derselben zu eigen gemacht; besonders bin ich auch zu ihren neuesten Entdeckungen vorgedrungen. Die Zahlentheorie ist den Mathematikern eben wegen ihrer Eigentümlichkeit weniger bekannt; aber sie scheint jetzt den wichtigsten Platz in der Mathematik einnehmen und zur Basis aller neueren Forschungen dienen zu wollen, wie z. B. die Kreisteilung von Gauss und Dirichlet's Theorie der Anzahl der quadratischen Formen beweist. Aus ihr habe ich daher auch einen Gegenstand, der sich gut abrunden lässt, gewählt, um ihn als eine Art Probearbeit einer Hochwohllöblichen Prüfungskommission vorzulegen.

In den Jahren 1840 bis 1842 besuchte ich die Kollegia des Professor Ohm an der Universität und zwar mit einer solchen Energie und Eifer, dass ich kaum die Zeit von einer Stunde zur anderen abwarten konnte. Auch nahm ich, wenn es die Zeit erlaubte, an den Vorlesungen des grossen Lejeune Dirichlet Teil, der uns jetzt leider auf einige Zeit verlassen hat, um in freundlicheren Zonen seine edle Lebenskraft zu stärken; mit seinem würdigen Lobe möchte ich mein ganzes Leben ausfüllen, hielte ich es nicht für Anmassung, meine schwache Stimme da hinzuzufügen, wo so allgemeine Anerkennung der erhabensten Geister stattfindet. Selbst wenn ich, um mit Homer zu reden, ein ehernes Herz und eine tausendfältige Zunge hätte, würde ich nicht die Begeisterung schildern können, in die mich die grossartigen und genialen Entdeckungen dieses ungeheuren Kopfes nicht nur in einem, sondern fast in allen Gebieten der Mathematik versetzt haben; wie sich immer in den verwickeltsten Theorien ein einfacher, schöner und klarer Hauptgedanke zum Grunde legt, an den sich das Ganze wie um einen Mittelpunkt anreiht, wie er immer den wahren Kern herauszufinden weiss, so dass man, wie man auch nachher den Gegenstand anders drehen mag, doch einsieht, das war es, worauf es ankam, so und nicht anders musste es gemacht werden. — Das wesentliche Princip der neueren mathematischen Schule, die durch Gauss, Jacobi und Dirichlet begründet ist, ist im Gegen-

satz mit der älteren, dass während jene ältere durch langwierige und verwickelte Rechnung (wie selbst noch in Gauss' Disquisitiones) und Deduktionen zum Zweck zu gelangen suchte, diese mit Vermeidung derselben durch Anwendung eines genialen Mittels in einer Hauptidee die Gesammtheit eines ganzen Gebietes umfasst und gleichsam durch einen einzigen Schlag das Endresultat in der höchsten Eleganz darstellt. Während jene, von Satz zu Satz fortschreitend, nach einer langen Reihe endlich zu einigem fruchtbaren Boden gelangt, stellt diese gleich von vorn herein eine Formel hin, in welcher der vollständige Kreis der Wahrheiten eines ganzen Gebietes konzentriert enthalten ist und nur herausgelesen und ausgesprochen zu werden darf. Auf die frühere Art konnte man die Sätze zwar auch zur Not beweisen, aber jetzt sieht man erst das wahre Wesen der ganzen Theorie, das eigentliche innere Getriebe und Räderwerk. So gründet z. B. Jacobi auf die einzige Idee, dass in dem Differentiale einer rationalen Funktion jede Potenz von x nur nicht das Glied $\frac{1}{x}$ vorkommen könne, die ganze Theorie die Umkehrung der Reihen in aller Vollständigkeit, Gauss auf eine eigentümliche Anordnung der ganzen Zahlen nach den Exponenten ihnen congruenter Potenzen seine grossartige Theorie der Kreisteilung, an der Jahrtausende verzweifelt hatten, (seit Euclid war nichts hinzugekommen). Doch genug hiervon, der Mathematiker darf seine Begeisterung nicht zu sehr in Worte ausgiessen; dies bleibt dem Dichter und Künstler vorbehalten, der seine Kunst im Gesange bis an den Himmel erheben und ihre Herrlichkeit in glänzenden Bildern ausschmücken kann; in eine so ernste und hohe Wissenschaft, wie die Mathematik, darf sich die Phantasie nicht einmischen, hier ist nur redliches Forschen und eifriges Weiterdringen am Platze, jedes weitläufige unwissenschaftliche Sprechen über die Gegenstände entfernt schon von ihrem wahren Geiste: Das beseligende Gefühl, das von demjenigen empfunden wird, der, von ihren Wahrheiten durchdrungen, ihren eigentlichen Wert zu schätzen versteht, ist für sie der herrlichste Weihrauch.

Nachdem ich so mein mathematisches Leben und Treiben geschildert, welches fast meine ganze Zeit ausfüllte und meine ganze Energie in Anspruch nahm, habe ich nur noch wenig von dem Uebrigen hinzuzufügen. — Meine Lektüre war sehr gewählt, sie wurde von meiner Mutter geleitet. An Romanen und schwülstigen Sachen, welche sonst junge Leute mit einer wahren Wut zu verschlingen pflegen, fand ich gar keinen Gefallen und so habe ich meine Phantasie so ziemlich rein erhalten. Nur klassische und wirklich bildende Bücher las ich und zog aus diesen die Stellen schriftlich aus, die mich am meisten interessierten, indem sie mir entweder

auffallend oder wegen ihres Inhaltes wichtig erschienen; auch fügte ich zuweilen eine Beurteilung des Buches hinzu, wie es mich zur Zeit berührte. Auf diese Weise konnte ich bemerken, wie sich nach und nach Geschmack und Urteil des Knaben verbesserte oder wenigstens änderte. Auch führte ich ein ziemlich regelmässiges Tagebuch, worin ich nicht allein die Ereignisse verzeichnete, sondern auch besonders, wie ich sie aufgefasst und was ich dabei gedacht und empfunden hatte, und auch hier zeigte sich mir, wie die Ansichten in den verschiedenen Perioden des Lebens schwanken und wechseln.

In die Wahrheiten der christlichen Religion wurde ich von dem Herrn Konsistorialrat Hossbach eingeweiht; ich genoss seinen Unterricht in den Jahren 39 und 40. Ostern 1840 wurde ich durch meine feierliche Einsegnung in den Bund und die Gemeinschaft derjenigen Christen aufgenommen, welche ihr Glaubensbekenntnis öffentlich abgelegt und gelobt haben, durch ihre Gesinnung und ihren Wandel sich als wahre Jünger Christi ihres Meisters und Erlösers würdig zu bezeigen.

Bis zum Ende dieser Lebensperiode nämlich, bis zum Juni v. Js., war mein Leben in ziemlicher Gleichförmigkeit der Alltäglichkeit geblieben, wie es bei dem fortwährenden Aufenthalte in einer und derselben Stadt oder deren nächsten Umgebung kaum anders sein konnte. Jetzt sollte ich auf längere Zeit Vaterstadt und Vaterland verlassen, um in fremdem Lande neue Menschen, neue Sitten, ein ganz neues Leben kennen zu lernen. Da der Vater schon seit zwei Jahren sein Geschäft nach England verlegt hatte, so reiste ich mit der Mutter den Sommer des vorigen Jahres dorthin und habe bis vor zwei Monaten in England, Irland und Wales mich aufgehalten. Was ich auf dieser Reise, die mich Stubengelehrten auf einmal in's weite Leben hinauswarf, alles gesehen und erfahren, wie ich mit Wehmut halb Hamburg in Asche liegen sah, wie ich grosse Städte kennen lernte mit ihren Merkwürdigkeiten und den Wunderwerken des menschlichen Erfindungsgeistes, Eisenbahnen unter Felsen und den Fundamenten der Häuser, Brücken unter den Betten der Flüsse, grossartige Kanäle und Häfen, Beweise von Ungeheurem, was die Kraft der Menschen vereint leisten kann, wie ich herrliche Landschaften durchreist bin, ausgeschmückt mit den lieblichsten Reizen der Natur, wie mich der Anblick des majestätisch sich ausbreitenden, unermesslichen Meeres berührt hat, wie ich sechs grosse Seereisen gemacht habe, unter ihnen eine sehr gefährliche zwischen den Klippen von Anglesia durch die ungeheure Kettenbrücke, unter deren Hauptbogen das ganze Berliner Schloss mit Bequemlichkeit Platz findet, und unter welcher man mit aufrechtstehenden Masten hindurchsegelt, wie ich den Snowdon, den höchsten Berg Englands bestieg, wie ich die Bekanntschaft grosser Männer,

als O. Connel's, gemacht habe und die bitterste und schmutzigste Armut neben dem üppigsten und glänzendsten Reichtum erblickte; wie ich ein Volk sah, welchem der Staat, die Politik und seine Freiheit alles ist, ein Volk, das weit entfernt von der Aeusserlichkeit und schalen Renommisterei der andern Länder, nur das schätzt und dem Wert beilegt, was wirklich, was gediegen, was nützlich ist, wie ich besonders den Geist der dortigen Universitäten kennen zu lernen suchte, um ihn mit dem der unsrigen zu vergleichen, wie endlich diese ungeheure Mannigfaltigkeit der Eindrücke die ganze Gestaltung meines innern und äussern Lebens, Urteil und Lebensanschauung wesentlich verändert und modifiziert hat, so dass ich durch diese Reise ein ganz anderer Mensch geworden bin: dieses alles der Reihenfolge nach mit gehöriger Klarheit und Deutlichkeit auseinanderzusetzen und zu beschreiben, würde allein den Raum mehrerer Bogen erfordern und also die dieser Arbeit gesteckten Grenzen bei Weitem überschreiten. Gern und mit grossem Vergnügen würde ich, wenn ich nicht eine Hochwohllöbliche Prüfungskommission zu ermüden fürchten müsste, in einer besonderen Arbeit Derselben eine vollständige Beschreibung meiner Reise vorlegen, die ich hier wegen der zu grossen Menge des Stoffes bei Seite zu lassen mich genötigt sehe. — Genug, die Sehnsucht nach meinem Vaterlande und der Wunsch ihm nützlich zu werden, so wie auch Familienangelegenheiten haben mich wieder zurückgeführt, da ich in der That schon die Absicht hatte, mich in Dublin niederzulassen und meine Studien dort fortzusetzen. Ich bin gekommen, um mich nun mit neuem Eifer und Fleisse auf die Studien zu legen, die ich auf meiner Reise nicht im mindesten vernachlässigt habe. So stehe ich denn auf dem Punkte, mir mit Gottes Hülfe durch das Bestehen der Abiturienten-Prüfung die Erlaubnis zum rechtmässigen Besuche der Universität und die Aussichten auf eine Carriere im Preussischen Staate zu erwirken.

Dies ist in kurzer Uebersicht die Schilderung meines verflossenen Lebens. Es ist das Leben eines zwanzigjährigen Jünglings, der erst in die Welt eintritt und der nicht wie der gereifte Mann oder der thatenumgebene Greis auf eine kräftige Fülle von stolzen und segensreichen Werken zurückschauen kann. Es ist arm an Leistungen, Thaten, Verdiensten, aber doch vielleicht nicht arm an allem guten Stoff; es enthält die Entschlüsse und Vorsätze für das künftige Leben und die Keime zu allem Guten und Schönen, welches sich einst später entwickeln kann. — Aber auch die Weise der Auffassung bei dieser Lebensbeschreibung und die Art der Beurteilung ist die eines Jünglings; wenn sich daher manche einseitige Darstellung, mancher fehlerhafte Gedanke, manches unrichtige Urteil vorfinden sollte, so macht doch gerade diese Mangelhaftigkeit die Arbeit zu

dem, was sie eigentlich sein soll, eine selbstständig verfasste Schilderung des vom jetzigen Standpunkt in objektiver Anschauung aufgefassten Lebens.

Indem ich also hiermit diesen jugendlichen Versuch der Nachsicht und Wohlgewogenheit Einer Hochwohllöblichen Prüfungskommission, dem sehr verehrten Herrn Direktor und den hochgeschätzten Herrn Professoren und Lehrern des Gymnasii zur Ansicht vorlege, wage ich es, auch mich und meine jetzigen Wünsche ganz gehorsamst Deren Gunst zu empfehlen.

Einer Königlichen Preussischen Hochwohllöblichen Prüfungskommission

Ganz Ergebenster Diener

Gotthold Eisenstein
wohnhaft Sophienstr. No. 24 bei Hr. Wentzel.

Berlin im August 1843.

Der Eisenstein'schen Vita war noch ein längeres, „Begeisterung“ betiteltes Gedicht beigefügt. Ich habe dasselbe trotz darin enthaltener hübscher Gedanken hier nicht mit aufgenommen, weil es mir mehr den idealen Sinn als das poetische Geschick des Verfassers zu bekunden schien. Dagegen dürften die folgenden, die Darstellung ergänzenden Notizen noch am Platze sein.

Die Eltern von Ferdinand Gotthold Max Eisenstein waren beide in Danzig geboren, der Vater, Johann Konstantin, am 3. Sept. 1791, die Mutter, Helene geb. Pollack, am 10. April 1799. Beide bekannten sich, nach den vor mir liegenden amtlichen Mitteilungen, zu der evangelischen Konfession; doch lassen verschiedene Umstände nicht zweifelhaft erscheinen, dass sie jüdischer Abstammung waren. Das Schwesterchen, welches Eisenstein in seiner Vita erwähnt, hiess Anna Mathilde Margarethe; es wurde 1833 geboren und starb 1840. Der Vater war Kaufmann. Er wird in den amtlichen Registern als Plattirfabrikant, Kommissionär und Agent aufgeführt; jedenfalls scheint seine Beschäftigung eine wechselnde gewesen zu sein. Mit Rücksicht auf sein Verhältnis zu seinem Sohne Gotthold ist die Bemerkung nicht ohne Interesse, dass er gleichzeitig mit diesem, Juni 1843, aus England nach Berlin zurückkehrte. Mit der Berufswahl seines Sohnes war er offenbar nicht einverstanden; dieser wohnte weder als Student noch später als Docent in dem elterlichen Hause und scheint auch von seinen Eltern keine, oder doch keine ausreichende Unterstützung erhalten zu haben. Schon am 20. April 1846 schrieb Gotthold Eisenstein an Stern: „Es fehlt

mir hier an aller Geselligkeit, mit meinen Verwandten bin ich ganz zerfallen, denn dies sind Geldleute, die mich nicht verstehen und die ich nicht verstehe, ...". Es sei noch hinzugefügt, dass die Eltern Eisensteins bis Ende 1869 in Berlin wohnten und dann nach Charlottenburg übersiedelten, wo beide hochbetagt starben, der Vater am 28. November 1875, die Mutter am 28. Juli 1876.

Zu den Lehrern Eisensteins gehörte auch Schellbach, der, wie mir Herr Fürstenau mitteilte, bis Ostern 1842 den mathematischen Unterricht in den obersten Klassen des Friedrich-Werderschen Gymnasiums erteilte und dann an das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium berufen wurde. Doch war wohl Eisenstein, der schon als Gymnasiast die Vorlesungen von Ohm und Dirichlet besuchte, dem Schellbach'schen Unterrichte damals längst entwachsen.

Auf Grund des am 22. Sept. 1843 erhaltenen Reifezeugnisses wurde Eisenstein am 21. Oktober desselben Jahres an der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin unter dem Rektorate Lachmanns immatrikuliert. Seine ersten grösseren Ferien, Ostern 1844, benutzte er zur Erfüllung seines sehnlichsten Wunsches: die Bekanntschaft mit Gauss zu machen. Mit welcher Verehrung er an diesem hing, davon zeugen nicht nur alle seine wissenschaftlichen Arbeiten, sondern auch die zahlreichen Aussprüche, in denen er bei jedem sich bietenden Anlasse bewundernd auf Gauss hinweist. „Durch Gauss habe ich nun einmal meine mathematische Bildung erlangt," schreibt er gelegentlich an Stern, und ein anderes Mal: „An Gauss brauche ich wohl keinen Gruss zu bestellen, denn zu dem lieben Gott kann man nur beten und bewundernd emporblicken." Umgekehrt brachte aber auch Gauss dem kaum 21jährigen Mathematiker eine hohe Wertschätzung entgegen. Und was noch mehr ist, er wusste dieselbe auch thatkräftig zu bekunden. Es ist das grosse Verdienst von Gauss, namentlich durch Vermittelung Alexanders von Humboldt Eisenstein die Wege geebnet und ihn vor den drückendsten Sorgen bewahrt zu haben.

Während der in Göttingen zugebrachten Ferien trat Eisenstein auch in näheren Verkehr mit Stern, mit dem ihn bald eine herzliche Freundschaft vereinigte. Die Briefe, welche Eisenstein an Stern in den Jahren 1844 bis 1850 richtete, sind, abgesehen von ihrem wissenschaftlichen Inhalte, von um so höherem Interesse, als sie nicht nur eine Uebersicht über die Entwicklung der äusseren Lebensverhältnisse Eisensteins darbieten, sondern auch einen Einblick in die Seelenvorgänge dieses merkwürdigen Mannes gewähren, dem es durch eine verhängnissvolle Verkettung von Umständen und jedenfalls nicht durch eigne Schuld allein versagt war, zu einer seinen hohen Geistesgaben entsprechenden inneren Befriedigung zu gelangen. Da es nicht die Absicht dieser Zeilen ist, ein vollständiges Lebensbild Eisensteins zu

entwerfen, so kann ich mich darauf beschränken, auf diese Briefe zu verweisen und denselben noch einige wenige Daten hinzuzufügen.

Es ist heute nicht mehr leicht, sich eine Vorstellung davon zu bilden, welch' ungeheures Aufsehen Eisenstein bei seinem Eintritte in die wissenschaftliche Welt erregte. Kaum hatte er das Maturitätsexamen absolviert, so folgten auch Schlag auf Schlag, in fast unheimlich kurzen Intervallen, die Publikationen, die ihn mit einem Male an die Seite der ersten Mathematiker des Jahrhunderts stellten. Brachte doch, um nur eines hervorzuheben, im Jahre 1844 der 27. Band des Crelle'schen Journals unter 27 mathematischen Beiträgen nicht weniger als 16, welche von stud. G. Eisenstein herrührten! Man muss alles dies im Auge behalten, um das unerhörte Ereignis zu verstehen, dass Eisenstein, bevor er nur das dritte Semester zurückgelegt hatte, von der philosophischen Fakultät der Breslauer Hochschule zum Doktor honoris causa ernannt wurde. Kein Geringerer als Jacobi war es gewesen, der hierzu die Anregung gegeben hatte. „Den 15. Februar 1845 erhielt der stud. phil. Eisenstein in Berlin wegen seiner ausgezeichneten mathematischen Arbeiten auf den Antrag der Professoren Kummer und Fischer das Ehrendiplom der Fakultät" — so lautet, wie mir Herr Prof. Sturm mitzuteilen die Güte hatte, die kurze aber inhaltsschwere Notiz in dem Fakultätsprotokolle. Dass ein junger, noch nicht 3 Semester zählender Student, der also, um einen drastischen akademischen Ausdruck zu gebrauchen, fast noch ein Fuchs war, von einer deutschen Universität zum Ehrendoktor ernannt wurde, dürfte in der Geschichte der Wissenschaft ohne Beispiel dastehen.

Bei solchen wissenschaftlichen Erfolgen konnten materielle nicht ganz ausbleiben. Wie schon bemerkt, verdankte Eisenstein dieselben vornehmlich Gauss und Alexander von Humboldt. Dem, was Eisenstein hierüber in seinen Briefen Stern mitteilt, füge ich, der historischen Darstellung etwas vorgreifend, im Wortlaute bei, was mir neben anderen wertvollen Daten Herr Geh. Kanzleirat Skopnik aus den Akten der Berliner Universität gütigst zur Verfügung gestellt hat:

„Mittelst allerhöchster Ordre vom 8. Juli 1846 war Eisenstein zu seiner Ausbildung im Lehrfache vom 1. April 1846 ab auf 3 Jahre eine jährliche Unterstützung von 500 Thalern aus allgemeinen Staatsfonds bewilligt worden. Am 14. September 1849 hat Eisenstein um Fortgewährung dieser Unterstützung gebeten, in Folge dessen der Minister die philosophische Fakultät zur gutachtlichen Aeusserung über den Erfolg seiner bisherigen Lehrwirksamkeit und seine sittliche Haltung aufforderte. Die Fakultät berichtet sehr günstig, umgeht aber eine Empfehlung zur weiteren Unterstützung, weil sie von dieser bisher nichts wusste, darin aber auch andern

Privatdocenten gegenüber eine Benachteiligung gelegen hätte. Der Erfolg war aber, dass Eisenstein von Seiner Majestät 400 Thaler jährlich auf 2 Jahre erhielt.“

Schon am 20. April 1846 schrieb Eisenstein an Stern, dass er sich an der Berliner Universität zu habilitieren gedenke, und dass der Minister Eichhorn ihn von der gesetzlichen Bestimmung dispensiert habe, wonach eine Habilitation jeweilen erst drei Jahre nach zurückgelegtem Triennium zulässig sei. Indessen dauerte es doch noch ein volles Jahr, bis seine Habilitation perfekt wurde. Kränklichkeit und seine damit wohl zusammenhängende trübe Gemütsstimmung, der er in einem späteren Briefe an Stern (Januar 1848) einen geradezu rührenden Ausdruck zu geben wusste, mögen Ursache der Verzögerung gewesen sein.

In seinem Habilitationsgesuche — ich verdanke die Mitteilungen über Eisensteins Habilitation den freundlichen Bemühungen von Herrn Prof. Knoblauch — bezeichnete er als Fächer, über welche er zu lesen gedenke: Algebra, Differenzial- und Integralrechnung, Mechanik, mathematische Physik und besonders Zahlentheorie. Die Fakultätssitzung, in welcher über Eisensteins Zulassung entschieden wurde, fand am 22. April 1847 statt. Kommissare der Fakultät waren Dirksen und Encke. In dem Gutachten des letzteren heisst es, Eisenstein habe eine grosse Anzahl von Abhandlungen namentlich über Zahlentheorie geliefert, „welchen unsere vorzüglichsten Kenner dieses Teiles der reinen Mathematik einen sehr hohen Rang beilegen.“ Sonnabend, den 15. Mai, hielt darauf Eisenstein vor der Fakultät die Vorlesung „Ueber die Fundamentaleigenschaften der ganzen rationalen Funktionen.“ Als eigentliches Habilitationsdatum (wie es in die Schrift „Die Friedrich-Wilhelms-Universität in ihrem Personalbestande von 1810 bis 1885“ aufgenommen ist) gilt das des 21. Mai 1847, an welchem Tage Eisenstein seine öffentliche Vorlesung „De fundamentis calculi differentialis“ gehalten hat.

Ueber die Vorlesungen, welche Eisenstein an der Berliner Universität während seiner nur 10 Semester umfassenden Docententhätigkeit teils angekündigt teils gehalten hat, giebt das folgende Verzeichnis Auskunft, welches Herr Skopnik aus den Universitätsakten für mich auszuziehen die Freundlichkeit hatte. Den Vorlesungstiteln sind jeweilen darauf bezügliche kurze Bemerkungen von Eisenstein hinzugefügt.

Verzeichnis
der von dem Herrn Dr. Eisenstein an der Universität Berlin gehaltenen Vorlesungen.

I. Im Winter-Semester 1847/48.

1. Differenzialrechnung (privatim). 14 Zuhörer.
2. Höhere Zahlentheorie, besonders der quadratischen, kubischen und biquadratischen Reste und Theorie der ternären quadratischen Formen (gratis).

   Bei Gratis-Kollegien wird selten von den Zuhörern angenommen und ist daher die Anzahl nicht genau anzugeben. (gez.) E.
3. Theorie der elliptischen Funktionen (privatissime). 6 Zuhörer.

II. Im Sommer-Semester 1848.

1. Integralrechnung als Quelle der transcendenten Funktionen (privatim). 3 Zuhörer.
2. Erläuterung der disquisitiones arithmeticae von Gauss mit speciellen Untersuchungen über die Kreisteilungen (privatissime).

   Nicht zu Stande gekommen, statt dessen ein publice über die einfachsten Principien der Mechanik.

III. Im Sommer-Semester 1849.

Mathematische Besprechungen über einzelne Schwierigkeiten in den Studien.
Die Integralrechnung.
Ueber alle Theile der Mathematik.

Durch Krankheit war ich am Lesen verhindert.

IV. Im Winter-Semester 1849/50.

Eine Repitition der Differenzialrechnung. 11 Zuhörer.
Integralrechnung und analytische Mechanik. 12 Zuhörer.

V. Im Sommer-Semester 1850.

Die analytische Mechanik, nebst Entwickelung der nötigen Formeln aus der Integralrechnung. 4 Zuhörer.

Ich habe elliptische Funktionen statt der Mechanik gelesen, weil letztere von einem anderen Docenten angezeigt worden war. E.

VI. Im Winter-Semester 1850/51.

Die Differenzial- und Integralrechnung. 18 Zuhörer.

VII. Im Sommer-Semester 1851.

Die schwierigeren Teile der Integralrechnung in besonderer Hinsicht auf den heutigen Standpunkt der Wissenschaft.

Wegen Krankheit nicht gelesen.

VIII. Im Sommer-Semester 1852.

Die Integral- und Variationsrechnung und als Einleitung eine kurze Uebersicht der Differenzialrechnung. 18 Zuhörer.

Gleich mit Beginn seiner akademischen Lehrthätigkeit wurde Eisenstein eine grosse Auszeichnung zu Teil: Gauss veranstaltete 1847 die bekannte Ausgabe „Mathematische Abhandlungen[1]) besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Funktionen von Dr. G. Eisenstein, Privatdocent an der Universität zu Berlin" (Berlin bei G. Reimer 1847) und fügte derselben eine besondere Vorrede hinzu, in der er auf den hohen Rang dieser Abhandlungen hinwies. Nachdem er von den Arbeiten Euler's und Lagrange's gesprochen, fährt er fort: „Die vorliegenden Aufsätze enthalten soviel treffliches und gediegenes, dass durch dieselben dem Verfasser ein ehrenvoller Platz neben seinen Vorgängern gesichert wird, an deren Arbeiten jene sich würdig anschliessen."

Die Anerkennungen, welche Gauss von Anfang an der wissenschaftlichen Thätigkeit Eisensteins zollte, waren für diesen wahre Wohlthaten. Sie bildeten fast die einzigen Lichtpunkte in seinem freudearmen Dasein. Man lese nur, wie er sich in seinem Briefe vom 20. April 1846 Stern gegenüber ausspricht: „Da Sie, mein lieber Stern, einen so liebevollen Anteil an meinem Kummer nehmen, so werden Sie gewiss eine ebenso freundliche Gesinnung bei dem Angenehmen beweisen, was mich betrifft. Es ist mir eine grosse Freude geworden. Ich weiss nicht, ob ich Ihnen mitgeteilt habe, dass Gauss mir im vorigen Frühjahr einen sehr interessanten Brief geschrieben hat. Gauss hat sich nun im vorigen Winter und jetzt wieder vor einigen Tagen, auf mathematische Mitteilungen hin, die ich ihm gemacht, zu Alexander von Humboldt schriftlich über mich ausgesprochen, in Worten, die mich vollkommen über Jacobi's Angriff zu trösten geeignet sind; A. v. Humboldt hat mir die Briefe mitgeteilt, ich würde Ihnen eine Abschrift schicken, wenn ich nicht fürchten müsste, dass Sie mich für eitel hielten, und ich dadurch in Ihrer Achtung, die mir so teuer ist, sinken könnte.

Ausser dieser wissenschaftlichen Anerkennung und Freude ist aber mein Leben sehr freudlos . . . ."

Auch Alexander von Humboldt, dessen gewichtige Vermittelung — um Dirichlet's Worte zu gebrauchen — nirgends fehlte, wo es die Ehre der

1) Dieselben waren vorher in den verschiedenen Bänden des Crelle'schen Journals erschienen. Die sämmtlichen Arbeiten Eisensteins befinden sich in Crelles Journal (Bd. 27—44), in Liouvilles Journal (Bd. 10 u. 17), in den Nouvelles Annales de Math. (Bd. VIII) und in den Berichten der Berliner Akademie (1850—52).

Wissenschaft und das Wohl ihrer Vertreter galt, liess es, wie schon früher hervorgehoben, an Aufmunterung und sichtbaren Beweisen seiner Hochachtung nicht fehlen. Seinen Bemühungen vorzugsweise hatte Eisenstein den Eintritt in die Akademie zu verdanken.

„Am 22. August 1850 forderte der Minister unter Beifügung eines Schreibens von Alexander von Humboldt, Jacobi und Lejeune-Dirichlet, worin diese die definitive Anstellung Eisensteins in Antrag brachten, die Fakultät zur gutachtlichen Berichterstattung auf. Die Fakultät berichtete rühmend und wünschte schliesslich, ihn der Universitätslaufbahn erhalten zu sehen und dass derselbe durch anerkennende Teilnahme auch über seine weitere Zukunft beruhigt werde.“[1])

Indessen war zu jener Zeit nirgends eine mathematische Professur frei und auch keine Aussicht vorhanden, dass für Eisenstein ein besonderer Lehrstuhl errichtet würde. So musste sich dieser abermals gedulden. Erst im Anfange des Jahres 1852 gelang es, einen Ausweg dadurch zu finden, dass Eisenstein als ordentliches Mitglied in die Berliner Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde. Die Aufnahme erfolgte am 24. April; seine Antrittsrede hielt er am 1. Juli. Damit schied er zwar formell aus dem Verbande der Universität, aber mit der bestimmten Absicht, entsprechend den Rechten der Akademiemitglieder, seine Lehrthätigkeit unverändert fortzusetzen.

Leider sollte er sich nur wenige Monate der so sehnlichst von ihm erhofften gesicherten Stellung erfreuen. Seine Gesundheit war vollständig zerrüttet. Von Hause aus kränklich, hatte er von Jahr zu Jahr seinen Zustand sich verschlimmern sehen. Die Klage um denselben zieht als wehmütiger Grundton durch alle seine Berichte, durch seine Lebensbeschreibung wie später durch seine Briefe. Dazu kam noch für ihn, den „die fortwährende Sehnsucht nach Liebe und Zuneigung der Menschen und nach gemütlichen Verhältnissen“ folterte, das drückende Gefühl, allein und verlassen in der Welt dazustehen.

Schon zu wiederholten Malen war er genötigt gewesen, seine Thätigkeit an der Universität zu unterbrechen. Im Jahre 1851 hatte er noch durch einen längeren Aufenthalt in einer Wasserheilanstalt Genesung gesucht. Es war vergebens, der Kräfteverfall liess sich nicht mehr aufhalten. Am 11. Oktober 1852 wurde Eisenstein, in einem Alter von nur 29 Jahren, von seinen Leiden durch den Tod erlöst.

---

1) Aus den Akten der Berliner Universität.

BRIEFE VON G. EISENSTEIN AN M. A. STERN.

HERAUSGEGEBEN

VON

A. HURWITZ UND **F. RUDIO.**

In dem Nachlasse des am 30. Januar 1894 in Zürich gestorbenen Prof. Dr. M. A. Stern fand sich ein kleines Packet mit der Aufschrift: „Die einliegenden Briefe meines verstorbenen Freundes G. Eisenstein sollen nach meinem Tode sorgfältig bewahrt und wo möglich nach dem Jahre 1890 zum Drucke befördert werden". Als wir von unserem Freunde und Kollegen, Herrn Prof. Dr. Alfred Stern, mit der Herausgabe dieser an seinen Vater gerichteten Briefe betraut wurden, sind wir der Aufforderung um so lieber nachgekommen, als es sich für uns zunächst um die Erfüllung des Wunsches eines Mannes handelte, der uns beiden ein verehrungswürdiger, väterlicher Freund gewesen war. Sodann aber glaubten wir, dass die Briefe sehr wohl geeignet sein dürften, das lebhafteste Interesse der Fachgenossen zu erregen, auch wenn sie in wissenschaftlicher Hinsicht keine Ueberraschungen bieten werden. Giebt es doch unter den grossen Mathematikern unseres Jahrhunderts kaum einen, über dessen äussere Lebensverhältnisse so wenig zuverlässiges bekannt ist, wie über diejenigen Eisensteins. Auch sein Charakterbild, „von der Parteien Gunst und Hass verwirrt", ist als ein so schwankendes zu bezeichnen, dass jeder Beitrag zur Klärung willkommen sein muss.

Es war ursprünglich unsere Absicht, den Briefen einige biographische Notizen, als Einführung in die Situation, aus der jene hervorgegangen sind, vorauszuschicken. Als die zu diesem Zwecke angestellten Nachforschungen aber, neben manchem andern wissenswerten, eine umfangreiche Autobiographie zu Tage förderten, glaubten wir diese letztere besser einer besonderen Publikation zuweisen zu sollen. Indem wir uns an dieser Stelle damit begnügen, auf die in derselben enthaltenen biographischen Mitteilungen zu verweisen, lassen wir jetzt die Briefe Eisensteins an Stern in chronologischer Ordnung folgen.

I.

Mein lieber Herr Dr.[1])

Mit grossem Danke sende ich Ihnen hier die entliehenen acht Thaler; ich wurde bei meiner Ankunft gleich von so vielen Geschäften und Ver-

1) Der Brief trägt kein Datum. Aus dem Zusammenhange ergiebt sich aber, dass er 1844, etwa im Juli, geschrieben wurde.

hältnissen in Anspruch genommen, dass es mir erst jetzt möglich war, an Sie zu schreiben. Ich hoffe und wünsche, dass Sie sich recht wohl und munter befinden und dass Sie noch ein klein wenig an mich denken, so wie ich mich stets mit Dank und angenehmer Empfindung an die freundliche Aufnahme erinnern werde, die ich bei Ihnen und Ihren Bekannten gefunden habe. Haben Sie doch gefälligst die Güte, Herrn Dr. Goldschmidt sowie die Familie Meierstein und Lott herzlich von mir zu grüssen und sie meines aufrichtigen Dankes zu versichern. Ich wünschte recht bald einen oder den anderen von Ihnen hier in Berlin zu sehen. An Gauss brauche ich wohl keinen Gruss zu bestellen, denn zu dem lieben Gott kann man nur beten und bewundernd emporblicken. Wir haben jetzt Jacobi in Berlin und er wird ganz hierbleiben, was wir auch Alexander von Humboldt zu verdanken haben. Ich habe Jacobi schon mehrmals besucht, man kann herrlich mit ihm umgehen, er ist im Vertrauen der direkte Gegensatz von Gauss. Er wird in kurzer Zeit zum Jubiläum der Universität nach Königsberg reisen und dann mit seiner Familie wiederkommen. Dirichlet, der nobelste und liebenswürdigste aller Mathematici bleibt bis zum Winter in Neapel. Ich habe durch Alex. v. Humbolt's Verwendung soeben 100 Thaler zu einer neuen Reise erhalten und werde wahrscheinlich Helgoland wählen. Dies sind die neuesten Berliner Neuigkeiten.

Ich habe mit grossem Vergnügen Ihre Abhandlung über die quadratischen Reste, die preisgekrönte, gelesen; ich versuchte, das Princip, welches Sie zur Bestimmung des quadratischen Charakters der Zahlen 2 und 3 anwenden und welches sehr scharfsinnig ist, für grössere Zahlen zu benutzen, aber ich habe nichts gefunden, und es scheint, dass die Methode gerade nur für diese beiden Fälle passend ist; Gauss ist derselben Ansicht (Götting. gelehrte Anz.), er hat dieselbe schon zur Bestimmung des biquadratischen Charakters der Zahl 2 angewandt.

Die Summe $\sum \frac{1}{\sin a_1 \omega}$, welche Sie dort für $p = 8m + 7$ bestimmen, habe ich auch für $p = 8m + 3$ gefunden; überhaupt kann nicht leicht irgend eine Summe von einer ähnlichen Form meinen Principien entgehen; ich bitte es zu versuchen; schicken Sie mir Summen, ich schreibe Ihnen die Antworten. Bei dieser Gelegenheit bin ich unter anderen auf einen merkwürdigen Satz geführt worden. Wenn $p = 4n + 3$, so hat man bekanntlich $\Sigma a < \Sigma b$, aber man hat auch $\sum \operatorname{cotg} \frac{a\pi}{p} > \sum \operatorname{cotg} \frac{b\pi}{p}$, wenn a die Reste, b die Nichtreste $(mod p)$ vorstellen; von der grossen Schwierigkeit, dergleichen einfache Sätze zu beweisen, erhält man erst eine richtige Ansicht, wenn man sich lange Zeit damit beschäftigt.

Vielleicht sind Ihnen einige andere mathematische Mitteilungen nicht ganz unangenehm. Mein erster Beweis des biquadratischen Mysteriums ist nunmehr im Crelle'schen Journal abgedruckt, der zweite wird wahrscheinlich in einer grösseren Abhandlung unter dem Titel „die drei Reciprocitätssätze der höheren Arithmetik" bei Veit erscheinen. Die Reste der 8ten, 12ten und auch 5ten Potenzen, welche fertig sind, arbeite ich jetzt aus.

Dies ist ein Feld, auf dem ich mich ganz frei bewegen kann, denn hier hat selbst Jacobi nichts, wie er mir gesteht. Auch hier erreiche ich wieder alles durch das einzige kostbare Princip, die Ausdrücke dergestalt analytisch umzuformen, dass sich die Division in der That allgemein ausführen lässt. Sie glauben garnicht, wie pikant diese Untersuchungen sind. Bei den Resten der höheren, z. B. der 7ten, 11ten u. s. w. Potenzen, leistet das Princip ebenfalls alles, was es leisten kann, aber die Schwierigkeit hängt hier von den ersten Elementen der complexen Zahlen ab, über welche man noch garnichts weiss. Prof. Kummer hat zum Glück seine schöne Theorie der complexen Zahlen noch bei Zeiten durch Encke von der Akademie zurücknehmen lassen; denn sie enthielt zuviel Revolutionsstoff, ich wäre z. B. rasend geworden; man kann durch dieselbe beweisen, dass zu jeder Determinante nur *eine* quadratische Form gehört und dergl. Unsinn mehr. Kummer hofft die Theorie leicht zu ergänzen; es erhebt sich ein leiser Zweifel in meinem Gemüte.[1]) Auch Jacobi ist ganz meiner Ansicht, dass die Theorie der allgemeinen complexen Zahlen erst durch eine vollständige Theorie der *höheren Formen* ihre Vollendung erhalten kann. Die complexen Zahlen aus 8ten und 12ten Wurzeln der Einheit lassen sich jedoch durch ein eigentümliches Princip behandeln, welches später seine Anwendbarkeit verliert; bei den höheren complexen Zahlen gibt es auch eigentlich gar keine complexen *Primzahlen* mehr. Gibt man den Satz zu, dass das Produkt zweier complexer Zahlen nicht anders durch eine Primzahl teilbar sein kann, als wenn wenigstens ein Faktor durch die Primzahl teilbar ist, was ganz evident erscheint, so hat man die ganze Theorie auf einen Schlag; aber dieser Satz ist *total falsch*, und man muss also ganz neue Principien anwenden.

Ich habe nicht eher geruht, als bis ich meinen geometrischen Beweis des Reciprocitätsgesetzes, der Ihnen so viel Spass gemacht hat, und der auch, beiläufig gesagt, Jacobi ausserordentlich gefällt, von dem Lemma befreit habe, von dem er noch abhängig war, und er ist jetzt so einfach,

---

1) Die Zukunft hat bekanntlich Eisenstein nicht Recht gegeben.

dass er sich in ein paar Zeilen mittheilen lässt. Der Hauptunterschied zwischen meinem Gange und dem Gaussischen besteht darin, dass ich nicht wie Gauss die Zahlen $< p$, in solche $< \frac{p}{2}$ und in solche $> \frac{p}{2}$ theile, sondern in gerade und ungerade. Es sei A, B resp. der Complex der geraden, ungeraden Zahlen $< p$; k sei eine nicht durch p theilbare ungerade Zahl; die Reste der Vielfachen kA, welche in A fallen, seien α, diejenigen in B seien β, dann werden offenbar alle α zusammen mit allen Zahlen der Form $p + (-1)^{\beta}\beta$ alle A erschöpfen, und man wird die beiden Congruenzen haben $k^{\frac{p-1}{2}} \Pi A \equiv \Pi\alpha\, \Pi\beta$, und $\Pi A \equiv \Pi\alpha\, (-1)^{\Sigma\beta}\, \Pi\beta \pmod p$, woraus folgt $k^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\Sigma\beta}$; aber offenbar ist $\Sigma kA = p\Sigma E\left(\frac{kA}{p}\right) + \Sigma\alpha + \Sigma\beta$, und da alle A so wie alle α gerade, und $p \equiv 1 \pmod 2$ ist, so folgt hieraus $\Sigma\beta \equiv \Sigma E\left(\frac{kA}{p}\right) \pmod 2$; und durch eine leichte Transformation, oder schon durch geometrische Betrachtung, erhält man, weil $k - 1$ gerade ist, $\Sigma E\left(\frac{kA}{p}\right) \equiv - E\left(\frac{k}{p}\right) + E\left(\frac{2k}{p}\right) - E\left(\frac{3k}{p}\right) + \cdots$

$$\pm E\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right) \equiv E\left(\frac{k}{p}\right) + E\left(\frac{2k}{p}\right) + \cdots + E\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right) \pmod 2.$$

Wird letztere Summe durch S bezeichnet, so hat man also auch $k^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^S \pmod p$, d. h. $\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^S$.

Ebenso findet man, wenn k auch eine Primzahl ist, $\left(\frac{p}{k}\right) = (-1)^T$, wenn $T = E\left(\frac{p}{k}\right) + E\left(\frac{2p}{k}\right) + \cdots + E\left(\frac{\frac{k-1}{2}p}{k}\right)$ ist.

Nun ist S die Anzahl der Gitterpunkte in einem Rechteck mit den Dimensionen $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{k-1}{2}$, welche zwischen der Geraden, deren Gleichung $y = \frac{k}{p}x$ ist, und der Achse der x liegen, T die Anzahl der Gitterpunkte, welche in jenem Rechteck zwischen derselben Geraden $x = \frac{p}{k}y$ und der Achse der y liegen, also ist $S + T$ die Gesammtzahl der Gitterpunkte jenes Rechtecks, nämlich $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{k-1}{2}$, also kommt $\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{p}{k}\right) = (-1)^{S+T} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{k-1}{2}}$, quod erat demonstr.

Wie glücklich würde sich der gute Euler geschätzt haben, diese paar Zeilen vor etwa 70 Jahren zu besitzen.

Leben Sie herzlich wohl, mein lieber Herr Dr. und grüssen Sie alle unsere Freunde in Göttingen.

Ihr aufrichtiger Freund

gehorsamst

Berlin. Gotth. Eisenstein.

Baldige Antwort und Mittheilungen von Ihrer Seite werden mir sehr schätzenswerth sein.

II.

Dass ich, mein liebster Stern, der unhöflichste Mensch bin, darf ich nicht erst mathematisch beweisen, da ich so lange mit der Antwort auf Ihren freundlichen Brief gezögert habe; ich will mich auch garnicht erst entschuldigen, denn da das Verbrechen so gross ist, so müsste ich Bogen mit Entschuldigungen und exquisiten Ausflüchten anfüllen; und übrigens giebt es gar keine Entschuldigung, sondern nur meine unschuldsvolle Faulheit ist zu beschuldigen, dass ich den schuldigen Bescheid auf Ihren Erstling schuldig geblieben bin. — Um Ihr Schreiben von hinten an zu beantworten:

Ihre drei Bitten:
Das Datum in der Mitten,
Den Doktorhut ohne Tresse
Und meine Adresse

werde pünktlich nach Vorschrift beobachten. Herrn Wittstein habe im vorigen Jahre gesprochen und einen Gruss von Ihnen bestellt; da ich mich indessen höchst kurze Zeit in Hannover aufhielt, so konnte ich von seinem Diensteifer nur wenig Gebrauch machen; er war auch sehr beschäftigt, wie es mir vorkam. Ich fuhr damals nicht sogleich nach Berlin, wie Sie ohne Beweis behaupten, sondern blieb noch acht Tage in Alexisbad, wo es mir sehr gut gefallen hat, so dass ich in diesem Jahre wieder mit meiner Mutter, die Sie grüsst, dagewesen bin. Später machte ich noch eine Badereise auf vier Wochen nach Swinemünde, während welcher Zeit Ihr Brief durch Herrn Meyerstein's Güte bei mir anlangte. Nach meiner Zurückkunft beschäftigte ich mich teils mit dem Lesen Ihres Briefes und dem stets unausgeführten Vorhaben, ihn zu beantworten, teils mit der Herausgabe einer Arbeit über die cubischen Formen mit drei Variabeln, die nicht mehr und nicht weniger als 15 Druckbogen lang, also sehr lang geworden ist. — Für Ihr Anerbieten wegen der Frankfurter Buchhandlung bin ich Ihnen sehr dankbar und werde wohl einmal davon Gebrauch machen können. — Bei

Ihrem Beweise von $\sum \text{cotg}\frac{a\pi}{p} > \sum \text{cotg}\frac{b\pi}{p}$ stützen Sie sich auf $\Sigma b > \Sigma a$; dies ist zwar ganz brav, aber so war die Sache nicht gemeint, sondern ich sprach von einem direkten Beweis, denn $\Sigma b > \Sigma a$ ist bis jetzt, wenigstens so viel ich weiss, nur durch unendliche Reihen und Produkte (von Dirichlet) bewiesen worden, meinen Beweis habe ich noch nicht publizieren wollen, da er auf einem principium latissime patens beruht, von dem ich erst noch fernere Anwendungen zu machen denke. — Es würde mich ausserordentlich freuen, wenn Sie wieder einigermassen, durch Musse und Muse begünstigt, auf die Zahlentheorie kämen.

Nun mein lieber Stern komme ich zur Hauptsache, um derenwillen besonders ich die Feder in die Hand genommen habe, nämlich um Ihnen von Herzen Glück zu wünschen. Vor wenigen Tagen erfuhr ich, gerade als ich Dr. Joachimsthal's Probevorlesung beiwohnte, durch den jungen Friedländer zu meiner grössten Freude Ihre Verlobung, oder, was dasselbe besagt, dass Sie Sich auf Hymens Kettenlinie vorbereiten, deren Gleichung mir unbekannt ist, obwohl ich weiss, dass sie mit einem Maximum der Freude anfängt und zuweilen einige Spitzen hat. — So offeriere ich Ihnen denn, mein liebster Stern, meine Gratulation in optima forma, doch behalte ich mir ein ausführlicheres Wünschen und eine feierliche Segenserteilung bis zu Ihrer Hochzeit vor, zu der ich mich hiermit einlade.

In Betreff Berliner Neuigkeiten, so wissen Sie, dass Prof. Jabobi (der Grosse) für immer hier angestellt, und dass Prof. Dirichlet (der Liebenswürdige) nebst einem neuen weiblichen Sprössling, einer Florentinerin, ebenfalls aus Italien zurück ist. Aber wir haben auch Prof. Kummer hier als Gast auf einige Zeit; er hat mich zum Doktor hon. c. gemacht, wie Sie vielleicht erfahren haben werden; wenn nicht, so teile ich es Ihnen hier mit, was schon lange meine Pflicht gewesen wäre (Unterlassungssünde). Noch habe ich ihn nicht ordentlich geniessen können, da er gleich nach der Insel Rügen abgereist ist, hoffe dies aber nach seiner Rückkehr hierher nachzuholen. Mein Freund Dr. Joachimsthal habilitiert sich nächsten Winter hier; mein Freund Kronecker, dessen ich mich gegenwärtig, wie im vorigen Jahre des Heine, als meines wöchentlichen und täglichen Hausfreundes bediene, arbeitet an seiner Promotion und ist jetzt nach Rügen gereist mit Kummer, da ihn diese Reise in seinem Fleisse aufhält, später geht er nach seinem Gute in Schlesien, um dort zu verbauern; mein Freund Dr. Heine, der auch in Göttingen studiert hat, ist schon seit vorigem Winter Privatdocent in Bonn, und unser beider Freund Eisenstein existiert auch. Ich will Ihnen hier nur unser Berliner mathematisches Publicum aufführen und Parade machen lassen; diese und der reiche Dr. Borchardt, dessen un-

menschliches Geld ihn aufserhalb des Bereiches aller menschlichen Berechnungen setzt, sind es; denn neuen Zuwachs und jungen Nachwuchs haben wir hier nicht bekommen.

So lustig ich Ihnen auch aus diesem Schreiben erscheinen mag, mein lieber Stern, so bin ich doch in Bezug auf meine Gesundheit sehr leidend. Ich bemerke dies nur, weil Sie sich wundern werden, dass so lange keine Abhandlung von mir erscheint, da doch sonst jedes Crelle'sche Heft eines meiner Kinder enthält. Vorrat habe ich hinlänglich und sehr weit aussehende Ideen, aber ich bin so abhängig von meinem Körper, dass ich nichts thun kann; sobald ich ein wenig arbeite, leide ich an Schwindel, unruhigem Schlaf und allerlei nervösen Zufällen. Im vorigen Winter war ich sehr krank, vier Wochen bettlägerig, und nun habe ich mich noch immer nicht erholen können, trotz Brunnenkur und Pillen — so steht es mit mir; doch was hilft das Klagen: hoffe und wünsche nur, dass Sie so munter wie ein Fisch sind, was ja bei einem Bräutigam nicht fehlen darf.

Zum Desert will ich Ihnen doch noch einige Formeln auftischen. — Zwei Hauptgegenstände sind es, mit denen ich mich namentlich in dieser Zeit beschäftigt, und die ich wenigstens zum Teil zu einem gewünschten Ausgang geführt habe, (doch ist Alles Stümperei, ehe ich nicht gesund bin); die Formen zweiten Grades mit beliebig vielen Variabeln, und die Lemniscatenfunktionen, welche in Bezug auf die complexen Zahlen genau dieselbe Rolle spielen, als die Sinus für die reelle Theorie. Diese Lemniscf. müssen jetzt, wenigstens für einen Arithmeticus, fast als das Wichtigste in der ganzen Mathematik gelten, denn sie enthalten gewissermassen im Keime und implicite die Haupteigenschaften der complexen Zahlen. Wie ich durch sie auf die einfachste Art von der Welt das mysterium maxime reconditum bewiesen habe, werden Sie aus Crelles Journal (29. Band) ersehen haben; diese Beweise haben den Vorzug, dass man fast Wort für Wort die Analogie bei quadr. cub. und biq. Resten verfolgen kann, und dass sie vollkommen symmetrisch in Bezug auf die beiden zu vergleichenden Primzahlen sind; in der That drücken sie den Charakter (qu. cub. biq.) durch eine analytische Formel aus, der man die Symmetrie also die Reciprocität unmittelbar ansieht. Indem ich denke, dass Sie vielleicht meine kleine Abhandlung (nur einen Bogen) hierüber durchgesehen haben, will ich hier einige Sätze über die Lemniscf. anführen, die mir wichtig erscheinen und die sich dort nicht finden. Sie wissen, dass für jede ungerade ganze complexe Zahl $a + bi = m$ die Differenzialgleichung

(1.) $\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, in welcher y mit x zugleich verschwinden soll, durch eine **gebrochene** rationale Function y von x integrirt wird,

ebenso wie analog das Integral von $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ für ein ganzes **reelles** und ungerades m eine ganze rationale Function von x ist, nämlich, wie bekannt

$$y = mx - \frac{m(m^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\,2^{m-1}x^m.$$

Hier nun ist es leicht, die Koeffizienten durch Einsetzen in die Differenzialgleichung zu bestimmen. Ganz anders verhält sich die Sache, wenn y eine gebrochene Funktion von x ist, wie in (1.); es ist dann gänzlich unmöglich, nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten aus der Differenzialgleichung auch nur einen einzigen Koeffizienten des Zählers oder Nenners zu finden, nicht etwa wegen der Weitläufigkeit der Rechnung, die man doch überwinden könnte, sondern weil die Sache in sich unmöglich ist, wovon Sie Sich leicht durch einen Versuch überzeugen können. Natürlich meine ich die allgemeine Bestimmung der Koeffizienten für ein unbestimmtes m, denn dass man für specielle gegebene Werte von m die Koeffizienten des Zählers und Nenners aus der Diff. Gl. numerisch berechnen kann, versteht sich von selbst, aber man erkennt daraus nicht den Zusammenhang dieser numerischen Werte mit dem jedesmaligen m. Dies hat auch nichts Frappantes mehr (so wunderbar es anfangs erscheint), sobald man die Form der Koeffizienten erst kennt; denn sie sind gar nicht, wie ich anfänglich glaubte, Funktionen von m allein, sondern auch von der Norm von m, $a^2 + b^2 = N(m)$, die ich mit p bezeichnen will, und wie sollte wohl diese Norm vermittelst der Differenzialgleichung irgend eingehen können! Man muss also ganz neue Methoden anwenden und ich bin durch solche endlich zu dem gewünschten Ziele gelangt. — Wenn m primär d. h. $\equiv 1 \pmod{2+2i}$ ist, was ohne Schaden der Allgemeinheit angenommen werden darf, so finde ich unter anderm, um Ihnen ein kleines aperçu zu geben:

1) y hat die Form: $y = x\cdot\frac{A_0 + A_1x^4 + A_2x^8 + \cdots + A_{\frac{p-5}{4}}x^{p-5} + x^{p-1}}{1 + B_1x^4 + B_2x^8 + \cdots + B_{\frac{p-5}{4}}x^{p-5} + B_{\frac{p-1}{4}}x^{p-1}}$,

wo alle Koeffizienten A und B ganze complexe Zahlen sind, und es ist hierbei $A_0 = B_{\frac{p-1}{4}}$, $A_1 = B_{\frac{p-5}{4}}$, etc., $A_{\frac{p-5}{4}} = B_1$, so dass im Zähler genau dieselben Koeffizienten vorkommen, wie im Nenner, nur in umgekehrter Reihenfolge.

2) Setzt man brevitatis causa $m^4 = q$, so sind B_μ und $\frac{A_\mu}{m}$ ganze Funktionen von den beiden Variabeln p und q von der μ^{ten} Ordnung,

und zwar enthalten sie alle Potenzen und Produkte, in denen die Summe der Exponenten von p und q zusammen $\leqq \mu$ ist; die numerischen Multiplikatoren dieser Potenzen und Produkte, die nun nicht mehr von m noch von p abhängen, sind reelle Zahlen, was sich keineswegs von selbst versteht, da sie a priori betrachtet, ebenso gut complex (imaginär) sein könnten. So ist z. B. $A_0 = m$, $A_1 = m \cdot \frac{-5p - q + 6}{60}$,

$$A_2 = m \cdot \frac{35p^2 + 14pq - q^2 - 384p - 84q + 420}{56 \cdot 180}, \text{ etc.} \ldots$$

$$B_1 = \frac{-p+q}{12}, \quad B_2 = \frac{35p^2 - 70pq - q^2 - 300p + 336q}{56 \cdot 180}, \text{ etc.} \ldots$$

In B_μ kommt kein konstantes Glied vor; die höchsten Potenzen von p in B_μ und $\frac{1}{m} A_\mu$ haben denselben numerischen Multiplikator. q bezeichnet, wie gesagt $(a + bi)^4$ und p die Norm $a^2 + b^2$.

3) Bildet man nach dem bekannten Newton'schen Theorem aus den Koeffizienten, etwa denen B des Nenners, die Potenzsummen der Wurzeln, etwa indem man setzt

$$S_1 + B_1 = 0, \; S_2 + B_1 S_1 + 2B_2 = 0, \; S_3 + B_1 S_2 + B_2 S_1 + 3B_3 = 0, \text{ etc.},$$

so enthalten alle S das p nur linear, d. h. in der **ersten** Potenz allein. Dies ist ein Fundamentalsatz für die Koeffizienten. Bringt man ihn mit einem anderen, ziemlich merkwürdigen Princip in Verbindung, welches, Sie mögen es mir glauben oder nicht, davon abhängt, dass die Zahl π grösser als 2 ist, so kann man allein hieraus so viele Koeffizienten berechnen, als man will, wovon ich oben eine kleine Probe gegeben habe.

4) Die Koeffizienten brechen von selbst ab (natürlich für ein ganzes complexes m), sobald der Index μ die Zahl $\frac{p-1}{4}$ überschreitet, in ähnlicher Weise, wie dies bei den Binomialkoeffizienten und bei denen der Fall ist, welche in der Entwickelung von Sinus der vielfachen (ungeraden) Bogen nach Potenzen von Sinus der einfachen Bogen vorkommen.

5) Wenn m eine zweigliedrige complexe Primzahl, also p eine reelle Primzahl $4k + 1$ ist, so sind alle Koeffizienten $\equiv 0 \pmod{m}$. Dieser Satz, welcher dem für die Polynomialkoeffizienten im Reellen analog, ist besonders wichtig für die Anwendung auf Reciprocitätssätze und auf die Teilung der Lemniscate. Das biquadr. Fundamentaltheorem lässt sich unmittelbar daraus ableiten und ich habe diese specielle Anwendung Gauss mitgeteilt, der sie zu meiner grossen Freude benigne aufgenommen hat. — Von einer Menge Beispielen, die ich mit grosser Mühe berechnet habe, will ich Ihnen ein recht eklatantes aufschreiben. Für $m = 3 + 2i$, $p = 13$ hat man

$$y = \frac{(3+2i)x + (7-4i)x^5 + (-11+10i)x^9 + x^{13}}{1 + (-11+10i)x^4 + (7-4i)x^8 + (3+2i)x^{12}}$$

und es ist

$$7 - 4i = (3+2i)(1-2i) \quad -11 + 10i = (3+2i)(-1+4i)$$

so dass also, wenn man mit dem Nenner nach links multipliziert, in gewissem Sinne $y \equiv x^p$ (mod. m) ist.

Die Hauptsache ist noch zu thun, nämlich das allgemeine Gesetz der Multiplikatoren des μ^{ten} Koeffizienten zu finden, nachdem der Bau desselben in Bezug auf m erkannt ist. Man wird ihm zu dem Ende eine ganz neue Form geben müssen, denn nach Potenzen und Produkten von p und q geordnet wird er kein einfaches Gesetz befolgen, ebenso wenig als die Binomialkoeffizienten $\frac{m(m-1)\cdots(m-t+1)}{1\cdot 2\cdots\cdot t}$ wenn man sie nach Potenzen von m entwickeln wollte, während sie doch in Form von Produkten so höchst simpel erscheinen. — Die Beweise der vorstehenden Sätze eignen sich nicht gut zu brieflicher Mitteilung.[1])

Zuerst hatte ich die Absicht, Ihnen noch über quadratische Formen mit mehreren Variabeln, namentlich über die Anzahl der nicht aequivalenten ternären Formen einiges mitzuteilen, aber da dieser Stoff unerschöpflich ist und dieser Brief doch schon für die Zeit eines Bräutigams zu lang geworden ist, so verschiebe ich dies auf das nächste Mal, da ich nun einen regelmässigen Briefwechsel zwischen uns hoffe, und schliesse den mathematischen Salm mit einem arithmetischen Theorem, dessen Beweis Sie suchen mögen: „Wenn p eine beliebige reelle Primzahl ist, und man nimmt in der Summe

$$\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \cdots \pm (p-2) \qquad (\Omega)$$

alle möglichen Zeichenkombinationen, doch so, dass die Anzahl der negativen Zeichen jedesmal gerade ist, so geben die Reste (mod p) der so aus (Ω) hervorgehenden Zahlen erstlich gewissemale die Null, und ausserdem die Quadratreste einmal öfter als die Nichtquadratreste. Nimmt man aber die Anzahl der negativen Zeichen ungerade, so kommen umgekehrt die Nichtquadratreste einmal öfter vor als die Quadratreste; so dass man also durch dieses Verfahren auf lineare Weise die q-Reste und Nichtreste bestimmen kann, wenn man von allen (Ω) so viel als möglich vollständige Restensysteme (mod. p) fortlässt. Z. B. für $p = 7$ erhält man $1 + 3 + 5 \equiv 2$, $-1 - 3 + 5 \equiv 1$, $-1 + 3 - 5 \equiv 4$, $1 - 3 - 5 \equiv 0$ (mod. 7), und

1) Diese Sätze und ihre Beweise hat Eisenstein in dem ersten Teil seiner „Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen" veröffentlicht. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 30, 1846; oder „Mathematische Abhandlungen von Dr. G. Eisenstein", Berlin 1847.)

in der That sind 1, 2, 4 die q-Reste; dagegen $-1+3+5\equiv 0$, $1-3+5\equiv 3$, $1+3-5\equiv 6$, $-1-3-5\equiv 5$, und 3, 5, 6 sind die q-Nichtreste."[1])

Nun zu guter Letzt, mein lieber Stern, will ich mich wieder wie ein vernünftiger Mensch betragen. Antworten Sie mir bald, natürlich ohne dabei etwas Nötigeres zu versäumen, schreiben Sie mir alle Neuigkeiten, die Sie wissen und nicht wissen, was es in Göttingen Interessantes giebt, besonders über Ihre Braut, wegen derer ich mich im Stande der Unschuld, d. h. gänzlicher Unwissenheit befinde. Schliesslich wiederhole ich meinen herzlichen Glückwunsch. Grüssen Sie mir vielmals Dr. Goldschmidt und die Familie Meyerstein. — Uebrigens werden Sie schon wissen, was mich interessieren kann, denn obwohl ich seit einem Jahre nichts von dorther erfahre, so habe ich doch nicht aufgehört, für Göttingen und seine Bewohner einen lebhaften Anteil zu nehmen. — Kann ich Ihnen hier in irgend etwas dienen, so finden Sie zu Allem bereit

Ihren ergebensten Freund

Gotthold Eisenstein.

Adresse: Dr. Eisenstein Jerusalemerstr. Nr. 63 parterre.

Berlin, 20. August 1845.

N. Friedländer war so eilig, dass er mir nur Ihre Karte in die Hand steckte, ich weiss also nicht einmal, ob Sie gegenwärtig in Göttingen sind; deshalb mache ich die Adresse sehr ausführlich.

III.

Berlin, 20. April 1846.

Mein lieber Stern!

Es wäre meine Pflicht gewesen auf Ihren herzlichen und liebevollen Brief, der mir die gröſste Freude bereitet hat, sogleich zu antworten. Aber teils ist meine Faulheit an der Verzögerung schuld, teils hatte ich gar keine rechte Lust auf die fatale Geschichte mit Jacobi wieder zurückzukommen. — Das ganze Rätsel ist, dass es Jacobi verdrieſst, dass ich nicht sogleich, nachdem ich von seinen Arbeiten über Kreisteilung erfahren hatte, öffentlich seine Priorität anerkannt habe, während ich doch Gauss so oft anführe. Dass ich nun dies unterlassen habe, daran ist bloſs meine

---

1) In seiner Abhandlung „Über eine der Teilung der Zahlen ähnliche Untersuchung und deren Anwendung auf die Theorie der quadratischen Reste" (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 61 (1863)) hat Stern diesen Satz, sowie eine Reihe ähnlicher Sätze bewiesen.

unschuldige Einfalt Schuld, da ich mich um dergleichen Äufserlichkeiten nicht kümmerte, sondern nur an die Wissenschaft selbst dachte; durch Gauss habe ich nun einmal meine mathematische Bildung erlangt, seine Leistungen sind mir geläufig, und desshalb führe ich ihn an; die Arbeiten von Jacobi sind mir erst zugänglich geworden, seit ich ihn persönlich kenne, d. h. seit er hier in Berlin ist. Muss man denn wirklich alles durchkramen, ehe man drucken lässt, ich glaubte, dass wenn man sich mit dem Crelle'schen Journal au fait erhält, man genug thut.

Inzwischen kann Jacobi selbst unmöglich daran glauben, dass ich ihm seine Sachen gestohlen habe, denn er hat eben auf diese meine früheren Arbeiten hin vor $^5/_4$ Jahren den Antrag zu meiner Doktor-Ernennung bei der Breslauer Fakultät gestellt. Uebrigens gebührt in den Beweisen der Reciprocitätssätze weder mir, noch Jacobi die Priorität, sondern Gauss; aber gedruckt sind die Beweise zuerst von mir erschienen; am Ende hat doch Jacobi auch nur gesagt, dass er die Beweise gefunden habe, Gauss hat dasselbe aber schon viel früher gesagt, Theoria residuorum biquadr. und schon an einem viel früheren Orte: demonstrationes et ampliationes novae etc., also: — hic aqua haeret.

Schon einige Zeit, ehe ich Ihren Brief erhielt, hatte ich ein Manuskript fertig, worin ich Jacobi in höchst gemäfsigter Weise antworte und die Untersuchungen vereint zusammenstelle, welche ich in früherer Zeit über Kreisteilung angestellt hatte; denn was ich damals herausgab, war kaum die Hälfte dessen, was ich herauszugeben beabsichtigte, bis mir Jacobi in die Quere kam. Ich habe es aber aufgegeben, dieses Manuskript wenigstens für jetzt drucken zu lassen, denn einmal ist Jacobi aufserdem ganz freundlich gegen mich, bis auf die allerletzte Zeit, wo ich ihn selten besuche, was aber an mir und nicht an ihm liegt, und dann darf ich ihn mir auch jetzt nicht erzürnen, weil ich meine Habilitation hier beabsichtige, wobei er mir einerseits nutzen andererseits aber auch sehr schaden kann.

Ich spreche eben von meiner Habilitation. Sie wissen, lieber Stern, dass nach den Statuten der Fakultät man drei Jahre Doktor sein muss oder vielmehr man drei Jahre schon das Triennium absolviert haben muss, ehe man sich habilitieren darf. Der Minister Eichhorn, der sehr freundlich für mich gesinnt ist, hat mich von diesem Formzwange dispensiert und es werden mir so drei Jahre erspart, denn ich hätte eigentlich erst zum Oktober dieses Jahres mein Triennium absolviert, müsste also eigentlich noch bis Oktober 1849 warten; es hindert mich jetzt weiter nichts an der Habilitation, als meine Militärpflicht.

Da Sie, mein lieber Stern, einen so liebevollen Anteil an meinem Kummer nehmen, so werden Sie gewiss eine eben so freundliche Gesinnung

bei dem Angenehmen beweisen, was mich betrifft. Es ist mir eine große Freude geworden. Ich weiß nicht, ob ich Ihnen mitgeteilt habe, dass Gauss mir im vorigen Frühjahr einen sehr interessanten Brief geschrieben hat. Gauss hat sich nun im vorigen Winter und jetzt wieder vor einigen Tagen, auf mathematische Mitteilungen hin, die ich ihm gemacht, zu Al. v. Humboldt schriftlich über mich ausgesprochen, in Worten, die mich vollkommen über Jacobi's Angriff zu trösten geeignet sind; A. v. Humboldt hat mir die Briefe mitgeteilt; ich würde Ihnen eine Abschrift schicken, wenn ich nicht fürchten müsste, dass Sie mich für eitel hielten und ich dadurch in Ihrer Achtung, die mir so teuer ist, sinken könnte.

Außer dieser wissenschaftlichen Anerkennung und Freude ist aber mein Leben sehr freudlos. Die Mathematik allein kann nicht glücklich machen und sie ist so schwierig, dass man nur selten die Genugthuung hat, einen Schritt vorwärts zu kommen. Es fehlt mir hier an aller Geselligkeit, mit meinen Verwandten bin ich ganz zerfallen, denn dies sind Geldleute, die mich nicht verstehen und die ich nicht verstehe, die Fachgelehrten sind wieder zu hoch erhaben und zu stolz, als dass es zu einer rechten Innigkeit kommen könnte. Mit Heine und Kronecker ging ich früher viel um und diese passten zu mir, aber der erste ist jetzt Privatdocent in Bonn, der zweite Gutsbesitzer bei Liegnitz, Joachimsthal ist ganz Schulmeister geworden und ich finde bei ihm daher auch keinen Anklang. In dieser meiner melancholischen Isolierung fühle ich eine tiefe Sympathie für die zarte Verbindung, die Sie eingegangen sind; möchten Sie, von einem Sie liebenden Wesen stets umgeben, Ihre Tage glücklicher zubringen, als ich es thue. Leben Sie herzlich wohl.

Mit freundschaftlichster Hochschätzung

Ihr

Eisenstein.

Bitte, schreiben Sie mir genau Ihre Adresse. Die meinige ist Jerusalemerstraße 63.

Was meinen Sie mit Gött. Gel. Anz. 1815, Stück 104?

IV.

Anfang eines Briefes vom Sommer 1847.

Mein lieber Stern!

Seien Sie nicht böse auf mich, dass ich so lange nichts habe von mir hören lassen; ich habe nichts desto weniger stets an Sie und Ihre freundliche Gesinnung für mich mit Dankbarkeit und Liebe gedacht. Aber einen unmathematischen Brief wollte ich Ihnen nicht schreiben, und es bot sich

nichts dar, was für die Kürze einer brieflichen Mitteilung passend gewesen wäre und was ich Ihnen ohne lange Auseinandersetzungen klar machen könnte; auch sind die schlechten Federn schuld; halten Sie dies Argument nicht für unbedeutend, denn so wie mich eine wohlschmeckende Cigarre zu einer mathematischen Idee begeistert, so eine gutbeflügelte Feder zu einem inhaltreichen Briefe. Ausserdem habe ich diese Zeit über so viele Allotria getrieben und so wenig mathematisch gearbeitet, dass ich mich vor Ihnen schämen musste, ja Sie sogar als Kritiker fürchten musste. Ich hoffe aber, dass dieser Brief Sie, lieber Stern, durch einige mathematische Stellen versöhnen wird und dass ich durch ein paar in Crelle's Journal erscheinende schon unter der Presse schwitzende Abhandlungen, wenn auch nicht meine Sünden vollständig abbüſsen, so doch mein Gewissen einigermassen erleichtern werde.

Herr Riemann, durch welchen ich Ihre Karte nebst den freundlichen Worten darauf erhalten habe, scheint einer der wenigen zu sein, welche sich in der Zahlentheorie recht lobenswerte Kenntnisse erworben haben. Er wird an einem Privatissimum Teil nehmen, welches ich in diesem Sommer über elliptische Funktionen lesen werde. Bitte recht sehr, suchen Sie doch meinem lieben Freunde dem Amerikaner Gould, der jetzt in Göttingen ist, ein wenig die Zeit zu vertreiben und nehmen Sie Sich, wenn Sie können, angelegentlichst seiner an; er ist ein sehr lieber junger Mann, der bei seinem Vorhaben sich in Europa astronomisch auszubilden leider durch den Mangel an Teilnahme bei unsern Gelehrten schon sehr gekränkt und enttäuscht worden ist.

Mein Verhältnis zu den hiesigen Gelehrten noch immer beim Alten; auch würde mir eine Annäherung nichts nutzen, da jene ihren Stolz und ihr aristokratisches Benehmen gegen mich nie ablegen werden. Ich stehe also ganz allein.

Was Sie anbetrifft, lieber Freund, so . . . .
. . . .

V.

Berlin, Januar 1848.

Mein lieber Stern!

Mit der Redaktion einer mathematischen Abhandlung beschäftigt, welche Ihnen sehr nahe liegt, und welche, wie ich hoffe oder mir zu schmeicheln wage bei ihrem Erscheinen Ihnen einige Freude machen wird, so wie auch von Vorlesungen an der Universität in Anspruch genommen, reisse ich mich los, um endlich an Sie, werter Freund, zu schreiben. Es ist dies nicht das erste Mal seit einer langen Zeit, dass ich die Feder zu diesem Zwecke in die Hand nehme, es liegen zwei halb angefangene Briefe noch

vom Sommer her, in welchen ich mich mit Ihnen unterhalten wollte, aber ich bin nicht fertig geworden, und ich erlaube mir, hier eine Probe von diesen Versuchen beizulegen, auch dem guten vortrefflichen Gould, den ich Ihnen in meinem Schreiben empfehlen wollte, habe ich auf seinen so liebreichen und herzlichen Brief an mich nicht geantwortet, was mich immer schmerzlich foltert; gewiss ist er jetzt nicht mehr in Göttingen und glaubt, dass ich eine kalte Gesinnung gegen ihn hege, wovon gerade das Gegenteil der Fall ist. Ehe ich aber zu dem Grunde meines langen Schweigens übergehe, will ich Ihnen den Gegenstand meiner jetzigen Abhandlung mitteilen; doch vor allen Dingen erkundige ich mich nach Ihrem Befinden und nach dem Ihrer Familie auf's Angelegentlichste, so wie nach dem Befinden aller derer in Göttingen, welche mich etwas lieben nicht blos für einen nicht ganz schlechten Mathematiker halten, was ein grofser Unterschied ist; sollte Gould noch da sein, so grüssen Sie ihn recht herzlich von mir und versichern ihn meiner dauernden Freundschaft, so wie dass sein Andenken eine wohlthuende Erinnerung für mich bleiben wird und dass ich wohl wünschte, die Verhältnisse möchten uns einmal noch im Leben zusammen führen, auch mag er nicht zu sehr zürnen, dass ich nicht geantwortet habe; aber gewiss ist er nicht mehr da, bitte dann schreiben Sie mir doch über seinen jetzigen Aufenthaltsort, wenn Sie ihn wissen.

In meiner jetzigen Abhandlung[1]), die wahrscheinlich bald zum Drucke kommen wird, da ich schon bei der Redaktion der letzten Bogen stehe, beweise ich Ihren Satz über die Bestimmung von c für die Primzahlen $q = 8n + 3 = c^2 + 2d^2$ durch eine Kongruenz (mod. q); dieser Satz bildet allerdings den Anfang zu einer ganz neuen Reihe von Sätzen dieser Art, indem bei denjenigen Sätzen dieser Gattung, welche unmittelbar die Kreisteilung ergiebt, die zu der Zerfällung gehörige Determinante, wie hier 8, ein Teiler von $q - 1$ sein muss; so kann man z. B. für die Primzahlen $q = 7n + 1$ die Zerfällung $A^2 + 7B^2$ durch die Kreisteilung bestimmen, aber nicht für die Primzahlen $7n + 2$ und $7n + 4$, welche dieselbe Zerfällung zulassen; ich erinnere mich, schon in Göttingen mit Ihnen über diesen Gegenstand gesprochen zu haben, aber nicht mehr genau. Sie sagen in Ihrer Notiz, die Theorie der Reste schiene nicht die wahre Quelle solcher Sätze zu sein; dies ist aber doch der Fall, und meine Methoden, die ich schon in früheren Abhandlungen auf andere Gegenstände angewandt habe, sind allgemein genug, um auch solche Sätze, wie z. B. der für die Primzahlen $8n + 3$ daraus ableiten zu können. Ich beweise in meiner

1) Die Abhandlung ist unter dem Titel „Zur Theorie der quadratischen Zerfällungen der Primzahlen $8n + 3$, $7n + 2$ und $7n + 4$" im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 37 erschienen.

jetzigen Abhandlung noch die beiden folgenden Sätze, welche wahrscheinlich ganz neu und noch unbekannt sind. (Ich muss jetzt fort nach der Universität, um Vorlesung zu halten.)

„Ist q eine Primzahl $7n + 2 = A^2 + 7B^2$, so hat man $2A \equiv \frac{3n(3n-1)(3n-2)\cdots(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$ (mod. q) und hieraus ergiebt sich A positiv oder negativ, je nachdem es abgesehen vom Zeichen $\equiv 3$ oder $\equiv 4$ (mod. 7) ist." Z. B. für $q = 23$ ist $n = 3$, $2A \equiv \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} \equiv 3\cdot 4\cdot 7$ $\equiv 84$ (mod. 23) $= 4\cdot 23 - 8 \equiv -8$, also $A = -4$, und in der That ist $23 = 4^2 + 7$, ferner hat sich $A = -4$ negativ ergeben, weil der absolute Wert $\equiv 4$ (mod. 7).

„Ist q eine Primzahl $7n + 4 = A^2 + 7B^2$, so hat man $2A \equiv \frac{(3n+1)\,3n\,(3n-1)\cdots(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$ (mod. q), und A wird hieraus positiv oder negativ, je nachdem sein absoluter Wert $\equiv 2$ oder $\equiv 5$ (mod. 7) ist." Beispiele geben $q = 11, 39, 53$ u. s. w.

Die Principien, auf welchen diese Sätze beruhen, können entweder aus der Theorie der elliptischen Funktionen geschöpft werden, wovon bei einer andern Gelegenheit, oder sie sind rein arithmetischer Natur. Ich fange damit an so wie ich bei der Zerfällung $A^2 + B^2$ die complexe Zahl $A + Bi$, ebenso $A + B\sqrt{-2}$ für $A^2 + 2B^2$ oder $A + B\sqrt{-7}$ für $A^2 + 7B^2$ u. s. w. durch eine endliche Reihe auszudrücken. Um bei $A^2 + 2B^2$ stehen zu bleiben, so kann für $q = 8n + 1$ eine solche Reihe aus der Kreisteilung genommen werden, aber nicht so für $q = 8n + 3$. Im letzteren Falle finde ich jedoch durch meine sehr einfachen Betrachtungen eine ebenfalls sehr einfache Reihe als Ausdruck für $A + B\sqrt{-2}$. Da q nicht von der Form $4n + 1$ ist, so umfasst ein vollständiges Restensystem (mod. q) mit Ausschluss der Null $q^2 - 1$ complexe Zahlen von der Form $x + yi$ und für alle diese ist $(x + yi)^{q^2-1} \equiv 1$, also $(x+yi)^{\frac{q^2-1}{4}} \equiv$ irgend einer Potenz von i, und wenn $F^2 \equiv i$ (mod. q) gesetzt wird, $(x+yi)^{\frac{q^2-1}{8}} \equiv$ irgend einer Potenz von F; es sei $\omega^2 = i$, also ω eine primitive 8te Wurzel der Einheit, und es bezeichne das Symbol $[x + yi] = \omega^\mu$, wenn $(x+yi)^{\frac{q^2-1}{8}} \equiv F^\mu$ (mod. q) ist; ich finde dann

$$A + B\sqrt{-2} = [1] + [1 + i] + [1 + 2i] + [1 + 3i] + \cdots + [1 + (q-1)i] = \sum_{y=0}^{y=q-1} [1 + yi];$$

und wenn überhaupt $\Sigma[1 + yi]^\nu = \varphi(\omega^\nu)$ gesetzt wird, so ist

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega^3) = A + B\sqrt{-2}, \quad \varphi(\omega^5) = \varphi(\omega^7) = A - B\sqrt{-2},$$
$$\varphi(\omega)\,\varphi(\omega^5) = \varphi(\omega^3)\,\varphi(\omega^7) = q, \quad \varphi(\pm i) = 1, \quad \varphi(-1) = -1, \quad \varphi(1) = q;$$

aus den letzten drei Formeln ergiebt sich besonders die Bestimmung des Vorzeichens von A durch eine Kongruenz (mod. 4); aus den ersten beiden folgt $2A = \varphi(\omega) + \varphi(\omega^5) \equiv \varphi(F) + \varphi(F^5)$ (mod. q); nun sieht man leicht, dass nach der Definition der Symbole [] man haben muss

$$\varphi(F) \equiv \Sigma(1 + yi)^{\frac{q^2-1}{8}}, \quad \varphi(F^5) \equiv \Sigma(1 + yi)^{5\frac{q^2-1}{8}};$$

es bleibt also in letzter Instanz die Diskussion dieser beiden Summen; diese Diskussion, welche gar nicht leicht ist, liefert mir nun die erste Summe $\equiv 0$ und die zweite $\equiv$ Ihrem Binomialkoeffizienten; erschwert aber auch interessant gemacht wird die Diskussion besonders dadurch, dass die Potenzen $(1 + yi)^{\frac{q^2-1}{8}}$ und $(1 + yi)^{5\cdot\frac{q^2-1}{8}}$, da der Exponent $> q$ ist, in ihrer Entwickelung nach dem binomischen Satze s e h r viele Potenzen von y enthält, deren Exponenten durch $q - 1$ teilbar sind, während bei den Betrachtungen von Gauss am Schluss von Theor. res. biq. I nur e i n e solche Potenz, nämlich y^{q-1} erscheint. Dies sind Grundzüge in flüchtiger Kürze, wegen des näheren Details und fernerer Anwendungen muss ich Sie auf meine Abhandlungen verweisen oder besser gesagt, vertrösten. Von elliptischen Funktionen ist hier an keiner Stelle die Rede, die aus ihnen folgenden Principien bilden eine ganz für sich stehende eigene zweite Methode zum Beweise solcher Sätze, worüber ich an Gauss im vorigen Sommer eine kleine Mitteilung gemacht habe; der Gaussische Satz z. B. folgt unmittelbar aus den einfachsten Eigenschaften der lemniscatischen Funktionen, denn es sei m eine primäre zweigliedrige complexe Primzahl, m' die conjugirte Zahl $mm' = p$ die Norm von m eine reelle Primzahl $4n + 1$; der Differenzialgleichung (1.) $\frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} = \frac{m\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ genüge. (2.) $y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1}$ in inf., dann sind alle Koeffizienten a_1, a_2 u. s. w. durch m teilbare ganze Zahlen, mit alleiniger Ausnahme von a_p, welcher $\equiv 1$ (mod. m) ist; setzt man $y = a_p x^p + mR$, so hat R lauter g a n z e (complexe) Koeffizienten, R enthält die Potenz x^p nicht und man hat gewissermassen $y \equiv x^p$ (mod. m), da $a_p \equiv 1$ (mod. m); setzt man nun in die Differenzialgleichung nachdem man ihr die Form $\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1 - y^4}{1 - x^4}}$ gegeben, x^p für y, so kommt

$$\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} \equiv \sqrt{\frac{1 - x^{4p}}{1 - x^4}} \equiv \sqrt{\frac{(1 - x^4)^p}{1 - x^4}} \equiv (1 - x^4)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{m};$$

nun ist $\frac{dy}{dx} = p a_p x^{p-1} + mR'$, $\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} = m' a_p x^{p-1} + R' \equiv m' x^{p-1} + R'$ (mod. m) wegen $p \equiv mm'$, $\frac{p}{m} = m'$; also geht die vorhergehende Kongruenz in $m' x^{p-1} + R' \equiv (1 - x^4)^{\frac{p-1}{2}}$ (mod. m) über; vergleicht man auf beiden die Koeffizienten von x^{p-1} und bemerkt, dass diese Potenz x^{p-1} in R' nicht vorkommt, weil x^p in R nicht enthalten ist $\left(R' = \frac{dR}{dx}\right)$, so erhält man $m' \equiv$ dem Koeffizienten von x^{p-1} in $(1 - x^4)^{\frac{p-1}{2}}$, d. h. $m' \equiv$ dem Gaussischen Binomialkoeffizienten (mod. m) u. s. w. Diese Untersuchungen nebst mehreren anderen arithmetischen Anwendungen der elliptischen Funktionen werden vielleicht auch bald das Licht erblicken. Ich mache Sie noch besonders hierbei auf diejenige fruchtbare Erweiterung des Begriffs der Kongruenz aufmerksam, wonach zwei unendliche Reihen nach Potenzen von x $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ und $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ kongruent heissen, wenn $a_0 \equiv b_0$, $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$ etc. ist; die Konvergenz oder Divergenz der Reihen bleibt hier ganz aus dem Spiel. — In Bezug auf die unendlichen Reihen nach Potenzen von x verspricht besonders der folgende Satz über die Entwickelungskoeffizienten der algebraischen Funktionen viel für die Arithmetik.

„Es seien $f_1(u_1, u_2, \cdots u_n, x) = 0$, $f_2(u_1, u_2, \cdots u_n, x) = 0$ u. s. w. $f_n(u_1, u_2, \cdots u_n, x) = 0$ n algebraische Gleichungen zwischen den $n + 1$ Variabeln $u_1, \cdots u_n, x$, vermöge welcher Gleichungen jedes u eine algebraische Funktion von x ist; es wird angenommen, dass $f_1, f_2, \cdots f_n$ als rationale ganze Funktionen von $u_1, u_2, \cdots x$ mit rationalen Koeffizienten gegeben sind; entwickelt man u als Funktion von x nach steigenden Potenzen von x, so werden die Koeffizienten der Entwickelung, wenn sie rational sind, lauter Nenner haben, welche nur durch eine bestimmte endliche und begrenzte Anzahl von Primzahlen teilbar sind; diese Primzahlen sind die Teiler einer bestimmten Zahl $\triangle$, welche man so erhält: man bilde die Determinante aus den Differenzialquotienten

$$\left.\begin{matrix} \frac{df_1}{du_1}, & \frac{df_1}{du_2}, & \frac{df_1}{du_3}, & \cdots & \frac{df_1}{du_n} \\ \frac{df_2}{du_1}, & \frac{df_2}{du_2}, & \frac{df_2}{du_3}, & \cdots & \frac{df_2}{du_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{df_n}{du_1}, & \frac{df_n}{du_2}, & \frac{df_n}{du_3}, & \cdots & \frac{df_n}{du_n} \end{matrix}\right\}$$

und setze statt $u_1, u_2 \cdots u_n$ die simultanen Wurzeln der n Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f_1(u_1, \cdots u_n, 0) = 0 \\ f_2(u_1, \cdots u_n, 0) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(u_1, \cdots u_n, 0) = 0 \end{array}\right\}$$

und mache rational. Die Konstante, welche man erhält, ist $\triangle$.[1]) Dieser Satz und mehrere dieser Art bilden characteristische Unterschiede zwischen den algebraischen und den transcendenten durch Differenzialgleichungen bestimmten Funktionen; wenn aber eine Differenzialgleichung oder ein System von Differenzialgleichungen sich algebraisch integrieren lässt, so erhält man durch Anwendung jener Sätze merkwürdige Resultate, indem man die Reihenentwickelung mit Hülfe der Differenzialgleichungen vornimmt; Specielleres hierüber bei einer anderen Gelegenheit; zum besseren Verständnis will ich Sie nur auf die Entwickelung von $\lg(1+x)$ aufmerksam machen, wo die Nenner der Koeffizienten $1, 2, 3, \cdots$ nämlich nach der Reihe alle ganze Zahlen sind, so dass man immer Nenner findet, welche durch eine beliebige noch so grosse Primzahl teilbar sind; dergleichen kann bei algebraischen Funktionen nie stattfinden, sondern die Anzahl der Primzahlen, welche in den Nennern der Entwickelung aufgehen, ist begrenzt.

Nun will ich Sie nicht länger mit mathematischen Verirrungen quälen, denn vielleicht sind Sie eben mitten in praktisch populärer Astronomie oder gar in Familien-Sorgen und -Freuden, und ich komme mit meiner Zahlentheorie sehr ungelegen, vielleicht habe ich jedoch auch gerade eine glückliche Stunde getroffen. Ein Onkel von mir behauptet, dass man nur irgend jemand aus dem Tollhause oder Irrenhause zu nehmen brauchte, das würde gewiss der beste Mathematiker sein; ich sage dazu und so meint auch Dirichlet, man könne allenfalls behaupten, die Mathematik sei überhaupt eine Verirrung, deshalb braucht aber nicht jede Tollheit mathematischer Natur zu sein. Besagter Onkel, der, wie alle meine Verwandten (ich Glücklicher in ihrer Mitte?) die Menschen nur nach ihrem Werte (des Geldes) schätzt, meinte auch, als ich ihm mit vieler Mühe durch Beispiele die Zerlegbarkeit der Primzahlen $4n+1$ in zwei Quadrate und die Nichtzerlegbarkeit derer $4n+3$ darthat, „allerdings sei es merkwürdig, aber es gehöre der hyperimaginärste Grad von Verrücktheit dazu, auf so etwas zu

---

1) Eisenstein hat eine kurze Mitteilung über diesen Satz in den Monatsberichten der Berliner Akademie (vom Juli 1852) veröffentlicht. Beweise des Satzes wurden von Heine (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 48) und Hermite (Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 7) gegeben.

verfallen, was ist das schon für Unsinn 'ne Primzahl, nu machen se da noch 'nen Unterschied zwischen $4n + 1$ und $4n + 3$, was kommt mer davon heraus"; die Goldmachekunst ist freilich weit besser. Dieser ist noch der geistreichste von meinen Verwandten, nun urteilen Sie über die andern und welche Rolle ich unter ihnen spielen muss. Aber lieber Eisenstein, was kümmern Sie Ihre Verwandten, lassen Sie die doch laufen; ja das thue ich auch, aber es kümmert sich auch sonst Niemand um mich, so dass ich gänzlich isoliert stehe und doch zuweilen gezwungen bin, zu meinen Verwandten zu gehen. Diese Betrachtungen führen mich auf ein anderes Thema, nämlich die gänzliche Zerrissenheit und Trostlosigkeit meines Gemütes, als Ursache meines langen Schweigens.

Ich müsste lügen, lieber Stern, wollte ich Mangel an Zeit als Grund meines Schweigens vorschützen, sondern es ist vielmehr eine mir Alles verleidende Mutlosigkeit, welche aus der Ungunst meiner Verhältnisse entspringt. Ich spreche hier durchaus nicht von pekuniären Verhältnissen, denn ich kann mit wenigem auskommen, da ich nur wenig Bedürfnisse habe und ich bekomme vom König 500 ℛ jährlich; durch Geld kann mir auch garnicht geholfen werden, denn ob ich etwas besser esse, wohne, mehr Bequemlichkeit habe, das ist sehr gleichgültig; aber es fehlt mir jede geistige Nahrung und Erhebung aufserhalb der Mathematik und im Umgange mit Menschen, die es wahrhaft gut mit mir meinen, jedoch nicht so hoch über mir stehen, dass der Umgang ein blofses steifes Ceremoniel bleibt. Wenn ich nun meinen Kopf durch mathematische Spekulationen zerarbeitet habe, so kann ich mir nachher durchaus keine Erheiterung des Geistes verschaffen, die mir nur aus einer gemütlichen Geselligkeit hervorgehen würde, d. h. einer solchen, wo ich mich nicht zu genieren brauchte, nicht immer geistreich sein müsste, sondern mich gehen lassen könnte, wie ich wollte und wie ich nun einmal bin. Es ist so unendlich schwer, aus dem Kreise herauszukommen, in dem man nun einmal geboren ist, ja für mich unmöglich, da ich mich mit Dingen beschäftige, die so wenige Menschen interessieren, und also so wenige oder gar keine Anknüpfungspunkte finde; und wie die Wenigen, welche gleiche Beschäftigung haben, sich gegen mich benehmen, wissen Sie ja; Dirichlet ist jetzt ganz freundlich gegen mich, aber es bleibt kalte Höflichkeit, er ist Professor, ich bin Privatdocent. Wie ich seit langer Zeit lebe, könnte ich mir eben so gut ein Haus auf einer wüsten Insel bauen lassen, ich würde dann Fische sehen, statt kalter steifer und liebeleerer Menschen. Es sind dies nicht etwa hypochondrische Gedanken, sondern meine Worte gehen aus einer klaren Einsicht der Verhältnisse und dessen, was mir fehlt, hervor; manche Menschen sind sich selbst genug, ich bin nicht so glücklich, sondern mich foltert die fort-

währende Sehnsucht nach Liebe und Zuneigung der Menschen und nach gemütlicheren Verhältnissen, mathematische Beschäftigung ist für mich eine Art Betäubung, um mich vor Melancholie zu retten, so wie für andere Menschen Wein oder Branntwein; daher ist meine Stimmung am düstersten gerade nach Absolvierung eines schwierigen mathematischen Problems, da ich dann recht einsehe, wie sich hierdurch doch garnichts in meiner Lage ändert. Indem ich nun immer mehr einsehe, dass ich selbst mir hierin nicht helfen kann und Andere mir nicht helfen wollen, so bin ich gänzlich meines Daseins überdrüssig geworden und ich vegetiere nur so fort, indem ich mich, wie gesagt, durch mathematische und andere Beschäftigung betäube; so treibe ich schon seit einem Jahre Anatomie und Physiologie und höre eifrig Johannes Müller's Vorlesungen, auch musiziere ich oft, doch Alles kann keine Zufriedenheit gewähren, da ewig das fehlt, was ich wünsche. Dass wirklich mein Unglück in den Verhältnissen liegt, sehe ich an einzelnen Lichtblicken, wenn etwas sich hierin zu ändern scheint, dann komme ich mir gleich wie ein ganz anderer Mensch vor, aber es sind nur Täuschungen und es wird gleich wieder dunkle Nacht, d. h. es bleibt Alles beim Alten. Wenn Sie einige Freundschaft für mich empfinden, so werden Sie mich vielleicht verstehen, von Hause aus bin ich gewiss kein Hypochonder, man bringe mich nur in heitere Verhältnisse (nicht glänzende), so werde ich der heiterste Mensch sein. Ich wollte Sie nicht mit Klagen belästigen lieber Stern, denn ich weifs, man macht sich dadurch unliebenswürdig und verscheucht seine Freunde; eben um nicht zu klagen, habe ich solange nicht geschrieben; mögen Sie eben so glücklich sein, als Ihr Freund unglücklich.

Verzeihen Sie, dass ich den Satz über die Primzahlen $8n+1$ in meiner Abhandlung den Stern'schen Satz nenne, es ist ebenso, wie mit dem Legendre'schen Reciprocitätssatze. Das Papier geht zu Ende; leben Sie recht wohl. Mit den herzlichsten Wünschen

Ihr

Berlin 10./2. 48. Gotthold Eisenstein.

Bitte um baldige Antwort, damit der Briefwechsel nicht abermals ins Stocken gerät.

VI.

November 1848.

Lieber Stern.

Wenn man lange nicht geantwortet hat, so schämt man sich und diese Scham wächst mit der Zeit wie eine Lawine, so dass man das Antworten immer wieder aufs Neue aufschiebt; doch hoffe ich diesmal noch Verzeihung, indem ich jetzt so spät erst die Feder ergreife. Ich darf

doch nun jedenfalls zum Professor gratulieren, ohne dass Sie Sich darüber ärgern werden; ich betrachte dies, nämlich Ihre Professur, als eine der Errungenschaften unserer Freiheitsperiode, die nun bald aufhören wird, da mir nach den Wiener Ereignissen die jetzt hier stattfindende Waffenauslieferung der letzte Schlussstein zur Unterdrückung der von Frankreich ausgegangenen Bewegung zu sein scheint. Ich schreibe dies während Berlin in Belagerungszustand erklärt ist. Doch ich will nichts von Politik schreiben, einmal weil dies ein zu langes und jetzt zu abgedroschenes Kapitel wäre, und dann auch, weil man nicht genau wissen kann ...[1]).

Jedenfalls, die Dinge mögen kommen, wie sie wollen, so haben Sie das Angenehme der Freiheit genossen, es wird Ihnen aber leider durch den Anblick des jetzigen Rückschrittes verbittert werden. Ich dagegen, was mich persönlich betrifft, habe nur das Bittere von der Freiheit zu kosten bekommen; denn obgleich ich mich nicht im Mindesten thätig in die Politik gemischt habe, sondern nur einigemal die Clubs besuchte, was jeder that, ohne aber Reden zu halten, so bin ich doch, blos desshalb schon, von den Räten des Ministeriums, gewiss in Folge von Verläumdungen, als Republikaner angefahren worden. Sie wissen vielleicht, dass ich aus dem Königlichen Fond jährlich eine Unterstützung von 500 Thaler beziehe; dieses Geld ist aber schlimmer als nichts, denn ich hänge dadurch ganz speciell von der Gnade des Königs ab, und das ist, wie Sie wohl denken können, in jetzigen Zeiten sehr übel. Ich bin überzeugt, dass welcher Umschwung aller Verhältnisse in politischer und socialischer Hinsicht auch stattfinden möge, man doch Männern, namentlich Gelehrten, die bereits in Amt und Brod sind, schwerlich das Ihrige entziehen wird; jedoch wird man sich auch ebenso wenig um Menschen, wie ich z. B., kümmern, die eine vorübergehende Unterstützung ohne feste Stellung geniessen, denn die meinige läuft zum 1. Januar ab; ich habe schon alle möglichen Schritte beim Ministerium zu deren Verlängerung gethan, auch habe ich die besten Versicherungen erhalten, aber noch nichts Schwarz auf Weiss, was in solchen Angelegenheiten die Hauptsache ist. Wenn Sie also für mich irgend eine Stellung wissen, sei sie auch noch so schlecht, so werden Sie mich gewiss nicht ekel finden, dieselbe anzunehmen; denn nur darin bin ich ekel und das drückt mein Gemüt, wenn ich von der Gnade selbst des Königs abhängen soll, ich möchte nur das, was mir rechtmässig zukommt. Ich kann auch erst dann zu einigem Frohsinn und zur vollen Entwickelung meiner Kräfte gelangen, wenn ich aus meiner jetzigen, nicht gerade schlechten, aber doch gleichsam in der Luft schwebenden ökonomischen Lage heraus bin.

---

1) Die folgenden Worte sind durchgestrichen.

Ich mache hier eine Pause und lege die Feder nieder, da mich das lange Schreiben zu sehr anstrengt, denn ich bin schon seit 4 Wochen sehr krank an Fieber, Husten und Schnupfen, sogenannter Grippe, der Arzt fürchtet ein Nervenfieber, wenn ich mich nicht sehr schone. Ich werde aber bald meinen Brief fortsetzen, wenn ich mich wieder wohler fühle.

Sind Sie Ihrem Vorsatze, sich in die Zahlentheorie wieder hineinzuarbeiten, treu geblieben? Ich möchte gerne, was ich könnte, dazu beitragen.

VII.

Berlin, 12. Juli 1849.

Lieber Stern!

Da ich heute an Gauss einen Brief abschicke, so kann ich Sie nicht ohne einige Zeilen lassen. Sie müssen nicht glauben, dass ich die ganze Zeit über nicht an Sie gedacht habe; das Gegenteil beweist beiliegender Anfang eines Briefes schon vom November 48; einen zweiten umfangreichen Brief habe ich im März c. geschrieben, er schien mir aber nachher zu melancholisch und unmathematisch und ist verworfen worden. Ich wollte gern mich recht mit Ruhe im Schreiben an Sie ergehen und Ihnen eine Menge mathematischer und unmathematischer Mitteilungen machen, aber ich bin nicht dazu gekommen. Heute nur ganz kurz; erwarten Sie aber bald einen inhaltreichen Brief oder mich selbst, wenn ich Ihnen angenehm bin. Ich hätte wirklich Lust jetzt auf ein paar Wochen nach Göttingen zu kommen, weiss aber noch nicht recht, wie es sich mit der Kasse vertragen wird; bin ich Ihnen willkommen? — Ich hoffe, dass bei Ihnen Alles gut geht und dass Ihre Familie nicht irgendwie Unangenehmes durch den Krieg in der Pfalz, der doch auch Frankfurt berührt, erlitten hat. Grüssen Sie vielmals Ihre Frau Gemahlin, Herrn Goldschmidt und Alle, die in Göttingen einen freundschaftlichen Anteil an mir nehmen. In meinen Verhältnissen hat sich nichts geändert und schwebe ich, um es kurz zu sagen, noch immer in der Luft.

Den herzlichsten Dank für Ihre liebevolle und trostreiche Zusprache in Ihrem Briefe. Nur eine ganz kurze mathematische Mitteilung. Ich zweifle, dass Sie irgend Formeln zwischen Binomialkoeffizienten vorbringen können, die nicht in folgenden allgemeinen Sätzen enthalten sind. Es sei q wie immer eine ungerade pos. Primzahl; das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$ sei mit $n!$ bezeichnet. Wenn $a + b = q - 1$, so ist $1 \cdot 2 \cdots q - 1 = (1 \cdot 2 \cdots a)(q - 1 \cdot q - 2 \cdots q - b) \equiv (-1)^b a!\, b! \equiv (-1)^a a!\, b!$, also nach dem Wilson'schen Satze

$$1)\quad a!\,b! \equiv (-1)^{a+1} \equiv (-1)^{b+1} \pmod{q} \text{ wenn } a + b = q - 1.$$

Es sei jetzt ϑ eine beliebige Zahl $< q$ und $n\vartheta$ ein Vielfaches von ϑ ebenfalls $< q$; dann ist

$$(n\vartheta)! = (\vartheta \cdot 2\vartheta \cdot \cdots \cdot n\vartheta)\,\big(1.\,(\vartheta + 1)\,(2\vartheta + 1)\cdots((n-1)\,\vartheta + 1)\big)$$
$$\big(2.\,(\vartheta + 2)\,(2\vartheta + 2)\cdots((n-1)\,\vartheta + 2)\big)$$
$$\cdots\big((\vartheta - 1)(\vartheta + \vartheta - 1)(2\vartheta + \vartheta - 1)\cdots\big)$$

d. h. $=$

$$\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta + 1)\cdot\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta + 2)\cdot\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta + 3)\cdots\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta + \vartheta).$$

Setzt man

$$q = e_1\vartheta + r_1,\ 2q = e_2\vartheta + r_2,\ 3q = e_3\vartheta + r_3, \cdots (\vartheta - 1)\,q = e_{\vartheta-1}\vartheta + r_{\vartheta-1},$$

so sind alle $r < \vartheta$ wieder die Zahlen $1, 2, 3, \cdots \vartheta - 1$ in anderer Reihenfolge, folglich

$$(n\vartheta)! = \Pi(\sigma\vartheta + r_1)\,\Pi(\sigma\vartheta + r_2)\,\Pi(\sigma\vartheta + r_3)\cdots\Pi(\sigma\vartheta + r_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma\vartheta + \vartheta)$$

Π erstreckt sich immer von $\sigma = o$ bis $\sigma = n - 1$.

Aber es ist $r_1 \equiv -e_1\vartheta,\ r_2 \equiv -e_2\vartheta, \cdots r_{\vartheta-1} \equiv -e_{\vartheta-1}\vartheta \pmod{q}$, folglich

$$(n\vartheta)! \equiv \vartheta^{n\vartheta}\cdot\Pi(\sigma - e_1)\,\Pi(\sigma - e_2)\cdots\Pi(\sigma - e_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma + 1) \pmod{q}.$$

Man hat auch, wenn $\vartheta - r_1,\ \vartheta - r_2, \cdots \vartheta - r_{\vartheta-1}$ statt r_1, r_2 etc. gesetzt werden, was ebenfalls erlaubt ist,

$$(n\vartheta)! = \Pi(\sigma\vartheta - r_1)\,\Pi(\sigma\vartheta - r_2)\cdots\Pi(\sigma\vartheta - r_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma\vartheta),$$

wo jetzt σ von 1 bis n sich erstreckt; also auch wegen $-r_1 \equiv e_1\vartheta$, $-r_2 \equiv e_2\vartheta$ etc.

$$(n\vartheta)! \equiv \Pi(\sigma\vartheta + \vartheta e_1)\,\Pi(\sigma\vartheta + \vartheta e_2)\cdots\Pi(\sigma\vartheta + \vartheta e_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma\vartheta)$$
$$\equiv \vartheta^{n\vartheta}\,\Pi(\sigma + e_1)\,\Pi(\sigma + e_2)\cdots\Pi(\sigma + e_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma) \pmod{q}.$$

Nun ist $\prod\limits_{\sigma=1}^{\sigma=n}(\sigma + e) = (1 + e)(2 + e)(3 + e)\cdots(n + e)$ nichts anders als $\dfrac{(n+e)!}{e!}$, folglich hat man

$$(n\vartheta) \equiv \frac{\vartheta^{n\vartheta}\,n!\,(n + e_1)!\,(n + e_2)!\cdots(n + e_{\vartheta-1}!)}{e_1!\,e_2!\cdots e_{\vartheta-1}!} \pmod{q},$$

wo $\quad e_1 = E\left(\dfrac{q}{\vartheta}\right),\ e_2 = E\left(\dfrac{2q}{\vartheta}\right), \cdots e_{\vartheta-1} = E\left(\dfrac{(\vartheta-1)\,q}{\vartheta}\right)$

ist, nach der Legendre'schen Bezeichnung der grössten Ganzen; da nun allgemein

$$E\left(\frac{(\vartheta - \alpha)\,q}{\vartheta}\right) + E\left(\frac{\alpha q}{\vartheta}\right) = q - 1,$$

so hat man nach dem ersten Satze

$$e_1!\, e_{\vartheta-1}! \equiv (-1)^{e_1+1},\quad e_2!\, e_{\vartheta-2}! \equiv (-1)^{e_2+1},\ \ldots$$

folglich ist, wenn ϑ ungerade, der ganze Nenner

$$\equiv (-1)^{e_1+e_2+\cdots+e_{\frac{\vartheta-1}{2}}+\frac{\vartheta-1}{2}} \equiv \left(\frac{-q}{\vartheta}\right) \pmod{q};$$

wenn ϑ gerade, so bleibt noch das mittlere Glied $e_{\frac{\vartheta}{2}}$ stehen, welches keinen Gefährten findet. Sei ϑ ungerade, so hat man nun den zwar elementaren aber wichtigen Satz[1])

$$2)\qquad (\vartheta n)! \equiv \vartheta^{n\vartheta}\left(\frac{-q}{\vartheta}\right) n!\left(n+E\left(\frac{q}{\vartheta}\right)\right)!\left(n+E\left(\frac{2q}{\vartheta}\right)\right)!\ldots$$
$$\ldots\left(n+E\left(\frac{(\vartheta-1)q}{\vartheta}\right)\right)! \pmod{q},$$

wo $\left(\frac{-q}{\vartheta}\right)$ das Legendre'sche Zeichen. Ich überlasse Ihnen mannigfaltige Anwendungen dieser Formel für specielle Werthe von ϑ zu machen; wichtig ist, dass die Zahlen E von n unabhängig sind, und man so für jedes specielle ϑ wegen des n eine allgemeine Formel hat.

Ich verbleibe Ihr ergebener Freund

G. Eisenstein,

Berlin, 12. Juli 49.

Ritterstrasse 56.

PS. Wenn ϑ gerade, so ist $e_{\frac{\vartheta}{2}} = \frac{q-1}{2}$, also kommt dann $\left(\frac{q-1}{2}\right)!$ im Nenner.

VIII.

Juli 1849.

In Ihrem Briefe findet sich die Formel, wenn $q = 24n+1$, so ist

$$\left(\frac{12n\ldots 11n+1}{1\ldots n}\right)^2 \equiv \frac{5n+1\ldots 6n}{1\ldots\ldots n}\cdot\frac{7n+1\ldots 13n}{1\ldots\ldots 6n} \pmod{q}.$$

Um zu sehen, was man eigentlich hat, muss man erst auch Fakultäten bringen. Die linke Seite ist

$$\left(\frac{(12n)!}{n!\,(11n)!}\right)^2,\ \text{die rechte}\ \frac{(6n)!}{n!\,(5n)!}\,\frac{(13n)!}{(6n)!\,(7n)!} = \frac{(13n)!}{n!\,(5n)!\,(7n)!},$$

---

1) Dieser Satz ist als specieller Fall in einem anderen enthalten, welchen Herr Stickelberger im § 4 seiner Abhandlung „Über eine Verallgemeinerung der Kreisteilung" aufgestellt hat. (Mathematische Annalen, Bd. 37.)

also ist, wenn man den gemeinschaftlichen Divisor $n!$ fortlässt, zu beweisen, dass

$$(12n)!\,(12n)!\,(5n)!\,(7n)! \equiv (11n)!\,(11n)!\,n!\,(13n)!$$

Zunächst vereinfacht sich dies nach

$$1)\qquad a!\,b! \equiv (-1)^{a+1}, \quad \text{wenn} \quad a+b=q-1.$$

Also hier ist

$$(12n)!\,(12n!) \equiv (-1)^{12n+1} \text{ und rechts } (11n)!\,(13n)! \equiv (-1)^{11n+1},$$

weil $\qquad 12+12=24 \quad$ und $\quad 11+13=24.$

Es ist also nur zu zeigen, dass

$$(5n)!\,(7n)! \equiv (-1)^n n!\,(11n)! \quad (\text{mod. } q=24n+1);$$

dies ist falsch, es ist vielmehr $(5n)!\,(7n)! \equiv n!\,(11n)!$ ohne $(-1)^n$, wie Sie sogleich sehen werden. Sie haben also jedenfalls in Ihrer Formel rechts z. B. den Faktor $(-1)^n$ vergessen, oder sich geirrt; die richtige Formel ist

$$\left(\frac{12n \ldots 11n+1}{1 \ldots n}\right)^2 \equiv (-1)^n \frac{5n+1 \ldots 6n}{1 \ldots n} \cdot \frac{7n+1 \ldots 13n}{1 \ldots . 6n} \quad (\text{mod. } q);$$

ich habe auch gleich nach Empfang Ihres Briefes den fehlenden Faktor $(-1)^n$ dazu geschrieben.

Dass nun wirklich $(5n)!\,(7n)! \equiv n!\,(11n)!$ ist, geht wie folgt aus der allgemeinen Formel

$$2)\quad (\vartheta z)! \equiv \vartheta^{\vartheta z}\left(\frac{-q}{\vartheta}\right) z!\,(z+e_1)!\,(z+e_2)! \ldots (z+e_{\vartheta-1})! \;(\text{mod. } q)$$

hervor. Um zunächst möglichst allgemein zu bleiben, sei ϑ irgend ein ungerader Divisor von $q-1$ und $q=e\vartheta+1$; dann hat man

$$2q=2e\vartheta+2,\; 3q=3e\vartheta+3, \ldots (\vartheta-1)q=(\vartheta-1)e\vartheta+\vartheta-1,$$

also sind in diesem Falle die Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_{\vartheta-1}$ nichts anderes als $e, 2e, 3e, \ldots (\vartheta-1)e$, nämlich $\frac{q-1}{\vartheta}, 2\frac{q-1}{\vartheta}, 3\frac{q-1}{\vartheta}, \ldots (\vartheta-1)\frac{q-1}{\vartheta}$; ferner ist $\left(\frac{-q}{\vartheta}\right)=\left(\frac{-1}{\vartheta}\right)$; man erhält daher den sehr brauchbaren speciellen Fall von 2)

$$3)\quad (\vartheta z)! \equiv \vartheta^{\vartheta z}\left(\frac{-1}{\vartheta}\right) z!\,(z+e)!\,(z+2e)! \ldots (z+\overline{\vartheta-1}\,e)! \;(\text{mod. } q),$$

wenn ϑ ein ungerader Divisor von $q-1$ und $e=\frac{q-1}{\vartheta}$.

Sei jetzt $q=24n+1$, $\vartheta=3$ und zunächst $z=n$, dann kommt wegen $e=8n$,

$$(3n)! \equiv 3^{3n}\left(\frac{-1}{3}\right) n!\,(9n)!\,(17n)!;$$

sei $z = 3n$, so kommt

$$(9n)! \equiv 3^{9n} \left(\frac{-1}{3}\right) (3n)!\ (11n)!\ (19n!,$$

also multiplicando

$$(3n)!\ (9n)! \equiv 3^{12n} n!\ (9n)!\ (17n)!\ (3n)!\ (11n)!\ (19n)!$$

Hier ist $3^{12n} = 3^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{3}{q}\right)$, aber $\left(\frac{3}{q}\right) = \left(\frac{q}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = 1$, weil $q \equiv 1$ (mod. 4); also kommt $n!\ (11n)!\ (17n)!\ (19n)! \equiv 1$ (mod. q). Statt $a!$ im Zähler kann man immer $b!$ im Nenner schreiben, wenn $a + b = q - 1$, und man nicht vergisst, mit $(-1)^{a+1}$ zu multiplizieren; dies folgt aus $a!\,b! \equiv (-1)^{a+1}$.

Schreibt man daher statt $(17n)!$ und $(19n)!$ resp. $\frac{1}{(7n)!}$ und $\frac{1}{(5n)!}$ so kommt

$$\frac{n!\ (11n)!}{(5n)!\ (7n)!} \equiv (-1)^{17n+1} (-1)^{19n+1} \equiv 1,$$

d. h. $$n!\ (11n)! \equiv (5n)!\ (7n)! \text{ quod erat dem.}$$

Ihre Kongruenz geht also aus doppelter Anwendung von

$$(3z)! \equiv 3^{3z} \left(\frac{-1}{3}\right) z!\ (z + 8n)!\ (z + 16n)! \pmod{24n + 1}$$

hervor. — Um nicht identische Formeln für verschieden zu halten, ist es sehr wesentlich, statt Binomialkoeffizienten Fakultäten allein zu betrachten und alle Fakultäten $x!$ so zu reduzieren, dass $x \leqq \frac{q-1}{2}$ wird. — Um bei Ihrem Falle $q = 24n + 1$ noch stehen zu bleiben, kann man nach allen Relationen fragen, die überhaupt zwischen $n!$, $(2n)!$, $(3n)!$, .. $(11n)$ stattfinden, denn $(12n)! \equiv \pm 1$ und die folgenden drücken sich in diesen aus, z. B. $(13n)!$ in $(11n)!$ u. s. w. Sei br. c. $(\mu n)! = [\mu]$. Setzt man in obige Formel n, $2n$, $3n$, .. $8n$ statt z, so bekommt man das System

$$\begin{aligned}
[3] &\equiv -5^{3n}\,[1][9]\,[17] \equiv (-1)^{7n} 3^{3n} [1][9] : [7] \\
[6] &\equiv -3^{6n}\,[2][10][18] \equiv 3^{6n} [2][10] : [6] \\
[9] &\equiv -3^{9n}\,[3][11][19] \equiv (-1)^{5n} 3^{9n} [3][11] : [5] \\
[12] &\equiv -2^{12n} [4][12][20] \equiv [4][12] : [4],
\end{aligned}$$

wird identisch; die folgenden geben nichts neues, also hat man zunächst 3 Relationen

$$[3][7] \equiv (-1)^n 3^{3n} [1][9], \quad [6]^2 \equiv 3^{6n} [2][10]$$

und $$[5][9] \equiv (-1)^n 3^{9n} [3][11];$$

man findet andere Relationen, wenn man $\vartheta = 2$, 4 oder 8 statt 3 setzt und die Formel für ein gerades ϑ anwendet. —

Nächstens mehr von dergleichen entweder schriftlich oder mündlich. — Mit der Schnelligkeit, mit der ich Ihre Abhandlung über irrationalwertige

Reihen ins Crelle'sche Journal gebracht habe, werden Sie hoffentlich zufrieden sein; ich habe dieselbe auf eigne Gefahr und auf Gefahr von Crelles höchster Ungnade nach der Druckerei getragen, selbst Redacteur gespielt und dem Setzer zum Druck empfohlen, sonst läge sie noch; übrigens kannte ich Ihre dortige Methode und hatte mich längst geärgert, denn da die Irrationalität dieser Reihen und Produkte sich so einfach beweisen lässt, wozu nutzen dann meine Kettenbrüche! — Was Sie einmal über Kongruenzen ersten Grades gesagt oder gefragt haben, habe ich wirklich nicht verstanden und bitte um Wiederholung und nähere Aufschlüsse. — Sie sagen in Ihrem Briefe, über quadratische Zerfällungen, „dass diese mühselige, für jeden besonderen Fall besonders zu behandelnde Reihenbetrachtung noch nicht der richtige Weg sei," aber ich habe ja die Reihen, welche auf alle quadratischen Formen passen und habe sie nur für Ihren Fall specialisiert, um den Geist der Methode an einem einfachen Beispiele hervortreten zu lassen und zu zeigen, dass dieselbe auch anwendbar ist, wenn die Determinante nicht Teiler von $q-1$ ist, wie bei $q=8n+3$. Aufserdem weifs ich nur eine umfassende freilich hiervon ganz verschiedene Methode durch die elliptischen Funktionen. Ihre neuste Abhandlung über Kettenbrüche (Konvergenz) ist sehr hübsch. Lieber Stern, ich kann schliefslich nicht unterlassen zu sagen, dass mir Ihr Brief vom vorigen Jahre unendliches Vergnügen bereitet und dass ich ihn wohl zwanzig Mal gelesen habe; ich muss dies hier ausdrücklich bemerken, weil Sie wegen meines langen Schweigens leicht daran zweifeln könnten; aber wie gesagt, nur die Fülle des Stoffes hat mich am Schreiben gehindert, und weil ich gern eine würdige Antwort schicken wollte. Unschicklich war es von mir, dass ich nicht Bescheid gab auf Ihre freundliche Einladung; aber ich wollte wirklich von Monat zu Monat kommen, was immer unterblieb.

Grüfsen Sie Ihre liebe Frau, Ihren Jungen, Goldschmidt und Meyersteins.

Ihr

Eisenstein.

IX.

Berlin 14. Januar 1850.

Lieber Stern!

Obgleich ich wohl weifs, dass ich nicht verdiene wieder vor Ihren Augen zu erscheinen, da ich auf die unhöflichste Weise von der Welt Ihren herzlichen Brief weder beantwortet, noch Ihrer freundlichen Einladung Folge geleistet habe, so hoffe ich doch, dass Sie vielleicht über einen reuigen Sünder Gnade ergehen lassen.

Was mich dazu führt, gerade jetzt an Sie zu schreiben, ist eine mathematische Kleinigkeit, die wegen ihrer grofsen Einfachheit Ihnen gewiss Spafs machen wird. Ich bin darauf bei meinen Untersuchungen über höhere Reciprocitätsgesetze gekommen; was ich Ihnen mitteilen will, lässt sich aber sehr gut von der Theorie trennen und bildet einen ganz selbstständigen Satz, dem Sie es gewiss nicht anmerken, dass er mit jener Theorie zusammenhängt. — Nehmen Sie irgend zwei positive ganze Zahlen, z. B. was das einfachste ist 1 und 1, schreiben zwischen beide ihre Summe, also 1 2 1; dann zwischen je zwei dieser drei Zahlen wieder deren resp. Summen, also 1, 3, 2, 3, 1 u. s. w. immer zwischen je zwei bereits erhaltene Zahlen ihre Summe; jede neue Einschaltung der Summe ist als eine Vervollständigung der Reihe zu betrachten, deren Gliederzahl sich fortwährend verdoppelt (mit Ausnahme eines Gliedes), und das Verfahren wird ins Unendliche fortgesetzt; nach einer gewissen Zeit erhält man z. B.

1 6 5 9 4 11 7 10 3 11 8 13 5 12 7 9 2 9 7 12 5 13 8 11 3 10 7 11 4 9 5 6 1

Am Besten nimmt sich diese Procedur aus, wenn Sie auf einen schmalen Streifen Papier oben und unten 1 schreiben, den Streifen halb falten, in den Kniff (Berliner Ausdruck) 2 setzen, abermals falten, so dass zwei neue Kniffe entstehen, wohinein Sie 3 resp. 3 schreiben, aufs Neue kniffen, um von oben nach unten 4, 5, 5, 4 hinein zu setzen u. s. w. In der so gebildeten und durch fortwährendes Einschalten der Summe zwischen je zwei Zahlen zu vervollständigenden Zahlenreihe kommt jede bestimmte ganze Zahl nur eine endliche Anzahl mal vor, weil sie nach einer gewissen Zeit wegen der wachsenden Gröfse der neu hinzutretenden Zahlen nicht wieder erscheinen kann. So kommen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 resp. 1 mal, 2 mal, 2 mal, 4 mal, 2 mal vor. Ich habe nun allgemein gefunden, „dass jede Zahl A genau $\varphi(A)$ mal vorkommt, wo $\varphi(A)$ die Bedeutung in Disq. Arithm. hat“, z. B. jede Primzahl p kommt $p-1$ mal vor. Wenn man statt von 1 und 1 von zwei andern ursprünglichen Zahlen bei der Bildungsweise ausgeht, so gilt ein anderes Gesetz. Geht man von a und b aus, und nennt a^0, b^0 die kleinsten der Gleichung $ba^0 - ab^0 = 1$ genügenden Zahlen, so kommt in der nach obigem Algorithmus gebildeten Zahlenreihe, welche ich die Entwickelung von (a, b) nennen will, eine beliebige ganze Zahl A so oft vor, als es Zahlen zwischen den Grenzen

$$(\alpha) \qquad \frac{b^0}{b} A \text{ und } \frac{a^0}{a} A$$

giebt, die zu A relative Primzahl sind, wie Sie Sich leicht durch Induktion an einigen Beispielen überzeugen können. Meine Beweise dieser Sätze sind ziemlich kompliziert, vielleicht finden Sie einfachere, es wäre mir lieb, solche

zu besitzen, die sich unmittelbar aus der angegebenen Bildungsweise auf elementare Weise ergeben.[1]) Diese Formationen besitzen viele andere merkwürdige Eigenschaften; notiert man z. B. die Zahlen, welche in der Entwicklung von (a, b) je unmittelbar auf eine bestimmte Zahl A so oft dieselbe vorkommt, folgen, so sind diese die Werte von $\frac{1}{x}$ (mod A), während x zwischen den obigen Grenzen (α) liegt und zu A relative Primzahl ist; so folgen z. B. in der Entwicklung von (1, 2):

1, **7, 6,** 11, 5, 14, 9, 13, 4, 15, 11, 16, **7, 17,** 10, 13, 3, 14, 11, 19, 8, 21, 13, 18, 5, 17, 12, 19, **7, 16,** 9, 11, 2,

auf die Zahl 7 an den drei Stellen, an welchen sie vorkommt, die Zahlen $6, 17 \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7$, $16 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$ und $2, 3, 6$ sind die Werte von resp. $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \pmod 7$, wo die Nenner, die zwischen $\frac{7}{2}$ und 7 liegenden Zahlen sind. In der Entwickelung von (1, 1) sind namentlich die auf A so oft es vorkommt je unmittelbar folgenden Zahlen die sämmtlichen $\varphi(A)$ inkongruenten Zahlen (mod A), welche mit A keinen gemeinschaftlichen Teiler haben.

Wenn Sie diese Bemerkungen irgendwo wollen drucken lassen, vielleicht in Ihrer Akademie, so wird es mir angenehm sein. Crelle ennuiert mich jetzt schrecklich, er ändert in meinen Arbeiten, was ihm beliebt, so dass ein höchst wunderlicher Styl und manche Sinn-Entstellung herauskommt. Können Sie Sich etwas Schrecklicheres denken als folgenden Passus: Ich schreibe ganz vernünftig: Der Gleichung $P = Q$ kann man die Form $R = S$ geben. Crelle macht hieraus:

Der Gleichung $P = Q$ lässt sich die Form $R = S$ geben.

Dies nur ein Beispiel unter vielen ebenso grausigen.

Ich habe im Crelle'schen Journal eine lange Arbeit drucken lassen, die sich schon vom Sommer her bis jetzt durch drei Hefte durchzieht und die mich auch verhinderte zu Ihnen zu kommen; sie wird Ihnen wahrscheinlich bald zu Gesichte kommen; sobald ich meine Abdrücke erhalte, will ich einen an Gauss schicken, von dem ich vor einiger Zeit auf mein Gratulations-Schreiben eine Antwort empfangen habe, die mir grofse Freude gemacht hat.

Haben Sie schon gehört, dass Rosenhain in Breslau den grofsen mathematischen Preis aus Paris erhalten hat? Einer unserer jüngeren Privatdocenten hier hat die Stelle von Pohl in Breslau als Prof. extr. erhalten.

---

1) Solche Beweise hat Stern in seiner Abhandlung „Über eine zahlentheoretische Funktion" gegeben. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55 (1858).)

Sie würden mich sehr verbinden, wenn Sie mir mitteilten, ob und in welcher Weise man bei Ihnen einen Verleger für Tänze (Polkas, Walzer) findet; ich habe mehrere dergleichen komponiert, die hier allgemeinen Beifall finden, aber es ist schwer, hier einen Verleger zu gewinnen, wenn man nicht schon Komponist von Ruf ist. Sie teilten mir einmal früher mit, dass Sie mir einen Verleger für mathematische Sachen verschaffen könnten, wollten Sie vielleicht die Güte haben, mir nähere Nachricht darüber zukommen zu lassen.

Unter dem Siegel der tiefsten Verschwiegenheit will ich Ihnen, da Sie Sich auf so freundschaftliche Weise auch für meine menschlichen Verhältnisse interessieren, anvertrauen, dass ich, was für einen Mathematiker eine Dreistigkeit ist, ein Viertel von 1000 ℛ in der Lotterie gewonnen habe; aber sprechen Sie nicht davon, sonst denken die Leute, ich sei reich geworden, während doch die paar 100 ℛ fast schon aufgezehrt sind.

Ich weifs nicht, ob ich Ihnen schon über Riemann geschrieben habe; ich halte ihn ebenfalls für sehr talentvoll und habe auch mit Dirichlet von ihm gesprochen; sein Umgang hätte mir viel Freude gemacht; als er hier war bin ich ihm förmlich nachgelaufen, er schien mich aber zu vermeiden, was mir sehr leid that, ich kenne nicht die Ursache, vielleicht Schüchternheit oder Verlegenheit von seiner Seite, oder lag es an mir, dass ich ihm nicht so freundschaftlich erschienen bin, als ich es innerlich gewiss fühlte und beabsichtigte; wie geht es ihm jetzt?

Zum Schlusse noch etwas Mathematisches. Können Sie folgendes Problem über Permutationen lösen: die Elemente $1, 2, 3, \ldots n$ in solche noch unbekannte Reihenfolge zu bringen, dass, wenn man bei der letzteren das erste Element herausnimmt, das zweite ans Ende schreibt, das dritte herausnimmt, das vierte ans Ende schreibt u. s. w. immer abwechselnd ein Element herausnimmt und eins ans Ende schreibt, wobei denn die ans Ende geschriebenen Elemente später auch wieder vorkommen, dass bei einem solchen Verfahren die herausgenommenen Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge $1, 2, 3, \ldots n$ nach und nach erscheinen; z. B. die 13 Karten (Spielkarten) einer Farbe so zu legen, dass wenn man die erste auswirft (auf den Tisch), die zweite unter das Spiel steckt, die dritte auswirft, die vierte untersteckt u. s. w., bis alle Karten, auch die früher untergesteckten erschöpft sind: die ausgeworfenen Karten in natürlicher Reihenfolge $2, 3, \ldots 10$, Bube, Dame, König, Ass folgen. Ich bin im Besitze eines sehr einfachen Princips, um allgemein folgendes Problem zu lösen, welches Obiges als speciellen Fall enthält und auch praktisches Interesse darbietet. Thätigkeit will ich jedes Verfahren, jede Art und Weise nennen, einen gewissen Zu-

stand zu verändern, den man selbst als das Resultat aller vorgehenden Thätigkeiten von $-\infty$ her ansehen kann; solche Thätigkeiten will ich mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Soll nun ein unbekannter Zustand Z gefunden werden, von der Art, dass, wenn man auf ihn nach und nach die Thätigkeiten $a, b, c, \ldots g, h$ anwendet, zuletzt ein gewisser status quo A hergestellt wird, so suche ich zunächst zu jeder der gegebenen Thätigkeiten die ihr entsprechende reciproke, durch welche sie wieder aufgehoben wird, und wende dann diese reciproken $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \cdots \frac{1}{h}$ in umgekehrter Reihenfolge $\frac{1}{h}, \frac{1}{g}, \cdots \frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ auf den status quo A an; so finde ich

$$Z = A \cdot \left(\frac{1}{h}, \frac{1}{g}, \cdots \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right).^{1)}$$

Bei dem obigen Beispiel bedeutet Z die gesuchte noch unbekannte Anordnung der Karten, A die Karten in ihrer natürlichen Reihenfolge, die Thätigkeiten sind das Auswerfen und unter das Spiel Stecken der Karten, ihre reciproken also das Aufnehmen einer Karte vom Tische, resp. das Legen einer unten befindlichen Karte oben auf das Spiel, so dass wenn a z. B. das Auswerfen, dann $\frac{1}{a}$ das Einnehmen bezeichnet; nach diesen Andeutungen werden Sie leicht die Lösung finden. Solche Probleme kommen unbewusster Weise bei den gewöhnlichsten Lebensverrichtungen vor. Wenn man sich des Morgens anziehen will, zuerst Strümpfe, dann Unterhosen, Hosen, Tragebänder, Weste, Rock, und man will diese Kleidungsstücke auf seinem Stuhle gleich zur Hand liegen haben, so muss man sie des Abends nicht in der genannten, sondern gerade in der umgekehrten Reihenfolge hinlegen, also zu unterst erst: Rock hinlegen, dann Weste, Tragebänder, Hosen, Unterhosen, Strümpfe. Dies klingt lächerlich und geschieht wie gesagt unbewusster Weise, aber ich nehme es in vollem Ernste und halte diese Anwendung der reciproken Thätigkeiten in **umgekehrter** Reihenfolge für ein wichtiges, mathematisches oder wenn Sie wollen, logisches Princip, von dem noch schöne Anwendungen bei Problemen gemacht werden können, die sich auf andere Art etwa combinatorisch gar nicht behandeln lassen. — Nächstens will ich Sie von einem Princip unter-

---

1) Nach der heute üblichen Bezeichnungsweise der Gruppentheorie sind $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \cdots \frac{1}{h}$ die zu $a, b, \cdot \cdot, h$ inversen Operationen. Die Bemerkung von Eisenstein kommt auf den bekannten fundamentalen Satz hinaus, dass $\frac{1}{h} \frac{1}{g} \cdots \frac{1}{b} \frac{1}{a}$ die inverse Operation der zusammengesetzten Operation $ab \cdots gh$ ist.

halten anderer, aber ebenso allgemeiner Art, welches ich das Princip der Sparsamkeit nenne, und bei welchem die Freiheit des Willens mathematisch abgehandelt wird; es kommt dabei heraus, dass es am vorteilhaftesten ist, jedesmal so zu handeln, dass man im nächstfolgenden Zustande nach der That möglichst unfrei sei.

Leben Sie nun herzlich wohl und grüſsen vielmals Ihre Familie; haben Sie schon wieder etwas Kleines? Wenn Sie mir eine Frau empfehlen, so heirate ich auch. Uebrigens beabsichtige ich jetzt in allem Ernste unsere Korrespondenz in besseren Fluss zu bringen. Ihr ergebenster Freund

G. Eisenstein.

NIKOLAJ IWANOWITSCH LOBATSCHEFSKIJ.

REDE,

GEHALTEN

BEI DER FEIERLICHEN VERSAMMLUNG DER KAISERLICHEN UNIVERSITÄT KASAN

AM 22. OKTOBER 1893

VON

PROFESSOR **A. WASSILJEF.**

AUS DEM RUSSISCHEN ÜBERSETZT

VON

PROFESSOR **FRIEDRICH ENGEL.**

1

Das edle Leben des Mannes, dessen Gedächtniss heute gefeiert wird, ist während der ersten fünfzig Jahre des Bestehens der Universität Kasan untrennbar mit deren Geschichte verbunden; auf jeder Seite dieser Geschichte — es sind das Worte aus einer an seinem Grabe gehaltenen Rede — steht ehrenvoll und in dankbarem Andenken der Name Lobatschefskijs.

Lobatschefskij tritt in die Universität sogleich bei ihrer Gründung ein. Am 5. November 1804 war das Statut der Universität bestätigt worden, unter dem 9. Januar 1807 steht der Name Nikolaj Lobatschefskijs in dem Verzeichnisse der Schüler des Kasaner Gymnasiums, die für würdig erklärt wurden, die Vorlesungen der Professoren und Adjunkten zu hören, und zwar steht er da mit dem Vermerke „dignus".

Die ersten Jahre in dem Leben unsrer Universität, mit denen Lobatschefskijs Studentenjahre zusammenfallen, zeigen äusserlich viel Chaotisches, Unvorbereitetes und Ungeordnetes. Die Universität wurde ohne alle Hülfsmittel für den Unterricht eröffnet; es fehlte an der regelmässigen Vertheilung des Stoffes auf die Facultäten, und dieser Zustand schadete selbstverständlich dem Erfolge der Arbeit der Universität.

2

Dafür hatte sich aber an der jungen Universität, die eben erst in einem halbwilden Lande eröffnet worden war, in dieser „ultima Musarum Thule", wie die ersten hierher gekommenen deutschen Professoren die Universität Kasan nannten, es hatte sich der studirenden Jugend jener Zeit eine Begierde nach Kenntnissen, ein brennender Trieb nach Wissen bemächtigt. Noch in Dorpat, viele Jahre später, erinnerte sich Bartels, der erste Professor der Mathematik, mit lebhaftem Bedauern seiner begabten Kasaner Schüler.

Entsprechend dieser Begierde nach Kenntnissen herrschte, wie uns einer der ersten Zöglinge unsrer Universität, S. T. Aksakof, in seiner „Familienchronik" bezeugt, „vollständige Verachtung gegen alles Niedrige und Gemeine, und tiefe Verehrung für alles Rechtschaffene und Hohe, mochte es auch unvernünftig sein."

Dieser Geist der studirenden Jugend der damaligen Zeit, von dem auch einige uns überlieferte Thatsachen aus Lobatschefskijs Jugendjahren Zeugniss ablegen, entsprach dem allgemeinen Geiste jenes Zeitraums, den

Puschkin als den „schönen Anfang der Tage Alexanders“ bezeichnet hat, jenes Zeitraums, an den uns das schöne Bildniss erinnert, das in unsrer Aula steht und auf dem der junge Herrscher in der ganzen Anmuth seiner Schönheit dargestellt ist, wie er vor der Büste seiner erleuchteten Grossmutter und gewissermassen auf ihren Befehl der Universität Kasan die Stiftungsurkunde überreicht.

Wenige Zeiträume in der Geschichte der russischen Bildung sind so glänzend und fruchtbar wie dieser Zeitraum, wo die Regierung, an der Spitze der geistigen Bewegung des Landes stehend, einen allgemeinen Plan für die Volksbildung ausarbeitet, „grossartig,“ sagt Karamsin, „und ruhmvoll nicht nur für Russland und den Herrscher, sondern auch für das ganze Jahrhundert,“ wo sie das Blühen der Uebersetzungslitteratur begünstigt, die Russische Akademie reorganisirt, neue Universitäten eröffnet und an diese die besten ausländischen Gelehrten beruft.

Der Thätigkeit der Regierung entsprach die Belebung der geistigen Thätigkeit der Gesellschaft selbst. Mit besonderem Eifer machte man damals Stiftungen für Bildungszwecke; in diese Zeit fallen die Stiftungen Djemidofs für zukünftige Universitäten, die Stiftung des Adels von Charkof, die Stiftung des Grafen N. P. Rumjanzef. Die in der Gesellschaft erwachte Verehrung für Litteratur und Wissenschaft trug ihre Früchte. Den ersten Jahren des gegenwärtigen Jahrhunderts verdanken wir unsern unsterblichen Nationaldichter Puschkin, ihnen verdanken wir auch den genialen Mathematiker, dessen Gedächtniss heute gefeiert wird.

Aber, wenn auch auf junge, ins Leben eintretende Leute das Leben, das sie umgiebt, einen grossen Einfluss ausübt, so ist doch der Einfluss der Lehrer und der ersten Führer bei selbständigen geistigen Arbeiten nicht weniger wichtig und unmittelbar. Deshalb sind wir an dem Tage, wo wir Lobatschefskij ehren, verpflichtet, dankbar seiner Lehrer zu gedenken und vor allen der ehrwürdigen Gestalt des ersten Professors der reinen Mathematik an unsrer Universität, Bartels, dessen Schutz Lobatschefskij, der in seinen jungen Jahren hitzig, feurig und offenherzig war, auch ausserdem so viel verdankt.

Johann Martin Christian Bartels (geb. 1769) nimmt in der Geschichte der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts eine hervorragende Stelle ein. Ihm war es vergönnt, nicht nur Lobatschefskijs Lehrer zu sein, sondern auch der Lehrer und Beschützer dessen unter den Gelehrten des neunzehnten Jahrhunderts, der mehr als sonst irgend einer der Entwickelung der Mathematik sein Gepräge gegeben hat — Gauss. Um sein Brod zu verdienen, wurde der sechzehnjährige Bartels Gehülfe des Lehrers an einer Privatschule der Stadt Braunschweig, und gegen ein armseliges Entgelt schnitt

er den Schülern die Federn und half ihnen beim Schönschreiben. Unter der Zahl der Schüler befand sich der damals achtjährige Gauss, und die mathematischen Fähigkeiten des genialen Knaben zogen die Aufmerksamkeit des wissbegierigen Bartels auf sich. Trotz des Altersunterschiedes entsteht zwischen Bartels und Gauss eine enge Freundschaft; vereint studiren sie mathematische Werke, vereint lösen sie Aufgaben. Bartels gewährte mehrmals Gauss seinen Schutz, und Gauss achtete Bartels hoch wegen dessen 4 edlen, humanen Charakters, und bis in seine allerletzten Jahre war er ihm dankbar als einem alten Freunde. Bartels war auch selber ein vortrefflicher Mathematiker. Seine „Vorlesungen über mathematische Analysis", die er in Dorpat im Jahre 1833 herausgab, nehmen in der deutschen mathematischen Litteratur eine hervorragende Stelle ein, denn sie zeichnen sich durch Strenge der Beweise und durch Klarheit der Anordnung aus. Eine Ueberlieferung berichtet sogar, Laplace habe auf die Frage: „Wer ist der erste Mathematiker Deutschlands?" geantwortet: „Bartels, denn Gauss ist ja der erste Mathematiker der Welt."

Dank Bartels stand der Unterricht in der reinen Mathematik an der Universität Kasan mit einem Male auf derselben Höhe wie an den besten Universitäten Deutschlands. Alle klassischen Werke der damaligen Zeit: die Differential- und die Integralrechnung — von Euler, die analytische Mechanik — von Lagrange, die Anwendung der Analysis auf die Geometrie — von Monge, die Disquisitiones arithmeticae — von Gauss wurden von dem begabten und belesenen Bartels erläutert. In eignen Vorträgen las Bartels über die Geschichte der Mathematik und entwickelte vor seinen Zuhörern das grossartige Gemälde der Fortschritte des menschlichen Geistes auf diesem Gebiete.

Nachdem Lobatschefskij (am 10. Juli 1811) trotz „schlechten Betragens" den Magistergrad erhalten hatte, „auf Grund ausserordentlicher Fortschritte und ebensolcher Gaben in den mathematischen und physischen Wissenschaften" und auf Grund einer von ihm vorgelegten Arbeit: „Die Theorie der elliptischen Bewegung der Himmelskörper", beschäftigte er sich bei Bartels auf dessen Wohnung vier Stunden wöchentlich, indem er unter dessen Leitung die Disquisitiones arithmeticae und den ersten Band der Mechanik des Himmels von Laplace studirte.

Eins der Ergebnisse dieser Beschäftigungen war die Arbeit, die Lobatschefskij im Jahre 1813 unter dem Titel: „Ueber die Lösung der algebraischen Gleichung $x^n - 1 = 0$" vorlegte, sie behandelt die Frage nach der Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um Eins verminderte Grad durch vier theilbar ist.

Eine der Verpflichtungen, die Lobatschefskij als Magister hatte, war 5

die „Unterstützung von Bartels in dessen Eigenschaft als Professor der reinen Mathematik, zur Erzielung grösserer Fortschritte seiner Zuhörer, und schliesslich die Erklärung dessen, was sie nicht verstanden haben.“ Es ist klar, dass Lobatschefskij in den allernächsten Beziehungen zu Bartels gestanden haben muss.

In nicht weniger enger Gemeinschaft muss Lobatschefskij auch mit Bronner gestanden haben, dem Professor der Physik und Leiter des pädagogischen Instituts, in das die jungen Magister zu ihrer Weiterbildung eintreten mussten. Bronner, der viel erlebt und viel durchdacht hatte, erst Benediktinermönch, dann Angehöriger des Illuminatenordens, dann Idyllendichter, dann Mechaniker und Physiker, endlich Historiker und Statistiker des Kantons Aargau, in dem er sein stürmisches Leben beschloss, der sich bald von den Ideen Rousseaus und der französischen Revolution hinreissen liess, bald von Kants „Kritik der reinen Vernunft“, Bronner konnte bei seiner begabten Persönlichkeit nicht umhin, auf seine Schüler einen bezaubernden Einfluss auszuüben, und seine ausgedehnte philosophische Bildung trug unzweifelhaft viel zu der geistigen Entwickelung Lobatschefskijs und seiner Genossen bei.

Später als Bartels und Bronner, aber noch während der Studentenjahre Lobatschefskijs, kamen Renner und Littrow nach Kasan und waren seine Lehrer. Der ehemalige Privatdocent der Göttinger Universität, Caspar Friedrich Renner, ein vortrefflicher Mathematiker und Lateiner, erscheint in den auf uns gekommenen Erinnerungen von der anziehendsten Seite als ein Mann, auf den Puschkins Vers „von der durchaus göttingischen Seele“ [1]) vortrefflich passt. Littrow, der bekannte Astronom, ein hochgebildeter Mann, der von der Philosophie Schellings begeistert war, erhob den Unterricht in der Astronomie an unsrer Universität auf dieselbe Höhe, die der Unterricht in der Mathematik hatte. Unter seiner Anleitung führte Lobatschefskij zusammen mit seinem Kameraden, dem späteren bekannten Professor der Astronomie, J. M. Simonof, Beobachtungen des Kometen von 1811 aus, und die Mittheilung Littrows über diese Beobachtungen (Kasaner Nachrichten von 1811, Nr. 21) ist die erste gedruckte Mittheilung über die wissenschaftlichen Arbeiten Lobatschefskijs.

Die geistige Anregung dieses glänzenden Zeitraums, in den Lobat-
6 schefskijs Jugend fiel, die talentvollen Lehrer, die eifrig die jungen Gemüther für das Licht des Wissens und der Wahrheit erweckten, das war die geistige Atmosphäre, in der Lobatschefskij mit dem Idealismus der Anschauungen erfüllt wurde, den seine merkwürdige „Rede über die wichtigsten

1) [Jewgenij Onjegin, II. Gesang, Strophe 6.]

Gegenstände der Erziehung“ athmet, mit dem Durste nach mannigfaltigem Wissen, mit dieser Freiheit des Geistes, die nöthig war, um an der Wahrheit eines Axioms zu zweifeln, das im Laufe zweier Jahrtausende von allen anerkannt und durch die Autorität Euklids geheiligt war, mit dieser brennenden Liebe zur Wahrheit, die ihm erlaubte, ohne sich durch die Gleichgültigkeit oder den Spott seiner Zeitgenossen hemmen zu lassen, hartnäckig und beharrlich seine geliebten wissenschaftlichen Ideen zu verfolgen.

War Lobatschefskij vielleicht auch in diesem Punkte seinen hervorragenderen Lehrern, namentlich Bartels, verpflichtet? Verdankte er etwa diesem die Wahl des geliebten Gegenstandes seiner Arbeiten, der Frage nach den Grundlagen der Geometrie, die ihn berühmt machen sollte? Wahrscheinlich wird das immer ein Räthsel bleiben; aber, wie gross auch unsre patriotische Begeisterung für Lobatschefskij sein mag, die Liebe zur Wahrheit muss uns doch zwingen, an die Möglichkeit zu denken, dass Gauss durch die Vermittelung von Bartels Lobatschefskij beeinflusst haben kann.

Der grosse deutsche Mathematiker hatte schon 1816 und 1822 Besprechungen verschiedener Versuche, die Euklidische Forderung zu beweisen, veröffentlicht, und die Entschiedenheit, mit der er in diesen Besprechungen seiner Ueberzeugung Ausdruck verleiht, dass alle Versuche, die Lücke der Geometrie auszufüllen, die mit dieser Forderung zusammenhängt, vergeblich seien, erlaubt uns nicht, an der Richtigkeit der Behauptung zu zweifeln, die er im Jahre 1846 in seinem bekannten Briefe an Schumacher ausspricht, dass er nämlich schon 1792 zu der Ueberzeugung von der Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie gelangt sei. Die Zeit, in der sich diese Ansichten bei Gauss entwickelten, ist die Zeit seiner engen Freundschaft mit Bartels, die schon 1785 entstanden war, als Bartels sechzehn und Gauss acht Jahre alt war. Ihre unausgesetzten, persönlichen, freundschaftlichen Beziehungen wurden zwanzig Jahre hindurch fortgesetzt, bis 1807, wo Bartels nach Kasan übersiedelte. Mit Ausnahme einer kurzen Zwischenzeit lebten sie fast unzertrennlich in Braunschweig und bekamen beide ein Stipendium von dem Herzoge von Braunschweig, der die Absicht hatte, ein Observatorium zu erbauen, dessen Direktor Gauss werden sollte, und eine höhere mathematische Schule zu gründen, an der Gauss und Bartels Professoren werden sollten. Ihre Namen waren so sehr mit einander verbunden, dass beide gleichzeitig von Fuss, dem ständigen Secretär der Petersburger Akademie der Wissenschaften, Briefe erhielten, in denen Gauss die Direktorstelle der St. Petersburger Sternwarte und Bartels die Professur in Kasan angeboten wurde.

Man kann daher die Vermuthung nicht für zu gewagt halten, dass Gauss seine Gedanken über die Frage der Parallellinien seinem Lehrer

und Freund Bartels mitgetheilt habe.[1]) Konnte nicht andrerseits Bartels seinem wissbegierigen und talentvollen Kasaner Schüler etwas von den kühnen und interessanten Ansichten mittheilen, die Gauss über eine der Grundfragen der Geometrie gefasst hatte?

Aber selbst wenn wir diese Hypothese aussprechen, so müssen wir natürlich auch noch eine andre Erklärung dafür zu geben versuchen, dass Lobatschefskij bei der Frage über die Grundlagen der Geometrie und über die Parallellinien verweilte.

Auf der einen Seite hatte das Interesse an den Parallellinien, das ja auch schon bei den griechischen Mathematikern (Proklus und Ptolemäus) und bei den Arabern (Naṣîr-Eddîn), und vom 16. bis zum 18. Jahrhundert 8 in Europa (Clavius, Saccheri, [Lambert] und andere) vorhanden gewesen war, am Ende des vergangenen Jahrhunderts und beim Beginn des gegenwärtigen ganz besonders zugenommen. In dem einen Jahre 1786 zum Beispiel erschienen sieben Abhandlungen, die der Frage der Parallellinien gewidmet waren. Im Jahre 1794 erschien die erste Ausgabe des bekannten Lehrbuchs der Geometrie von dem berühmten französischen Mathematiker Legendre mit einem Beweise der Euklidischen Forderung, der auf das Gesetz der Homogeneität gegründet war. Mit diesem Beweise begann Legendre die Reihe seiner merkwürdigen Arbeiten über die Theorie der Parallellinien, zum Theil in den neuen, zahlreichen Ausgaben seines Lehrbuchs, zum Theil in besonderen Abhandlungen.[2]) Legendre, so kann man sagen, versucht von allen Seiten her zur Entscheidung der schwierigen Frage zu gelangen und verwendet die ganze Kraft seines Verstandes und seines Wissens darauf, einen einwandfreien Beweis der Euklidischen Forderung zu liefern.

Diese Arbeiten Legendres verstärkten ihrerseits das Interesse an der Theorie der Parallellinien. In den fünfundzwanzig Jahren, die dem Er-

---

1) Es ist ein Brief von Gauss auf uns gekommen, der an einen andern seiner Freunde und Studiengenossen gerichtet ist, an Wolfgang Bolyai, den Vater Johann Bolyais, des Verfassers der Abhandlung: Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens (1832), in der zwar nach Lobatschefskij aber von ihm unabhängig die Grundlagen einer Geometrie entwickelt sind, die nicht auf dem Euklidischen Axiome beruht. In diesem Briefe, der 1799 abgeschickt ist und der in einer Rede Prof. Scherings mitgetheilt wird (Gedächtnissrede zum 100jähr. Geburtstage von Gauss, S. 7 (1877)), schreibt Gauss: „Zum Beispiel, wenn man beweisen könnte, dass ein geradlinigtes Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegebene Fläche, so bin ich im Stande, die ganze Geometrie völlig streng zu beweisen. Die meisten würden nun wohl jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht“ u. s. w.

2) Nouvelle théorie des parallèles avec un appendice contenant la manière de perfectionner la théorie des parallèles. Paris 1803.

scheinen der ersten Arbeit Lobatschefskijs vorausgingen, verstrich kein Jahr, in dem nicht eine oder einige Abhandlungen über die Theorie der Parallellinien erschienen wären. Aus dem Zeitraume von 1813 bis 1827 kennt man allein in deutscher und in französischer Sprache gegen dreissig gegedruckte Abhandlungen. Einige von diesen Abhandlungen befinden sich seit Lobatschefskijs Zeiten auf unsrer Bibliothek und sind, wie deren Einlaufkatalog zeigt, von Lobatschefskij selbst angeschafft.[1])

Die Erfolglosigkeit aller dieser Versuche, die Euklidische Forderung zu beweisen, das heisst, sie auf die vorhergehenden Axiome, Forderungen und Erklärungen zurückzuführen, veranlasste Gauss 1816, seine Meinung in folgenden Worten gedruckt auszusprechen: „Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfange der Geometrie bei Begründung der Theorie 9 der Parallellinien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahren war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Geständniss scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitele Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen."

Diese Erfolglosigkeit aller früheren Versuche konnte auch unabhängig von dem Einflusse von Gauss und Bartels Lobatschefskij auf den Gedanken bringen, entsprechend der Geometrie, die auf die Euklidische Forderung begründet ist, ein andres geometrisches System zu studiren, das von dieser Forderung unabhängig ist. Der Lösung dieser Aufgabe, die Lobatschefskij so glänzend durchgeführt hat, war schon in der ersten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts der italienische gelehrte Jesuit Saccheri nahe gekommen.[2]) Fast gleichzeitig mit Lobatschefskij gelangte Johann Bolyai, 10

---

1) Hessling. Versuch einer Theorie der Parallellinien. Halle 1818. Lüdicke. Versuch einer neuen Theorie der Parallellinien, im Zusammenhange mit den Grundlehren der Geometrie dargestellt. Meissen 1819.

2) Ueber Saccheri, als einen Vorläufer Lobatschefskijs, siehe meinen Artikel in den „Mittheilungen der physisch-mathematischen Gesellschaft [zu Kasan]," Bd. 3, Heft 3. In der letzten Zeit sind die Mathematiker auf einige andre Abhandlungen aufmerksam geworden, in denen ebenfalls der Gedanke der Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie ausgesprochen ist. So stammt von Lambert, dem bekannten Philosophen und Mathematiker, eine Abhandlung: „Zur Theorie der Parallellinien", die 1786 in dem „Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik" erschien. In dieser Abhandlung, auf die zuerst von Stäckel wieder hingewiesen worden ist, macht Lambert zwar viele vergebliche Versuche, die

der Sohn Wolfgang Bolyais, des Studiengenossen und Freundes von Gauss, zur nichteuklidischen Geometrie.

Auf der andern Seite führte auch das philosophische Denken der damaligen Zeit zu der Frage nach dem Wesen und der Entstehung der geometrischen Axiome.

Die Zeit, in der Lobatschefskij mit jugendlichem Eifer und mit Ruhmbegierde seine selbständige, geistige Arbeit begann, war eine in der Geschichte des menschlichen Verstandes berühmte Zeit. Sie erscheint uns nach den beredten Worten von Helmholtz in seiner Rede „Die Thatsachen in der Wahrnehmung“, als eine Zeit, „reich an Gütern geistiger Art, an Begeisterung, an Energie, idealen Hoffnungen und schöpferischen Gedanken.“ Diese Zeit stellte die grundlegende Aufgabe jeder Wissenschaft, die Aufgabe der Erkenntnisstheorie: „Was ist Wahrheit? In wieweit entsprechen unsre Vorstellungen der Wirklichkeit?“ Zur scharfen Formulirung dieser Aufgabe hat besonders Kant beigetragen, namentlich seine „Kritik der reinen Vernunft“ und die darin enthaltene Lehre vom Raume.

Der grosse Königsberger Philosoph hat die Frage nach dem Wesen des Raumes im Laufe seines Lebens mehrere Male und auf verschiedene Weisen beantwortet. In seiner ersten darauf bezüglichen Arbeit: „Gedanken über die wahre Schätzung der lebendigen Kräfte“ (1746) wirft der zwanzigjährige Kant mit jugendlicher Kühnheit die Frage auf nach dem Grunde der drei Ausdehnungen des Raumes und erblickt diesen Grund darin, dass die Seele ihre Eindrücke gemäss dem von Newton entdeckten Gesetze der Anziehung empfängt, also umgekehrt proportional dem Quadrate des Ab-

---

Euklidische Forderung zu beweisen, behandelt aber andrerseits auch die beiden Möglichkeiten, dass die Winkelsumme im Dreieck grösser oder kleiner als zwei Rechte ist. Er bemerkt, dass die erste Möglichkeit auf der Kugel verwirklicht ist, und spricht die Vermuthung aus, dass die andre auf einer imaginären Kugel stattfinde. Er hat auch erkannt, dass es, sobald eine von beiden Möglichkeiten stattfindet, für die Längen ein absolutes Mass giebt. Ueberdies ist er selber offenbar von seinen Versuchen, die Euklidische Forderung zu beweisen, unbefriedigt gewesen, sonst hätte er die Arbeit wohl noch bei seinen Lebzeiten veröffentlicht.

In seiner „Theorie der Parallellinien“ (1825) sagt Taurinus: „Die Idee einer Geometrie, in welcher die Summe der Dreieckswinkel kleiner als zwei Rechte wäre, ist mir schon vor vier Jahren mitgetheilt worden (von meinem Oheim, Prof. S. in K., damals noch in M.); ich habe mich aber nicht damit befreunden können und kann es jetzt noch viel weniger.“ Nach der sehr wahrscheinlichen Vermuthung G. S. Semikolefs, des Verfassers der „Studien über die Lobatschefskijsche Geometrie“ meint er damit Professor Schweikart, den Gauss in seinem bekannten Briefe an Schumacher erwähnt (s. „Ueber die Grundlagen der Geometrie“, Veröffentlichung der physisch-mathematischen Gesellschaft. Kasan 1893, S. IX).

standes. Später zu der Zeit, wo er, noch unter dem Einflusse Newtons stehend, seine „Allgemeine Naturgeschichte des Himmels" schrieb, theilte er auch die Ansicht Newtons über den Raum, als etwas objektiv Vorhandenes, was allen Dingen vorausgeht, indem es ihr Behälter ist, und in der für die Geometer so interessanten Arbeit: „Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume" (1768) benutzt er das Vorhandensein der Paare von symmetrischen Körpern, um zu zeigen, dass der absolute Raum seine selbständige Realität besitzt, nicht nur unabhängig von dem Vorhandensein jeder Materie, sondern sogar als eine nothwendige Bedingung für deren Vorhandensein. Aber schon zwei Jahre später, in der Abhandlung: „De mundi sensibilis atque intelligibilis forma atque principiis" (1770) entwickelt Kant seine Lehre vom Raume als etwas Apriorischem, was aller Erfahrung vorausgeht, einer völlig subjektiven Form unsrer Anschauung, eine Lehre, die auch eine der wichtigsten Theorien der „Kritik der reinen Vernunft" (1781) bildet. Für diese Kantische Lehre besitzt seine Ansicht über die geometrischen Axiome entscheidende Bedeutung. Kant stützt sich auf die augenscheinliche Thatsache, dass diese geometrischen Axiome uns als nothwendig wahr erscheinen, und dass wir uns sogar keinen Raum vorstellen können, der nicht die Eigenschaften besitzt, die in diesen Axiomen zum Ausdruck kommen, und er benutzt diese Thatsache, um zu zeigen, dass die Axiome früher gegeben sind als jede Erfahrung; deshalb ist auch der Raum eine transscendente, von der Erfahrung unabhängige Form der Anschauung. 11

Kants Lehre, die den Lehren Lockes, Condillacs und andrer Sensualisten gerade entgegengesetzt war, fand zahlreiche Gegner.[1])

Gauss, zum Beispiel, sprach sich mehrmals gegen die Lehre Kants aus und erklärte: „Nach meiner innigsten Ueberzeugung hat die Raumlehre zu unserm Wissen a priori eine ganz andere Stellung wie die reine Grössenlehre; es geht unserer Kenntniss von jener durchaus diejenige vollständige Ueberzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letzteren eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben, dass wenn die Zahl bloss unseres Geistes Product ist, der Raum auch ausser unserm Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können.[2]) 12

---

1) Als einer dieser Gegner erwies sich zum Beispiel Adam Weishaupt, der bekannte Begründer des Illuminatenordens, in seinem Schriftchen: „Zweifel über die Kantischen Begriffe von Zeit und Raum. Nürnberg 1788." Ueber Weishaupt siehe mein Schriftchen: „Bronner und Lobatschefskij. Zwei Episoden aus dem Leben der ersten Professoren an der Universität Kasan." Kasan 1893.

2) Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel. Leipzig 1880, S. 497.

In den ersten Studentenjahren Lobatschefskijs trat in Russland ein andrer Gegner der Kantischen Lehre vom Raume auf, ein begabter russischer Mathematiker aus dem Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts, Timofej Ossipofskij, Professor an der Universität Charkof, der Uebersetzer von Condillacs Logik. Er that das in der Rede: „Ueber Raum und Zeit.“[1]) In seiner Kritik stellt sich Ossipofskij auf den sensualistischen Standpunkt und spricht sich kategorisch für die Objektivität des Raumes aus. „Raum und Zeit sind die Bedingungen für das Dasein der Dinge und existiren in der Natur selbst und an und für sich, nicht aber bloss in unsrer Vorstellung. Der Begriff des Raumes entsteht durch die Eindrücke, die von ihm durch Vermittelung unsrer äusseren Sinne zu unsern inneren Sinnen gelangen.“

Es ist kaum möglich anzunehmen, dass der vielseitig gebildete Lobatschefskij gegenüber diesen die Geister der damaligen Zeit bewegenden Fragen theilnahmlos geblieben sein sollte. Auch hat Lobatschefskij durch seine geometrischen Untersuchungen, indem er die Möglichkeit einer streng logischen nichteuklidischen Geometrie nachwies, ein gewichtiges Wort zu der von Kant erhobenen Frage gesprochen. Auf die Lösung, die in der Kritik der reinen Vernunft gegeben worden war, antwortet Lobatschefskij
13 damit, dass er eine der nothwendigen Wahrheiten der Geometrie — die Euklidische Forderung — als ein physisches Gesetz anerkennt, das heisst als etwas durch die Erfahrung Gegebenes, und dass er in astronomischen Beobachtungen die Antwort auf die Frage nach der Wahrheit dieser Forderung sucht.

Am allerklarsten hat Lobatschefskij seinen genialen Gedanken auf der ersten Seite seiner „Neuen Anfangsgründe der Geometrie“ formulirt, in den Worten: „Den geometrischen Begriffen selbst ist noch nicht die Wahrheit eigen, die man hat beweisen wollen und die ebenso wie andre physische Gesetze nur durch die Erfahrung bestätigt werden kann, also zum Beispiel durch astronomische Beobachtungen.“ Dieser Gedanke steht in geradem Widerspruche zu der Meinung, nach der unser Wissen vom Raume ein absolutes Wissen ist, das zu prüfen und mit der Erfahrung zu vergleichen durchaus nicht nöthig erscheint.

Dieser Lehre von dem absoluten Wissen vom Raume, die einen der Ecksteine der „Kritik der reinen Vernunft“ bildet, hat Lobatschefskij einen vernichtenden Schlag versetzt. Vor Lobatschefskij war es möglich zu behaupten, dass wir, während wir von dem Wesen der Erscheinungen, die in

---

1) Reden, gehalten in der feierlichen Versammlung der Universität Charkof, am 30. August 1807.

der Welt vorgehen, nichts wissen und nur die Phänomene sehen, aber die „Dinge an sich“ nicht kennen, doch wenigstens in der Geometrie ein absolutes Wissen vom Raume haben, dass dieser überall dieselben Eigenschaften besitzt, hier sowie in ungeheuer grossen Entfernungen, heute sowie gestern und morgen. Nach Lobatschefskij gelten für den Geometer der Gegenwart die von Euklid behandelte Raumform, die von Lobatschefskij behandelte Raumform und die nach Riemann benannte Raumform alle drei als gleich logisch möglich und er kann nicht behaupten, dass er die Eigenschaften des Raumes in ungeheuer grossen Entfernungen von uns kennt; er kann nicht behaupten, darüber etwas zu wissen, welche Eigenschaften der Raum gehabt hat und welche er haben wird.[1])

Aehnlich wie nach den Entdeckungen des Kopernikus, so hat sich auch nach den Untersuchungen Lobatschefskijs der geistige Horizont der Menschheit ausserordentlich erweitert. Die Menschen, die geglaubt hatten, einen absoluten Begriff von dem Weltgebäude zu haben, in dessen Mitte sich die Erde befinde, die von concentrischen Krystallsphären umgeben sei, — nach Kopernikus erkannten sie plötzlich, dass sie auf einem nichtigen Sandkörnchen in einem Meere von Welten lebten. Giebt es eine Gränze für dieses Meer und worin besteht sie? Das sind die Fragen, zu denen das Kopernikanische System führte. Die Untersuchungen Lobatschefskijs führten zu einer naturphilosophischen Frage von nicht geringerer Wichtigkeit, zu einer Frage über die Eigenschaften des Raumes; sind diese Eigenschaften genau dieselben hier bei uns und in jenen entlegenen Welten, von denen das Licht erst in hunderttausenden, ja Millionen von Jahren zu uns gelangt? sind diese Eigenschaften jetzt dieselben, die sie waren, als sich das Sonnensystem aus einem Nebelflecke bildete, und die sie sein werden, wenn sich die Welt dem Zustande der überall gleichmässig vertheilten Energie nähern wird, in dem die Physiker die Zukunft der Welt erblicken? Hierin besteht die Parallele zwischen Kopernikus und Lobatschefskij, die zum ersten Male von Clifford in seiner „Philosophy of the pure sciences[2]) durchgeführt worden ist. Die Benennung „Kopernikus der Geometrie“, die für ein slavisches Herz doppelt schmeichelhaft ist, wendet zum Beispiel der hoch bejahrte englische Mathematiker Sylvester auf Lobatschefskij an.[3])

14

Indem er die Relativität unsrer Kenntnisse von dem Raume behauptet,

---

1) W. K. Clifford, Lectures and Essays, S. 213.

2) Lectures and Essays. Second edition. London 1886, S. 180—243.

3) „I cordially join with you in the hope that our english mathematicians may not be wanting in the manifestation of a honor due to your illustrious compatriot, »the Copernicus of geometry«.“ (Aus einem Briefe Prof. Sylvesters an den Verfasser der Rede.)

zeigt Lobatschefskij zugleich den Weg, auf dem wir unsre Kenntniss von diesem erwerben und erweitern müssen. Dieser Weg ist der der Erfahrung. In dieser Beziehung erscheint Lobatschefskij als Fortsetzer der Arbeit der grossen Gelehrten und Philosophen: Bacon, Descartes, Galilei und Newton, die, auf apriorische Betrachtungen verzichtend, die Natur zu fragen begannen, in dem Bewusstsein, dass diese, wie Lobatschefskij sagt, 15 unabänderliche und befriedigende Antworten auf die Fragen giebt.[1]) Die Untersuchungen Lobatschefskijs beleuchten den Gedanken über die Geometrie, den Newton in der Vorrede zu seinen Principien hingeworfen hat, sie sei ein Theil der Mechanik, der sich auf die mechanischen Wirkungen gründet, die bei Messungen nöthig sind: „Fundatur igitur geometria in praxi Mechanica, et nihil aliud est quam Mechanicae universalis pars illa quae artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat.“

In seiner ganzen wissenschaftlichen Thätigkeit zeigt sich Lobatschefskij als ein hervorragender Vertreter des klaren russischen Verstandes, der nach Klarheit strebt und der den unsichern Weisungen des innern Gefühls und den metaphysischen Spekulationen die auf Erfahrung gegründete wissenschaftliche Wahrheit vorzieht. Oefters spricht Lobatschefskij seine gesunden Ansichten über die Naturphilosophie aus. „In der Natur“, sagt er, „erkennen wir eigentlich nur die Bewegung, ohne die Sinneseindrücke nicht möglich sind. Alle übrigen Begriffe, zum Beispiel die geometrischen, sind künstlich von unserm Verstande erzeugt, indem sie aus den Eigenschaften der Bewegung abgeleitet sind, und deshalb ist der Raum an und für sich, abgesondert[2]), für uns nicht vorhanden.“ (Neue Anfangsgründe der Geometrie. Vollständige Sammlung der geometrischen Abhandlungen Lobatschefskijs. Bd. I, S. 227.)

„Ohne Zweifel werden immer die Begriffe zuerst gegeben sein, die wir in der Natur vermittelst unsrer Sinne erwerben. Der Verstand kann und muss sie auf die kleinste Zahl zurückführen, damit sie dadurch der Wissenschaft als feste Grundlage dienen können.“ (Neue Anfangsgründe der Geometrie; a. a. O. S. 231.)

Seiner hohen Achtung vor der Erfahrung hat Lobatschefskij in seiner merkwürdigen Rede „Ueber die wichtigsten Gegenstände der Erziehung“

---

1) Rede über die wichtigsten Gegenstände der Erziehung. (Kasaner Bote.)

2) Mir scheint, dass das Wort abgesondert in dem Sinne: unabhängig von Bewegung und Messung zu verstehen ist. Die Frage nach den Eigenschaften des Raumes erscheint auf diese Weise als gleichbedeutend mit der Frage nach den Methoden zur Messung. Dieser Gedanke liegt den Ansichten Cayleys und F. Kleins über die Lobatschefskijsche Geometrie zu Grunde, von denen später gesprochen werden wird.

Ausdruck verliehen: „Die Mathematiker haben direkte Hülfsmittel zur Erwerbung von Kenntnissen eröffnet. Es ist noch nicht lange her, dass wir diese Hülfsmittel benutzen. Der berühmte Bacon hat sie uns gezeigt. 16 „Hört auf," sagte er, „unnütz zu arbeiten und euch zu bemühen, alle Weisheit aus der Vernunft abzuleiten; befragt die Natur, sie bewahrt alle Wahrheiten und auf eure Fragen wird sie euch entschieden und befriedigend antworten." Schliesslich hat der Genius Descartes diese glückliche Veränderung hervorgerufen und, Dank seinen Gaben, leben wir bereits in Zeiten, wo kaum noch ein Schatten der alten Scholastik auf den Universitäten umgeht."

Aus dem Gesagten geht klar hervor, dass der Gedanke Lobatschefskijs, eine jener Forderungen Euklids, die Kant für eine nothwendige Wahrheit gehalten hatte, zu verwerfen, die Möglichkeit eines logischen Gebäudes der Geometrie, auch ohne diese Forderung, darzuthun und damit zugleich die Vergeblichkeit aller Anstrengungen sie zu beweisen, dass dieser Gedanke nicht der Einfall eines eigensinnigen nach Originalität strebenden Kopfes war, wie die Mehrzahl der Mathematiker seiner Zeit gedacht hat. Die Aufgabe, die Lobatschefskij löste, war eine Aufgabe, die sowohl die Mathematik als die Philosophie seiner Zeit der Reihe nach gestellt hatten, aber um diese Aufgabe zu erkennen, dazu gehörte die Genialität eines Gauss und eines Lobatschefskij, um sie zum Abschluss zu bringen, dazu gehörten die Beharrlichkeit und Arbeitsamkeit des letzteren. Für uns wird es immer ein Gegenstand andächtiger Bewunderung und hohen patriotischen Stolzes bleiben, dass diese Aufgabe, die durch die geistige Bewegung der hervorragendsten Nationen Europas gestellt worden war, ein Gelehrter gelöst hat, der in Kasan lebte, weit entfernt von den Centren des geistigen Lebens, der niemals Russland verlassen hat und der mit den Denkern und Geometern des westlichen Europas gar nicht in lebhaftem unmittelbarem Verkehre stand.

Die Musse zum Arbeiten, zur zusammenhängenden Entwickelung einer von Euklids Forderung unabhängigen Geometrie, jener Geometrie, die jetzt den Namen Lobatschefskijs trägt, gewährte Lobatschefskij der Zeitraum in der Geschichte der Universität Kasan, der mit dem Namen Magnizkij verknüpft ist. Dieser Zeitraum war für streng wissenschaftliche Arbeiten nicht günstig. Aber in dieser Zeit, wo sich Lobatschefskijs Kollege auf dem Katheder, der Professor Nikolskij, der herrschenden Richtung unterwarf, indem er in seiner Rede „Ueber den Nutzen der Mathematik" nach mystischen Deutungen der mathematischen Wahrheiten strebte, trachtet 17 Lobatschefskij in Bemühungen, die einzig und allein die wissenschaftliche Wahrheit im Auge hatten, danach, sich über die schwer lastende Gegenwart zu beruhigen und diese zu vergessen.

Im Archiv der Universität Kasan hat man ein interessantes Aktenstück gefunden, aus dem hervorgeht, dass die Arbeiten Lobatschefskijs an der systematischen Entwickelung der Geometrie bereits vor dem Jahre 1823 begonnen haben. In diesem Jahre überreichte er Magnizkij ein von ihm verfasstes Lehrbuch der Geometrie, damit es auf öffentliche Kosten als ein „klassisches" Buch gedruckt werden sollte. Magnizkij übersandte das Buch dem Akademiker Nik. Fuss, der sich über die Arbeit sehr streng aussprach und fand, „dass der Verfasser, wenn er glaubt, sie könne als Lehrbuch dienen, dadurch zeigt, dass er keinen rechten Begriff von den Erfordernissen eines Lehrbuchs hat, das heisst, keinen Begriff von der Fülle der geometrischen Wahrheiten, die den Inbegriff eines Elementarkursus der Wissenschaft bilden, von der mathematischen Methode, von der Nothwendigkeit scharfer und deutlicher Erklärungen aller Begriffe, von der logischen Ordnung und der methodischen Vertheilung des Stoffs, von der gehörigen Aufeinanderfolge der geometrischen Wahrheiten, von der unerlässlichen und möglichst rein geometrischen Strenge ihrer Beweise. Von allen diesen nothwendigen Eigenschaften ist in der Geometrie, die ich durchgesehen habe, auch nicht eine Spur."

Aber besonders empört ist Fuss, in Uebereinstimmung mit dem Geiste der Zeit und mit seinem Korrespondenten, darüber, dass der Verfasser das französische Meter bei der Ausmessung gerader Linien als Einheit benutzt und ausserdem unter der Benennung Grad den hundertsten Theil des Viertelkreises als Einheit bei der Ausmessung des Kreisbogens. „Bekanntlich", schreibt Fuss, „ist diese Eintheilung in der Zeit der französischen Revolution erdacht worden, als die Wuth der Nation, Alles früher dagewesene zu vernichten, sich sogar auf den Kalender und die Eintheilung des Kreises erstreckte. Aber diese Neuerung ist nirgends angenommen worden und in Frankreich selbst schon längst wieder aufgehoben in Folge augenscheinlicher Unzuträglichkeiten."

Fuss, der in seiner Antwort so schonungslos verfuhr, konnte nicht voraussehen, dass nach siebzig Jahren die Mathematiker nicht bloss Russ-
18 lands, sondern der ganzen Welt für den ersten Versuch Lobatschefskijs zur Entwickelung der Geometrie das lebhafteste Interesse haben würden. Leider ist diese interessante Handschrift verloren.

Aus dem Briefe von Fuss geht nicht hervor, dass Lobatschefskij in seinem Lehrbuche originelle Ansichten über die Theorie der Parallellinien entwickelt hatte; aber es ist wohl unzweifelhaft, dass Lobatschefskij bereits vor dem Jahre 1823 begonnen hat, sich mit der Geometrie zu beschäftigen. Wahrscheinlich hat Lobatschefskij bald nach der Ueberreichung seines Lehrbuchs der Geometrie, die mit einem Misserfolg endete, sein System

der Geometrie ausgearbeitet, aber mit der Veröffentlichung wartete er einige Zeit. Es scheint kein zufälliges Zusammentreffen zu sein, dass am 8. Februar 1826 der Generalmajor Sheltuchin die Revision der Universität Kasan begann, die unter dem Vorwande einer „Erneuerung“ in vollständige Zerrüttung gebracht worden war, und dass nach Verlauf dreier Tage am 11. Februar 1826 die physisch-mathematische Abtheilung die von Lobatschefskij vorgelegte Schrift: „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles“ einer Prüfung unterzog.

Die Revision Sheltuchins hatte die Entfernung Magnizkijs zur Folge. Für die Universität Kasan begann damit eine andere, lichtere Zeit, wo man Männer brauchte, die der Wissenschaft ergeben waren und die Universität lieb hatten. Das Vertrauen der Kollegen richtet sich auf Lobatschefskij und vom 3. Mai 1827 an nimmt dieser neunzehn Jahre hindurch die erste Stelle an der Universität Kasan ein und dient ihr uneigennützig und unermüdlich.

Der junge Rektor (Lobatschefskij war beim Antritt nur dreiunddreissig Jahre alt) benutzt die erste günstige Gelegenheit, um offen seine Ansichten über die Erziehung der Jugend und über die Ziele der Universität zu zeigen, Ansichten gerade entgegengesetzt denen, die während einer Reihe von Jahren an dieser herrschend gewesen waren, und in der feierlichen Versammlung des 5. Juli 1828 hielt er seine merkwürdige Rede: „Ueber die wichtigsten Gegenstände der Erziehung,“ auf die ich mir jetzt erlaube Ihre Aufmerksamkeit hinzulenken.

Die Rede beginnt mit einem Hinweise auf die Bedeutung der Erziehung. 19

„Ich stelle mir vor, in welchem Zustande sich ein Mensch befinden muss, der der menschlichen Gesellschaft entfremdet, ganz dem Ermessen der wilden Natur überlassen ist. Sodann richte ich meine Gedanken auf einen Menschen, der inmitten der wohlgeordneten, gebildeten Bürgerschaft des letzten aufgeklärten Jahrhunderts durch tiefe Kenntnisse seinem Vaterlande zur Ehre und zum Ruhme gereicht. Welcher Unterschied! Welcher unermessliche Abstand trennt den einen vom andern. Diesen Unterschied hat die Erziehung hervorgebracht. Sie beginnt von der Wiege an; zuerst wird sie durch die blosse Nachahmung erworben, allmählich entwickeln sich Verstand, Gedächtniss, Einbildungskraft, Geschmack für das Schöne, es erwacht die Liebe zu sich selbst und zum Nächsten, die Liebe zum Ruhme, der Sinn für die Ehre, der Wunsch das Leben zu geniessen. Alle Fähigkeiten des Verstandes, alle Gaben, alle Leidenschaften, Alles das verwerthet die Erziehung und stellt es in den Dienst eines wohlgeordneten Ganzen,

und der Mensch, als wäre er von Neuem geboren, zeigt sich als das Geschöpf in seiner Vollkommenheit." Aber die Erziehung darf die Leidenschaften des Menschen und die ihm angebornen Begierden nicht unterdrücken und ausrotten. „Alles das muss bei ihm erhalten bleiben: sonst würden wir seine Natur verderben, ihr Gewalt anthun und sein Glück schädigen." „Es ist nichts gewöhnlicher, als über die Leidenschaften klagen zu hören, aber wie richtig hat Mably[1]) gesagt: je stärker die Leidenschaften, um so nützlicher sind sie für die Gesellschaft; schädlich sein kann nur ihre Richtung."

„Aber die blosse Verstandesbildung ist noch nicht der Abschluss der Erziehung. Während der Mensch seinen Verstand mit Kenntnissen bereichert, muss er auch noch verstehen lernen, das Leben zu geniessen. Ich meine damit die Bildung des Geschmacks. Leben heisst: empfinden — das Leben geniessen: unaufhörlich etwas Neues empfinden, was uns daran erinnert, dass wir leben. . . . Nichts hemmt den Strom des Lebens so sehr wie die Unwissenheit; wie ein verödeter, geradliniger Weg begleitet sie das Leben von der Wiege bis zum Grabe. In den niederen Klassen erquicken noch die anstrengenden Arbeiten für des Lebens Nothdurft abwechselnd mit der Erholung den Geist des Landmannes, des Handwerkers. 20 Ihr aber, deren Dasein ein ungerechtes Schicksal andern als eine schwere Last auferlegt hat, ihr, deren Geist abgestumpft, deren Gefühl erstickt ist, ihr geniesst das Leben nicht. Für euch ist die Natur todt, die Schönheiten der Poesie fremd, die Baukunst ihrer Reize und ihrer Herrlichkeiten entblösst, die Weltgeschichte gleichgültig. Ich tröste mich mit dem Gedanken, dass aus unsrer Universität derartige Erzeugnisse vegetabilischer Natur nicht hervorgehen werden; sie werden nicht einmal hierher kommen, wenn sie unglücklicherweise zu einem solchen Schicksal geboren sind. Sie werden nicht herkommen, wiederhole ich, denn hier weilt die Liebe zum Ruhme, das Gefühl für Ehre und inneres Verdienst."

„Die Natur, die den Menschen bei seiner Geburt so freigebig beschenkt hat, scheint noch nicht zufrieden gewesen zu sein und so hat sie einem jeden den Wunsch eingeflösst, die andern zu übertreffen, bekannt zu sein, ein Gegenstand der Bewunderung zu sein, berühmt zu werden, und auf diese Art hat sie dem Menschen die Pflicht auferlegt, selbst für seine Vervollkommnung zu sorgen. In unaufhörlicher Thätigkeit strebt der Geist, Ehrenbezeugungen zu erringen, sich emporzuheben und das ganze Menschengeschlecht schreitet von Vervollkommnung zu Vervollkommnung — und wo ist ein Ende abzusehen?"

---

1) [Gabriel Bonnot de Mably (1709—1785), französischer Philosoph, Condillacs Bruder.]

„Wir wollen das Leben hochschätzen, solange es seine Würde nicht verliert. Mögen Vorbilder in der Geschichte, der wahre Begriff von der Ehre, Liebe zum Vaterlande, die in jungen Jahren erweckt ist, bei Zeiten den Leidenschaften die edle Richtung und die Kraft geben, die uns erlauben, über die Schrecken des Todes zu siegen."

Indem er sich zur Moral als dem wichtigsten Gegenstande der Erziehung wendet, verweilt Lobatschefskij besonders bei der Liebe zum Nächsten. „Duclos, Rochefoucauld, Knigge haben erklärt, auf welche Weise die Selbstliebe die versteckte Triebfeder aller Handlungen der Menschen in der Gesellschaft zu sein pflegt. Wer, frage ich, hat vollständig darzulegen verstanden, welche Pflichten aus der Liebe zum Nächsten entspringen?"[1])

Die ganze Rede, aus der ich Bruchstücke angeführt habe, athmet, wie man sieht, feurigen Idealismus, Liebe zur Universität, Ehrfurcht vor der menschlichen Natur, vor der menschlichen Vernunft, vor der menschlichen Würde. 21

Den schönen Worten der Rede entsprach auch ein schönes Leben, ganz erfüllt von der Arbeit für die Entwickelung der Wissenschaft, für das Wohl der heimischen Universität. Als das werthvollste Ergebniss dieses Lebens erschienen die geometrischen Untersuchungen, von deren Bedeutung für Mathematik und Naturphilosophie schon die Rede war. Aber unser grosser Geometer war nicht ausschliesslich Geometer, wie es Steiner oder Staudt waren, und seine Arbeiten in der Algebra und Analysis haben ebenfalls nicht geringes Interesse. Vorhin ist erwähnt worden, dass sich Lobatschefskij unter der Anleitung von Bartels mit dem Studium des berühmten Gaussschen Werkes: „Disquisitiones arithmeticae" beschäftigt hatte. In diesem Werke macht Gauss, um seine Untersuchungen über die Zahlentheorie zu krönen, eine merkwürdige Anwendung von ihnen. Die alten Geometer hatten die bekannten Konstruktionen für das regelmässige Dreieck, Sechseck, Zehneck gegeben, mit Hülfe von Zirkel und Lineal. Gauss zeigte, dass es eine unendliche Menge andrer regelmässiger Vielecke giebt, die ebenfalls mit Hülfe von Zirkel und Lineal konstruirt werden können.

Die erste Arbeit Lobatschefskijs, die er 1813 der physisch-mathematischen Abtheilung vorlegte: „Ueber Auflösung der algebraischen Gleichung $x^n - 1 = 0$", bezog sich ausdrücklich auf diese Frage. Später kam Lobatschefskij auf dieselbe Frage zurück in dem Aufsatze: „Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um Eins verminderte

---

1) In meinem vorhin erwähnten Schriftchen: „Bronner und Lobatschefskij" habe ich als eine Vermuthung den Gedanken ausgesprochen, dass Lobatschefskij seine moral-philosophischen Ansichten wesentlich dem Einflusse seines Lehrers Bronner verdankt.

Grad durch 8 theilbar ist“ und fügte zu der Theorie von Gauss eine wichtige Ergänzung hinzu.

Schon Ende der zwanziger Jahre, so muss man annehmen, dachte Lobatschefskij daran, ein Lehrbuch der Algebra für Gymnasien zu schreiben. Später führte er diese Absicht aus und entschloss sich, einen Leitfaden für Lehrer und ein Lehrbuch für Hörer an der Universität abzufassen. Ein solches Buch gab er in der That 1834 heraus unter dem Titel: „Die 22 Algebra oder die Rechnung des Endlichen.“ Das Lehrbuch Lobatschefskijs unterscheidet sich vortheilhaft von den gleichzeitigen Lehrbüchern der Algebra, nicht nur von den russischen sondern auch von den ausländischen, und zwar durch seine systematische Anordnung und durch die Strenge in der Erklärung der Grundbegriffe. „In allen Zweigen der mathematischen Wissenschaften,“ so schreibt er im Vorwort, „erwirbt man die ersten Begriffe leicht, aber immer mit Mängeln behaftet. Schliesslich muss man aber einmal wieder zu den Grundlagen zurückkehren und dann ist es angebracht, auf vollkommene Strenge Gewicht zu legen.“ Nach der Ansicht Lobatschefskijs „beginnt erst in der Algebra die Mathematik mit der ganzen Schärfe der Begriffe und mit der ganzen Weite des Gesichtskreises; während die Arithmetik bloss den Anfang bildet und nur zur Vorbereitung und zur Uebung dient.“ Deshalb beginnt Lobatschefskij seine Algebra von den ersten Begriffen der Arithmetik aus, von den Grundgesetzen der arithmetischen Operationen und giebt eine systematische Entwickelung der Wahrheiten der reinen Mathematik. Er zeigt sich dabei als ein würdiger Vorgänger des grossen Systematikers der Mathematik unsrer Zeit, des deutschen Gelehrten Weierstrass. Als ein charakteristischer Zug der Algebra Lobatschefskijs erscheint auch ihre bemerkenswerthe Reichhaltigkeit. So bringt Lobatschefskij in der Algebra zum Beispiel die Lehre von den trigonometrischen Funktionen, indem er für diese Funktionen eine rein analytische Erklärung giebt; in dieser Beziehung hat sein Lehrbuch den Vorzug sogar von den klassischen Werken Eulers: „Introductio in Analysin infinitorum,“ und Cauchys: „Analyse algébrique.“ In seinem Lehrbuche setzt Lobatschefskij unter Anderm auch seine eigenthümliche Methode auseinander, das Verschwinden oder die Konvergenz unendlicher Reihen festzustellen. Diese Methode entwickelte er später in den Abhandlungen:

1) Ueber das Verschwinden trigonometrischer Reihen (Gelehrte Schriften der Kaiserlichen Universität Kasan für 1834).

2) Eine Methode, das Verschwinden unendlicher Reihen festzustellen und sich dem Werthe von Funktionen sehr grosser Zahlen zu nähern (Gelehrte Schriften für 1835).

3) Ueber die Konvergenz der unendlichen Reihen. [Deutsch, Kasan 1841.]

Schon in der ersten dieser Abhandlungen berührt Lobatschefskij die 23 grundlegende Frage der Differentialrechnung, die Frage nach der Beziehung zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit, und eilt hier ebenso wie bei der Frage über die Grundlagen der Geometrie seinen Zeitgenossen um ein halbes Jahrhundert voraus. Die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts hatten die Frage nach der Beziehung zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit nicht berührt, weil sie stillschweigend voraussetzten, dass jede stetige Funktion von selber auch eine Ableitung besitze. Ampère hatte versucht, diese Eigenschaft zu beweisen, aber sein Beweis zeichnet sich nicht durch Strenge aus. Die Frage nach der Beziehung zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit zog in den siebziger Jahren die Aufmerksamkeit auf sich, als Weierstrass ein Beispiel einer Funktion gab, die in einem bestimmten Intervalle stetig war und zu gleicher Zeit in diesem Intervalle keine bestimmte Ableitung hatte (nicht differentiirbar war). Indessen hatte Lobatschefskij schon in den dreissiger Jahren auf die Nothwendigkeit hingewiesen, zwischen „allmählicher Aenderung“ (nach unsrer Ausdrucksweise: Stetigkeit) und zwischen „Ununterbrochenheit“ (jetzt: Differentiirbarkeit) der Funktionen zu unterscheiden. Besonders scharf spricht er diesen Unterschied aus in seiner „Methode, das Verschwinden unendlicher Reihen festzustellen u. s. w.“ „Eine Funktion ändert sich allmählich, wenn ihre Zuwachse zugleich mit den Zuwachsen der Veränderlichen zur Null herabsinken. Eine Funktion ist ununterbrochen, wenn das Verhältniss zweier solcher Zuwachse bei deren Verkleinerung unmerklich in eine neue Funktion übergeht, die mithin der Differentialquotient sein wird. Die Integrale müssen immer derart in Intervalle zerlegt werden, dass die Elemente unter jedem Integralzeichen sich immer allmählich ändern und ununterbrochen bleiben.“

Ausführlicher geht Lobatschefskij auf diese Frage ein in der Arbeit „Ueber das Verschwinden trigonometrischer Reihen“, in der auch sehr interessante allgemeine Betrachtungen über Funktionen enthalten sind. „Wie es scheint,“ so schreibt er, „sind das zwei Wahrheiten, an denen man nicht zweifeln kann, dass sich nämlich Alles in der Welt durch Zahlen darstellen lässt und dass jede Veränderung und Beziehung darin durch eine analytische Funktion dargestellt wird. Indessen erlaubt eine weite Auffassung der Theorie das Bestehen einer Abhängigkeit nur in dem Sinne, 24 dass man die Zahlen, mit einander verbunden, als zusammen gegeben annimmt. In seiner Funktionenrechnung (Calcul des functions), durch die er die Differentialrechnung ersetzen wollte, hat Lagrange die Allgemeinheit der Begriffe in demselben Maasse beeinträchtigt, in dem er an Strenge der Behandlung zu gewinnen dachte.“ (Gelehrte Schriften der Universität Kasan. 1834. Heft II, S. 183.)

Ich will die andern Arbeiten von Lobatschefskij, über die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung und über die Mechanik unerwähnt lassen. Alle Arbeiten Lobatschefskijs legen von seiner merkwürdigen Beherrschung des Rechnungsapparates Zeugniss ab und beweisen, dass sein mathematischer Genius in die feinsten Fragen der Analysis eindrang.

Seine Liebe zur Wissenschaft beschränkte sich nicht bloss auf die Mathematik, diesen „Triumph des menschlichen Verstandes.“ Sie erstreckte sich auf alle Zweige des Wissens: Botanik, Chemie, Anatomie zogen ihn ebenso an und waren ihm gut bekannt.

Aber ganz besonders liebte Lobatschefskij die Erfahrungswissenschaften. Nicht umsonst spricht er in seiner Rede an einer vorhin erwähnten Stelle mit solchem Eifer von der Bedeutung der Erfahrung.

Wir finden Lobatschefskij zum Beispiel als einen thätigen Theilnehmer an Beobachtungen über die Temperatur des Erdbodens. Zu diesem Zwecke wurde auf dem Hofe der Universität ein Brunnen angelegt, in dem bis zu einer Tiefe von 15 Sashen [32 m] gegen zwanzig Thermometer aufgestellt wurden. 1833 und 1834 belief sich die Zahl der Beobachtungen jährlich auf 3050. Die Beobachtungen hörten im Jahre 1835 auf, weil in dem Brunnen ungewöhnliche Mengen Kohlensäure auftraten; aber 1841 erneuert Lobatschefskij die Beobachtungen und richtet seine Aufmerksamkeit besonders auf die Temperatur der vegetabilischen Bodenschicht; für die Beobachtungen über die Temperatur dieser Schicht, deren Wichtigkeit für die Landwirthschaft erst in der letzten Zeit anerkannt zu werden beginnt, ersinnt Lobatschefskij selber ein Metallthermometer von besondrer Konstruktion.

Ebensolches wissenschaftliches Interesse zeigte Lobatschefskij auch für die Astronomie.

25 Im Jahre 1842, am 26. Juli, war in einem Theile des europäischen Russland eine totale Sonnenfinsterniss sichtbar. Der Expedition nach Pensa, die von der Universität Kasan ausgerüstet wurde und die aus dem Astronomen Lapunof und dem Professor der Physik, Knorr, bestand, schloss sich auch Lobatschefskij an. Nach der Rückkehr liess Lobatschefskij einen ungewöhnlich ausführlichen Bericht drucken. In diesem Berichte Lobatschefskijs ist unter Anderm eine Sammlung von Mittheilungen über die wunderbare Erscheinung der Sonnenkorona enthalten, die nur während einer Sonnenfinsterniss zu beobachten ist, und es werden die verschiedenen Theorien, die über diese Frage bestehen, auseinandergesetzt und erörtert. Lobatschefskij erklärt sich weder für die Theorie, die zur Erklärung der Sonnenkorona das Vorhandensein einer Sonnenatmosphäre annimmt, noch für die Theorie, die diesen Ring durch Beugung der Strahlen in der Nähe der Oberfläche des Mondes erklärt. Bei der Besprechung der zweiten Theorie setzt Lobat-

schefskij seine Ansicht über die Lichttheorien auseinander. „Die Wellenlehre," sagt er, „kann man eigentlich nicht als Theorie bezeichnen, sondern nur als eine Darstellung der Erscheinungen, die man erklären will. Die wahre Theorie muss in einem einfachen, einzigen Principe bestehen, aus dem sich die Erscheinung in aller ihrer Mannigfaltigkeit als nothwendige Folge ergiebt. Von Wellen reden, heisst die ganze Betrachtung auf etwas gründen, was im strengen Sinne gar nicht vorhanden ist, ebenso wie wir von Linien und Flächen reden, während es doch in der Natur nur Körper giebt."

Unbefriedigt von der Wellentheorie spricht Lobatschefskij den Gedanken aus, es sei möglich, die Wellentheorie und die Emanationstheorie mit einander zu vereinigen, indem man annehme, dass die Lichttheilchen an ihrer Ausgangsstelle nicht bloss eine Translations-, sondern auch eine Vibrationsbewegung erhalten. Die erste ist die Ursache des Leuchtens und der Wärme; die zweite erklärt die Entstehung der Farben und aller Erscheinungen des polarisirten Lichtes. Nach seiner Ansicht kann die Newtonsche Emanationstheorie bestehen bleiben, wenn man nur hinzufügt, dass „der Strom des Aethers, wenn er auf seinem Wege Hindernisse trifft, eine Welle bildet, ebenso wie das Wasser in einem Flusse, das einen Damm getroffen hat, sich als Woge erhebt und sich in zwei Wellen theilt, zwischen denen ein 26 leerer Raum entsteht; schliesslich vereinigt sich das Wasser wieder in einen allgemeinen Strom. Oder es ist ebenso wie bei der Luft, die, ein Hinderniss treffend, gleichfalls Wellen schlägt und sich in zwei Ströme theilt, mit einem leeren Raume dazwischen; die Wellenbewegung bringt hier bisweilen einen Schall hervor und hinter dem leeren Raume erneuert sich das frühere Fliessen. Das Fallen des Wassers hinter dem Damm und der leere Raum, den die Luft hinter der Wand bildet, entsprechen folgerichtig dem Schatten, der hinter undurchsichtigen Körpern geworfen wird; das Streben des Wassers oder der Luft, sich von zwei Seiten her zu vereinigen, stellt uns die Ablenkung des Lichtes nach der Mitte des Schattens dar."

Zur Erscheinung der Sonnenkorona zurückkehrend, erklärt Lobatschefskij diese dadurch, dass unsre Atmosphäre, wenn sie vom Lichte berührt wird, selbst zu leuchten anfängt, und dass wir in dem Ringe um den Mond herum das eigene Licht der oberen Luftschichten erblicken, ebenso wie diese feine Hülle der Erde für die Bewohner der übrigen Planeten und des Mondes in hellem Lichte erglänzen muss.

Ueber die Mannigfaltigkeit der wissenschaftlichen Beschäftigungen Lobatschefskijs müssen wir uns um so mehr verwundern, als seine eifrige Thätigkeit als Professor und ausserdem als Rektor der Universität schon allein seine ganze Zeit in Anspruch nehmen konnte.

Vom Jahre 1820 an zum Beispiel befand sich an der Universität

Kasan kein einziger mehr von den deutschen Lehrern Lobatschefskijs. 1816 geht Littrow weg und stirbt Renner, ein Jahr später nimmt Bronner auf sechs Monate Urlaub, reist nach der Schweiz und kehrt nicht wieder nach Kasan zurück. 1820 vertauscht Bartels die Professur in Kasan mit einer in Dorpat. In der physisch-mathematischen Abtheilung, die kurz zuvor eine Fülle wissenschaftlicher Kräfte besessen hatte, verbleiben Lobatschefskij, Simonof und Nikolskij. Aber der zweite von diesen wird bald zu der Weltumsegelung mit Bellingshausen entsendet und Nikolskij widmet sich der Angelegenheit des Universitätsbaues. Die ganze Last des Unterrichts liegt auf Lobatschefskij. Er trägt die gesammte reine Mathematik, die Physik und die Astronomie vor.[1])

Nach der Rückkehr Simonofs von seiner Weltreise hörte Lobatschefskij auf die Astronomie zu lesen, dafür übernahm er aber die Vorlesungen über Mechanik und mathematische Physik.

Erst in der Mitte der dreissiger Jahre, als die physisch-mathematische Facultät Knorr als Professor der Physik erhielt und als Professor der Mechanik den vielen von uns noch persönlich bekannten, ehrwürdigen

---

1) Ich führe als Beispiel ein Bruchstück an aus dem Plane der Vorlesungen und Lehrgegenstände an der Kaiserlichen Universität Kasan, vom 17. August 1824 bis zum 28. Juni 1825. Nikolaj Lobatschefskij, Dekan der physisch-mathematischen Abtheilung, ordentlicher Professor der reinen Mathematik, kündigt

a) Aus dem Gebiete der reinen Mathematik für die Studenten der ersten Abtheilung Folgendes an: Ueber die Eigenschaften der ganzen Zahlen, über imaginäre Potenzen, über die Wurzeln der Gleichungen, Elemente der Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie nach eigenen Heften; für die Studenten der zweiten Abtheilung: Analytische Geometrie, Differenzenrechnung, Anfangsgründe der Differentialrechnung nach dem Leitfaden von Lacroix; für die Studenten der dritten Abtheilung: Integral- und Variationsrechnung, Anwendung der Analysis auf Geometrie, die ersten beiden nach Lacroix, die letztere nach Monge.

b) Aus dem Gebiete der Physik für die Studenten der ersten Abtheilung: Grundlagen der Physik, die Untersuchungsmethoden in dieser Wissenschaft, über die anziehenden und die abstossenden Kräfte, die Anschauungen der Physiker über die Körper, die Ausdehnung der Körper durch die Wärme, über die Elasticität der Körper und über die Verdampfung der Flüssigkeiten. Für die Studenten der zweiten und dritten Abtheilung: Ueber Elektricität, Magnetismus, Licht und Wärme, wobei er in seinem Unterrichte das Werk Biots zu Grunde legt: Traité complet de Physique, zugleich mit Benutzung andrer Schriftsteller.

c) Aus dem Gebiete der Astronomie wird er den Studenten der dritten Abtheilung sphärische und theoretische Astronomie anbieten nach Anleitung der Werke von Delambre.

Im Jahre 1826—27 las er ausser den Vorlesungen über reine Mathematik noch Statik und Mechanik der festen und der flüssigen Körper nach Lagrange und Poisson und mathematische Physik nach Fourier, Laplace, Poisson und Fresnel.

P. J. Kotjelnikof, konnte sich Lobatschefskij auf den Unterricht in der reinen Mathematik beschränken.[1])

Noch nicht zufrieden mit dem obligatorischen Unterrichte an der Universität, hielt Lobatschefskij mehrmals öffentliche Vorlesungen über Physik. Eine dieser Vorlesungen behandelte die Theorie der chemischen Trennung und Zusammensetzung der Körper durch die Wirkung der Elek- 28 tricität und war von Versuchen begleitet. Für den Handwerkerstand hielt er 1839—1840 einen besonderen populären Kursus der Physik unter dem Namen: „Volksthümliche Physik".

Ueber die Methode, die Lobatschefskij beim Halten der Vorlesungen befolgte, hat sein begabter Schüler und Nachfolger auf dem Lehrstuhle, Professor A. F. Popof, Erinnerungen hinterlassen. Nach diesen Erinnerungen „verstand es Lobatschefskij, im Hörsaale scharfsinnig oder hinreissend zu sein, je nach dem Gegenstande seines Vortrags. Im Allgemeinen glich sein gesprochener Stil dem geschriebenen nicht. Während sich seine Abhandlungen durch einen knappen und nicht immer klaren Stil auszeichneten, liess er es sich im Hörsaale angelegen sein, die Auseinandersetzungen mit aller Klarheit zu geben, er liebte es aber mehr, selbst zu lehren, als die Schriften andrer auszulegen, indem er es den Zuhörern überliess, sich selbst mit der gelehrten Litteratur bekannt zu machen. Seine öffentlichen Vorlesungen über Physik zogen ein zahlreiches Publikum in den Hörsaal, und die Vorlesungen für einen auserwählten Zuhörerkreis, in denen Lobatschefskij seine neuen Elemente der Geometrie entwickelte, müssen mit Fug und Recht als äusserst scharfsinnig bezeichnet werden."

Wie ernst es Lobatschefskij bis zum Ende seines Lebens mit seinen Pflichten nahm, dafür zeugt seine gedruckte, ausführliche und auch an selbständigen Ergebnissen reiche Besprechung der Doktordissertation A. F. Popofs: „Ueber die Integration der Differentialgleichungen der Hydrodynamik, nachdem man sie auf lineare Form gebracht hat." Kasan 1845. Der Veröffentlichung der Urtheile über die Dissertationen legte Lobatschefskij sehr grosse Bedeutung bei, und in seiner Eigenschaft als Verwalter des Kasaner Lehrbezirks setzte er dem Minister für Volksaufklärung seine Ansicht auseinander, dass jeder Doktordissertation eine gedruckte, ausführliche Besprechung beigelegt werden müsse. Obgleich ihm anheim gestellt wurde,

---

1) Im Jahre 1833—34 las Lobatschefskij mit Benutzung der Werke von Cousin, Lagrange und Lacroix für die Studenten des zweiten Kurses: Integration der Funktionen, für die des dritten Kurses: Integration der Differentialgleichungen mit einer Veränderlichen und für die Studenten des vierten Kurses: Integration der partiellen Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Diese Kurse behielt er bis zum Ende seiner Professorenthätigkeit bei.

nach seinem Ermessen zu handeln, zog er doch vor, über diesen Punkt die Ansicht des Senates der Universität Kasan zu hören. Der Senat verhielt sich dem Plane Lobatschefskijs gegenüber ablehnend, indem er der Ansicht war, eine solche Veröffentlichung dürfe, da man sie dem Urtheile des Publikums gegen den Willen des Verfassers aussetze und daher von diesem besondere Strenge verlange, die zuweilen für die Doktoranden lästig sei,
29 nicht als eine beständige Pflicht auferlegt werden, sondern müsse dem eigenen Ermessen und dem Wunsche der Professoren überlassen werden, die diese Beurtheilungen abfassten." In seinem Antwortschreiben erklärte Lobatschefskij dem Senat, „dem Urtheile des Publikums ist ein Verfasser bei jeder von ihm veröffentlichten Arbeit gegen seinen Willen ausgesetzt. Wenn daher der vom Senate angeführte Grund durchschlagend wäre, so wäre das ein Zeichen, dass die Professoren beabsichtigten, ihre Arbeiten nicht drucken zu lassen." Aber angesichts des Widerstandes des Senats gegen die von ihm vorgeschlagene Maassregel beschränkte sich Lobatschefskij auf das Anerbieten: „jedesmal ausführlich die Gründe anzugeben, die ihn veranlassten, an der Veröffentlichung der ganzen Beurtheilung der Dissertation festzuhalten."

An strenge Erfüllung seiner Pflichten gewöhnt, wie das aus dem eben angeführten Zwischenfalle hervorgeht, und von dem Wunsche beseelt, ebensolche Pflichterfüllung auch bei andern zu finden, bethätigte Lobatschefskij auch bei der Erfüllung seiner Rektorpflichten die ganze Energie, die ihn auszeichnete, die ganze Unermüdlichkeit in der Arbeit, die um so nöthiger war, als gerade in die Zeit seines Rektorats die Reorganisation der Universität fiel, die in dem vorhergehenden Zeitraume ganz in Verwirrung gerathen war, und ausserdem die Erbauung vieler Gebäude unsrer Universität (des physikalischen Kabinets, der Bibliothek, der Anatomie und des Observatoriums).

Ein unermüdlicher und energischer Verwaltungsmann, der auf alle Einzelheiten des ökonomischen Lebens der Universität einging, der sogar die Baukunst studirte, um den Bau der Gebäude mit Erfolg beaufsichtigen zu können, beschäftigte sich Lobatschefskij doch mit besondrer Vorliebe mit den Hülfsmitteln und den äusseren Zeichen des geistigen Lebens der Universität, mit ihrer Bibliothek und mit ihrer Zeitschrift.

Die Bibliothek befand sich in vollständiger Unordnung, als Lobatschefskij (am 8. Okt. 1825) die Pflichten des Bibliothekars übernahm. Drei Jahre unermüdlicher, energischer Arbeit brachten die Bibliothek in Ordnung; es wurde ein vollständiges Inventar der Bibliothek aufgenommen, Kataloge hergestellt, alle ihre Lücken ermittelt. Lobatschefskij liebte die Bibliothek so sehr, dass er die Pflichten des Bibliothekars auch dann nicht

aufgab, als er Rektor wurde und sie erst im Jahre 1835 einem andern 30 überliess.

Die Universität Kasan hatte seit 1812 ihr Organ, das anfangs „Kasaner Nachrichten" hiess, nachher „Kasaner Bote". Aber dieses Organ besass ganz und gar nicht den Charakter einer gelehrten Zeitschrift: Originalaufsätze gelehrten Inhalts waren unter Aufsätzen vollständig andern Charakters versteckt, unter Uebersetzungen und litterarischen Aufsätzen, und waren mit politischen Nachrichten und obrigkeitlichen Verordnungen untermischt. Auf Lobatschefskijs Veranlassung wurde diese Zeitschrift seit 1834 durch die „Gelehrten Schriften" ersetzt.

Die Gedanken, die Lobatschefskij bei dieser Umgestaltung leiteten, sind in dem Vorworte zu dem ersten Hefte der „Gelehrten Schriften" auseinandergesetzt. Das Vorwort beginnt mit einem Hinweise auf die Bedeutung des Buchdruckes, dieser zweiten Gabe des Wortes, dank der „ein Gedanke, der abends im Geiste eines Menschen entstanden ist, morgens auf dem Papiere tausendmal wiederholt und so an allen Enden der bewohnten Erde verbreitet wird. So ergiesst ein Funke, der sich an einem Punkte entzündet hat, seine Strahlen augenblicklich auch in einem weiten Umkreise. So verbreitet sich das Licht des Geistes, dieses Abbild des Tageslichtes, und vermag zu leuchten. So können Männer, die den Wissenschaften ergeben sind, dem Wunsche nicht widerstehen, ihre Entdeckungen, ihre Meinungen und Erläuterungen aufzuschreiben und drucken zu lassen." Aber ebenso wie es „in jedem aufgeklärten Reiche zwei Arten der Bildung giebt, eine allgemeine, die man als die volksthümliche bezeichnen kann, und eine andre, die der gelehrten Welt gehört," so muss es auch zwei Arten von periodischen Veröffentlichungen geben. „Die einen müssen einen mannigfaltigen Inhalt haben, wie es ja auch bei der Volksbildung sein muss, anziehend durch seine Neuheit und verlockend durch ein Gemälde des Lebens der Gegenwart, durch wahrheitsgetreue Schilderung der Leidenschaften und Gefühle." „Höhere gelehrte Anstalten, Akademien und Universitäten sollen keine solchen Zeitschriften herausgeben; sie müssen eine andre Pflicht übernehmen." Diese andre Pflicht ist die Herausgabe einer rein gelehrten Zeitschrift. Eine Zeitschrift dieser Art sind auch unsre „Gelehrten Schriften" von Anfang an gewesen. Der erste Aufsatz des 31 ersten Heftes: „Die Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um Eins verminderte Grad durch acht theilbar ist" stammt von Lobatschefskij.

Von der rastlosen Arbeit des Gelehrten, des Professors und Rektors suchte Lobatschefskij Erholung in der Liebe zur Natur, in bescheidenen landwirthschaftlichen Beschäftigungen. Sechzig Werst [64 km] von Kasan,

an der Wolga stromaufwärts, liegt ein kleines Dorf „Belowolshskaja Slobodka“, das Lobatschefskij gehörte; hier legte er einen schönen Garten an, und noch heutigen Tages hat sich darin ein Cedernhain erhalten. Nach einer rührenden Ueberlieferung, die seine Familie bewahrt hat, sagte Lobatschefskij, als er die Cedern pflanzte, schwermüthig, er werde deren Früchte nicht erleben; seine Voraussagung hat sich erfüllt: die ersten Cedernnüsse wurden im Todesjahre Lobatschefskijs gepflückt, aber erst nach seinem Tode.

Aber auch bei der Beschäftigung mit dem Gartenbau und der Landwirthschaft strebte sein forschender Geist danach, Neuerungen einzuführen und mit dem Schlendrian der in den vierziger Jahren üblichen gutsherrlichen Wirthschaft zu brechen. Bei seinem Besitzthume legte er eine Wassermühle an und erfand ein eignes Verfahren zur Herstellung von Mühlsteinen, auch kaufte er Guano auf zum Düngen. Besondere Aufmerksamkeit widmete er dem Gartenbau und der Schafzucht. Lobatschefskij brachte Merinoschafe auf sein Besitzthum, die er aus dem Erlös für einen Brillantring anschaffte, den er vom Kaiser Nikolaus erhalten hatte, und für seine Verbesserungen bei der Bearbeitung der Wolle wurde er durch die silberne Medaille der Kaiserlichen Landwirthschaftlichen Gesellschaft zu Moskau belohnt. Noch nicht zufrieden mit der Anwendung seiner wissenschaftlichen Kenntnisse in der eigenen Wirthschaft, wusste Lobatschefskij ausserdem auch andre Landwirthe des Gouvernements Kasan anzuregen und wurde eins der eifrigsten Mitglieder der 1839 zu Kasan eröffneten Kaiserlich Kasanischen Oekonomischen Gesellschaft, in der er ungefähr fünfzehn Jahre lang das Amt des Vorsitzenden einer ihrer Abtheilungen einnahm.

Die ernstliche Hingabe an so zahlreiche Beschäftigungen machte Lobatschefskij verschlossen, für den Verkehr unzugänglich und wortkarg; er 32 erschien finster und streng. Man findet das oft bei Leuten, die in ihrer Jugend feurig und stürmisch sind, die aber gerade wegen ihres Feuers sich häufiger als andre den Stürmen des Lebens aussetzen. Solche Lebensstürme, die geeignet sind, den Charakter stark zu beeinflussen, hat es, wir wissen das, auch im Leben Lobatschefskijs gegeben.

Aber unter der strengen, fast mürrischen Aussenseite verbarg sich wahrhafte „Liebe zum Nächsten“, ein gutes Herz, Theilnahme für alles redliche Streben, brennende Liebe, ja ein wahrhaft väterliches Verhältniss zur studirenden Jugend und zu allen begabten jungen Leuten. Ein junger Handlungsdiener, der hinter dem Ladentisch ein mathematisches Buch liest, zieht Lobatschefskijs Aufmerksamkeit auf sich; dieser ermöglicht ihm zuerst den Eintritt ins Gymnasium und dann in die Universität, und der junge Handlungsdiener wird nach einigen Jahren der bekannte Professor der

Physik an der Universität Kasan, Bolzani. Der Sohn eines armen Priesters war aus Sibirien zu Fuss nach Kasan gekommen, mit Lobatschefskijs Hülfe tritt er in die medicinische Facultät ein, gelangt dann zu einer angesehenen Dienststellung und aus Dank für die Universität Lobatschefskijs vermacht er dieser seine kostbare Büchersammlung. Mehrfach hat Lobatschefskij als Rektor junge Leute vor den Folgen ihrer Uebereilungen bewahrt, und die Studenten, die aus Lobatschefskijs Zeit und auch die heutigen, bewahren ihm ein ehrfurchtsvolles Andenken.

Die hohen Verstandes- und Gemüthseigenschaften Lobatschefskijs erwarben ihm bei seinen Lebzeiten allgemeine Achtung an der Universität und in der Stadt. Diese Achtung galt in gleicher Weise Lobatschefskij dem Rektor wie Lobatschefskij dem Gehülfen des Kurators, der als „Belisar", wie man ihn damals nannte, zu den Universitätsprüfungen kam.

Aber die Achtung galt dem Menschen, dem Professor, dem Verwaltungsmanne, sie konnte den Mann der Wissenschaft nicht befriedigen, der sich bewusst war, „neue Principien" in diese eingeführt zu haben.

In dieser Beziehung stiess Lobatschefskij bekanntlich entweder auf Gleichgültigkeit[1]) oder grobe und kränkende Spöttereien, von denen eine Beurtheilung, die sich in einer der Petersburger Zeitschriften befindet, voll ist.[2]) Sogar unter den Schülern Lobatschefskijs fand sich keiner, der dessen Ideen bearbeitete und als ihr überzeugter Vertheidiger auftrat. Als Trost konnte ihm einzig der Beifall von Gauss dienen, mit dem Lobatschefskij in Briefwechsel stand, und vielleicht noch die „Beispiele aus der Geschichte", die lehren, dass zu hoch über ihren Zeitgenossen stehende Männer den Lohn der Anerkennung und des Ruhms erst nach ihrem Tode empfangen. 33

Es vergingen auch keine vierzig Jahre nach Lobatschefskijs Tode, als dieser Lohn nunmehr auch ihm zu Theil wurde.

Der allerhöchste Lohn für einen Denker, der Lohn, der Lobatschefskij bei seinen Lebzeiten versagt blieb, ist die Weiterentwickelung seiner Ideen, das Arbeiten in der Richtung, die er der Wissenschaft gegeben hat. Ein solches Arbeiten findet man jetzt nicht bloss im Vaterlande Lobatschefskijs, sondern auch in allen Kulturländern Europas: in England, Frankreich, Deutschland, Italien und in dem eben aus seinem geistigen Schlafe erwachenden Spanien, ja sogar in den jungfräulichen Wäldern von Texas.

Diese Arbeiten haben seit 1866 begonnen, wo der jetzt verstorbene französische Mathematiker Hoüel, dessen wir heute mit Dankbarkeit gedenken müssen, eine französische Uebersetzung der deutsch geschriebenen

1) Der Akademiker W. Ja. Bunjakofskij erwähnt in seiner Arbeit „Die Parallellinien", die 1853 gedruckt ist, Lobatschefskijs Untersuchungen gar nicht.

2) „Sohn des Vaterlandes." 1834.

Arbeit Lobatschefskijs: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“ herausgab[1]), indem er einen Auszug aus dem Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher beifügte. Er hat überdies der Entwickelung der Ideen Lobatschefskijs auch ein eignes selbständiges Werk gewidmet.[2])

34 Im Jahre 1867 wurde eine Abhandlung Riemanns veröffentlicht, die auf die Möglichkeit der Geometrie eines sphärischen Raumes hinwies, einer Geometrie, in der auch das Axiom „zwei gerade Linien können keinen Raum einschliessen“ nicht gültig ist.[3]) Andrerseits stellte der italienische Mathematiker Eugenio Beltrami Untersuchungen über krumme Oberflächen an[4]), bei denen er sich der Principien bediente, die Gauss in seiner berühmten Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ entwickelt hatte, und er wurde so zur Behandlung einer besondern Gattung von Flächen geführt, den pseudosphärischen, wie er sie nannte, wobei er auf die Uebereinstimmung der Geometrie dieser Flächen mit der Planimetrie Lobatschefskijs hinwies. Durch Verbindung aller dieser Untersuchungen gelangte man so zu dem Ergebniss, dass ein überall gleichartiger mathematischer Raum von drei Dimensionen (das heisst einer, in dem die Bewegung eines festen, unveränderlichen Körpers möglich ist) von dreierlei Art sein kann. An die eine dieser drei Arten knüpft sich immer fester und fester die Benennung: Lobatschefskijscher Raum. Die beiden andern heissen der Euklidische und der Riemannsche Raum. Die analytische Theorie dieser Räume unterscheidet sie nach dem Vorzeichen eines gewissen Ausdrucks, der der Krümmung einer Fläche analog ist. Für den Euklidischen Raum ist dieser Ausdruck, die Krümmung des Raums, gleich Null, für den Lobatschefskijschen ist er negativ und für den Riemannschen positiv.[5])

35 Die Erforschung der Eigenschaften der Räume im allgemeinen Sinne

---

1) Études géometriques sur la théorie des parallèles, suivies d'un extrait de la correspondance de Gauss et Schumacher. Traduit de l'Allemand par J Hoüel.

2) Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire. 1867. Séconde édition 1883.

3) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Eine russische Uebersetzung dieser Abhandlung, von D. M. Sinzof, befindet sich in dem Sammelwerke „Ueber die Grundlagen der Geometrie“, das von der physisch-mathematischen Gesellschaft an der Kais. Universität Kasan zum Jubiläum N. J. Lobatschefskijs herausgegeben worden ist.

4) Saggio di una rappresentazione della geometria non-euclidea — Teorica degli spazii di curvatura costante.

5) [Man vergleiche hierzu und zu dem Folgenden namentlich die gruppentheoretischen Arbeiten von Lie über die Grundlagen der Geometrie, s. Theorie der Transformationsgruppen Bd. III, Leipzig 1893.]

ist nun der Gegenstand der nichteuklidischen Geometrie. Als ein nothwendiges Hülfsmittel erscheint dabei die Vorstellung, dass diese Räume in einem Raume von vier Dimensionen enthalten sind. Deshalb schliesst sich die Geometrie der mehrfach ausgedehnten Räume an die nichteuklidische Geometrie an und bildet sozusagen deren Fortsetzung; indem sie zahlreiche Fragen der Geometrie beleuchtet, erscheint sie gegenwärtig als ein unentbehrliches Hülfsmittel bei der Lösung vieler Aufgaben der Analysis.[1]) Ich erwähne zum Beispiel die merkwürdigen Untersuchungen von Poincaré über die Theorie der automorphen Funktionen und den Nutzen, den Kronecker aus der Geometrie mehrerer Dimensionen bei der Frage über die Trennung der Wurzeln von Systemen simultaner Gleichungen gezogen hat.

Der Gedanke Lobatschefskijs hat, wie das bei allen genialen Gedanken zu geschehen pflegt, die mannigfaltigsten Fragen hervorgerufen. Einerseits stellt er die Frage: Ist denn „der physische Raum unsrer Erfahrung" wirklich ein Euklidischer Raum, wie es uns erscheint und wie unsre begränzte Erfahrung uns zu überreden versucht? Newcomb, Ball, Peirce und andre haben sich nach dem Vorgange von Lobatschefskij mit der Frage beschäftigt, in wie weit astronomische Beobachtungen uns gestatten, die Frage über die Winkelsumme im Dreieck zu erledigen, und indem sie dem von Lobatschefskij selbst angegebenen Wege folgten, sahen sie die Antwort auf diese Frage in der Bestimmung der Parallaxen von Fixsternen. Der königlich irische Astronom Ball, ein bekannter Gelehrter, sagt über diese Frage Folgendes: „Die Astronomen sind oft unangenehm überrascht gewesen, wenn sie als Ergebniss ihrer Bemühungen eine negative Parallaxe erhielten. Schliesslich ist das im Allgemeinen eine Folge der unvermeidlichen Fehler bei solchen mühsamen Beobachtungen, aber man darf nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass, wenn der Raum wirklich eine Krümmung 36 besässe, die negative Parallaxe sich auch aus Beobachtungen von mathematischer Genauigkeit ergeben würde." Der amerikanische Gelehrte C. S. Peirce geht sogar noch weiter und glaubt auf Grund astronomischer Beobachtungen bewiesen zu haben, dass unser Raum ein Lobatschefskijscher Raum ist.

Dagegen kam Zöllner auf Grund der Erscheinung, dass der Himmel dunkel ist, und auf Grund von Untersuchungen über die gegenseitige Einwirkung von Massen, die in den Räumen der verschiedenen Arten vertheilt sind, zu dem Schlusse, dass unser Raum zu der Klasse der Riemannschen Räume gehört.

---

1) Eine schöne Darstellung der Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie und über die Geometrie von mehreren Dimensionen findet man in dem eben erschienenen und unsrer mathematisch-physischen Gesellschaft gewidmeten Werke Prof. Killings: „Einführung in die Grundlagen der Geometrie".

Viele Gelehrte haben versucht, Naturerscheinungen durch die Annahme zu erklären, dass der Raum eine Krümmung besitzt, indem sie einen Raum von grösserer Dimensionenzahl zuliessen.[1]) Am weitesten ist in dieser Richtung der begeisterte Verehrer Lobatschefskijs, Clifford, gegangen, indem er sich zu der Annahme verstieg, die uns sichtbare Bewegung der Materie sei nichts anderes als eine Aenderung der Krümmung des Raumes. Die wichtigsten Behauptungen seiner merkwürdigen Hypothese bestehen in Folgendem:

1) Die unendlich kleinen Theile des Raumes sind ihrer Natur nach analog mit Erhebungen und Vertiefungen auf einer im Allgemeinen ebenen Fläche; die gewöhnlichen Gesetze der Geometrie finden bei ihnen nicht statt.

2) Die Eigenschaften, sich zu krümmen und sich wieder gerade zu biegen, pflanzen sich unausgesetzt von einem Theile des Raumes zum andern fort, ähnlich wie eine Welle.

37 3) In dieser Veränderung der Krümmung des Raumes besteht nun die Erscheinung, die man als Bewegung der wägbaren oder der ätherischen Materie bezeichnet.

4) In der physischen Welt geht nichts weiter vor als eine Veränderung der Krümmung des Raumes, die (vielleicht) an das Gesetz der Stetigkeit gebunden ist.

Dies die kühnen Spekulationen Cliffords. Ob etwa derartige Spekulationen über die Eigenschaften des Raumes wirklich neue Hypothesen zur Erklärung der Erscheinungen in der Welt liefern können, das wird die Zukunft zeigen. Wie Riemann[2]) sagt, ist es wichtig, dass die Arbeit an der Erklärung der Erscheinungen, die in uns und um uns vorgehen, „nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird.“

Ich erwähne übrigens noch, dass Lobatschefskij, was für seine philosophischen Ansichten sehr charakteristisch ist, nicht nur niemals von Eigenschaften des Raumes spricht, sondern sogar behauptet, dass der Raum an und für sich, abgesondert gar nicht vorhanden ist. Es scheint demnach,

---

1) Mach, Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag 1872. „Warum es bis jetzt nicht gelungen ist, eine befriedigende Theorie der Elektricität herzustellen, das liegt vielleicht mit daran, dass man sich die elektrischen Erscheinungen durchaus durch Molekularvorgänge in einem Raume von drei Dimensionen erklären wollte.“ Mach und auch Bresch (Der Chemismus im Lichte mehrdimensionaler Raumanschauung. Leipzig 1882) haben die Annahme eines Raumes von vier Dimensionen zur Erklärung chemischer Erscheinungen benutzt.

2) [Am Schlusse seiner Habilitationsrede. Ges. Werke, 1. Aufl., S. 268.]

dass Lobatschefskij die Theorien über die Eigenschaften des Raumes nicht gebilligt haben würde, er würde vielmehr, scheint es, die Weiterentwickelung seiner Ansichten und Gedanken in der Stellung der Frage über die nicht-euklidische Geometrie erblickt haben, die wir bei Cayley und F. Klein[1]) finden. Bei diesen Mathematikern wird die etwas metaphysische Frage nach den Eigenschaften des Raumes durch die Frage nach dem Verfahren zur Ausmessung von Abständen ersetzt. Um einen Begriff von ihrem Gedanken zu geben, wollen wir uns vorstellen, dass wir auf der geraden Linie $ABCDEFG\ldots$ Abstände messen, die absolut genommen folgende Werthe haben:

$AB = 1$ Werst[2]), $BC = \frac{1}{2}$ Werst, $CD = \frac{1}{4}$ Werst, $DE = \frac{1}{8}$ Werst, ...,

wir messen sie aber mit einem Massstabe, der sich (zum Beispiel vermöge schneller Temperaturveränderung) verkürzt und zwar beim Uebergang von AB zu BC auf die Hälfte, beim Uebergang von BC zu CD nochmals auf die Hälfte, und so weiter. Dann wird es uns so erscheinen, als ob alle Abschnitte unserm Massstabe gleich wären, also gleich einer Werst und ein Abstand von zwei Werst, der der Summe der unendlichen geometrischen Reihe 38

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots$$

gleich ist, wird subjektiv gleich einer unendlich grossen Zahl von Werst sein; das Ende dieses Abstandes wird bei unserm Messverfahren niemals erreicht werden können. Ein um den Punkt A mit einem Halbmesser von zwei Werst beschriebener Kreis wird der Gränzkreis der Lobatschefskijschen Geometrie sein. Das System der Beziehungen zwischen Abständen und Winkeln wird, wie Cayley und Klein gezeigt haben, mit dem Systeme zusammenfallen, das die Lobatscheftskijsche Geometrie bildet.

Aber welche Stellung der Frage wir auch vorziehen mögen, die Fragen, die unser unsterblicher Geometer auf die Tagesordnung gebracht hat, beschränken sich augenscheinlich nicht bloss auf das Gebiet der Geometrie. An ihrer Lösung muss auch die Physiologie der Sinnesorgane (vorzugsweise des Gesichts und des Gefühls) theilnehmen und ebenso der Zweig der Philosophie, den man als Erkenntnisstheorie bezeichnet. Von ihrer Lösung sind unsre Ansichten über die allgemeine Naturphilosophie abhängig.

Hierin zeigt sich nun die Grösse der Ideen Lobatschefskijs. Je stärker der Schlag ist, den ein schwerer Körper bei seinem Fall auf ein stehendes

1) F. Klein, Ueber nicht euklidische Geometrie. (Math. Ann. Bd. IV und VI.) A. Cayley. Address as President of British Association at Southport 1883.

2) [1067 m.]

Gewässer ausübt, um so weiter dehnt sich die Bewegung der Wellen aus, um so mehr Stellen werden davon ergriffen. Je genialer ein Gedanke, um so grösser das Gebiet wissenschaftlichen Denkens, das seinem Einflusse unterworfen wird. Darin, dass Lobatschefskijs Ideen von jetzt an nicht nur das Interesse der Mathematiker, sondern auch das der Physiker, Astronomen, Physiologen und Philosophen immer mehr auf sich ziehen werden, besteht eben der erste Lohn für unsern Geometer und Denker.

Als zweiter Lohn für Lobatschefskij erscheint die allgemeine Verehrung seines Namens; Zeugniss für diese Verehrung legen ab die zahlreiche Zuhörerschaft, die sich versammelt hat, um sein Andenken zu ehren, die Be-
39 grüssungen, die wir vor Kurzem gehört haben, und die Theilnahme, mit der der Aufruf der physisch-mathematischen Gesellschaft zur Bildung einer Stiftung auf den Namen Lobatschefskijs aufgenommen worden ist. Beiträge sind fast aus allen Gegenden Europas eingegangen; betheiligt haben sich daran das ferne Amerika ebenso wie eine der ersten gelehrten Anstalten der Welt — die Königliche Gesellschaft zu London, und wie die Realschule einer kleinen deutschen Stadt. Auf unsern Aufruf haben nicht nur Mathematiker geantwortet, sondern auch Philosophen.

Dank allen diesen Beiträgen wird die Stiftung auf den Namen Lobatschefskijs ins Leben treten und wird, durch Unterstützung und Ermuthigung junger Mathematiker, zur Entwickelung der geliebten Wissenschaft Lobatschefskijs beitragen.

Aber Russlands gebildeten Ständen und vor allen Dingen den gebildeten Ständen dieser Stadt, in der Lobatschefskij erzogen ist, gelehrt, gedacht und gewirkt hat, liegt noch eine andere Pflicht ob.

Ein Denkmal Lobatschefskijs gegenüber dem Gebäude seiner geliebten Universität ist kein zu weit getriebener Dank für den Mann, dessen ganzes Leben der Aufklärung seiner heimathlichen Gegend gewidmet war, für den grossen Denker, der für den wissenschaftlichen Ruhm Russlands und der Universität Kasan so viel gethan hat.

Möge dieses Denkmal zukünftige Geschlechter von Lehrenden und Lernenden der Universität Kasan an die erhabene Gestalt des Professors erinnern, der sein ganzes Leben in den Dienst seiner heimathlichen Universität gestellt hat, an den Professor, der es als Ziel der Universität hinstellte, nicht nur den Verstand durch Kenntnisse aufzuklären, sondern auch zur Tugend anzuleiten, Liebe zum Ruhm einzuflössen, Gefühl für Edelmuth, Recht und Ehre, für diese unberührte Redlichkeit, die auch gegenüber verführerischen Beispielen des Missbrauchs, die der Strafe unerreichbar sind, Stand zu halten vermag.

40 Möge dieses Bild des genialen und mächtigen Denkers, der über einen

der wichtigsten Zweige des menschlichen Wissens neues Licht verbreitet und „neue Principien“ darin eingeführt hat, ganz Russland verkündigen:

„Auf der Bahn des Verstandes giebt es kein Zurückweichen.“

ZUSÄTZE DES VERFASSERS.[1])

S. 220, Z. 4 v. u. „aber es ist wohl unzweifelhaft, dass Lobatschefskij schon vor dem Jahre 1823 begonnen hat, sich mit der Geometrie zu beschäftigen.“

Diese Annahme ist jetzt zur Gewissheit geworden, denn nach dem Erscheinen der russischen Ausgabe meiner Rede erhielt ich ein altes Kollegienheft mit einer Nachschrift der Vorlesungen, die Lobatschefskij während der Jahre 1815 und 16 an der Universität Kasan gehalten hat. In diesem Hefte befinden sich drei kurze Darstellungen einer systematischen Bearbeitung der Parallelentheorie und in jeder dieser Darstellungen ist eine andere Auffassung der Parallelentheorie enthalten.

Nach dem Vorgange von L. Sohncke in Ersch und Grubers „Allgemeiner Encyclopädie der Wissenschaften und Künste“ kann man die Versuche, die zur Vervollständigung der Parallelentheorie gemacht worden sind, in drei Klassen eintheilen.

In die erste Klasse gehören die Versuche, bei denen eine neue, von der Euklidischen abweichende, Erklärung der Parallellinien zu Grunde gelegt wird. Man erklärt die Parallellinien entweder als solche, die in allen Punkten gleich weit von einander abstehen, oder als solche, die ein und dieselbe Richtung haben. Lobatschefskij schliesst sich in dem ersten Vorlesungshefte der letzteren Auffassung an, die später von C. F. A. Jacobi in seiner Dissertation: „De undecimo Euclidis axiomate iudicium. Jena 1824“ sehr ausführlich entwickelt worden ist. Vor dem Jahre 1815 findet sich diese Auffassung nur in einem holländischen Werke von Swinden: „Grondbeginsels der Meetkunde. Amsterdam 1790.“

Die zweite Klasse der Beweisversuche führt Unendlichkeitsbetrachtungen ein und benutzt unendlich grosse Theile der Ebene. Ihr erster Vertreter ist Bertrand de Génève in seinem Buche: „Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. 1778.“ Auch Legendre hat diese Betrachtungsweise vielfach benutzt. Der damit verwandte Beweis, den

---

1) Der Verfasser hat diese Zusätze eigens für die vorliegende deutsche Uebersetzung geschrieben.

Lobatschefskij in dem zweiten Vorlesungshefte giebt, hat besonders mit dem Beweise grosse Aehnlichkeit, den Crelle in dem Schriftchen: „Ueber Parallelentheorien und das System der Geometrie." Berlin 1816, gegeben hat. Später hat Crelle seinen Beweis in der Abhandlung: „Theorie der Parallelen, Crellesches Journal Bd. 11" wieder abgedruckt.

Am anziehendsten ist aber das dritte Heft. Dieses enthält einen Beweis des Satzes, dass die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten ist. Der Beweis schliesst sich am nächsten denen von Legendre an und zeigt, dass sich Lobatschefskij sehr eingehend mit den Arbeiten Legendres über diesen Gegenstand beschäftigt hat. Zunächst beweist Lobatschefskij, dass die Winkelsumme zwei Rechte nicht übersteigen kann; sodann zeigt er, dass die Winkelsumme in jedem Dreiecke gleich zwei Rechten ist, sobald sie nur in einem einzigen diesen Werth hat. Es handelt sich also noch darum, ein Dreieck zu finden, dessen Winkelsumme gleich zwei Rechten ist. Lobatschefskij glaubt beweisen zu können, dass ein rechtwinkliges Dreieck, in dem einer der spitzen Winkel gleich $\frac{\pi}{8}$ ist, eine Winkelsumme von zwei Rechten besitzt; man kann aber gegen seinen Beweis dieselben Einwürfe machen wie gegen den von Legendre. In historischer Beziehung ist Lobatschefskijs Beweis deswegen merkwürdig, weil sich darin schon mehrere Sätze über Defekte finden. Zum Beispiel wird bei dem Beweise der Satz benutzt, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks, das in einem andern enthalten ist, aber mit diesem einen Winkel und eine Seite gemein hat, grösser als die Summe der Winkel des grösseren Dreiecks sein muss. Sätze dieser Art gehören schon dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie an.[1])

Zu S. 224, Z. 1 v. u. „Ueber die Konvergenz der unendlichen Reihen. [Kasan 1841.]"[2])

Das von Lobatschefskij angegebene Verfahren, um über die Konvergenz unendlicher Reihen zu entscheiden, beruht auf den folgenden Betrachtungen:

Ist eine unendliche Reihe:

$$\sum_{i=\infty}^{i=\infty} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$$

gegeben, so kann man sich auf den Fall beschränken, dass alle $f(i) \leqq 1$ sind, und kann dann die einzelnen Glieder in Ausdrücke von der Form:

---

1) [Im Ganzen hat also Lobatschefskij in den Jahren 1815—16 noch ungefähr auf demselben Standpunkte gestanden, wie Saccheri und Lambert. Diese Thatsache spricht nicht gerade für die Annahme, dass Gauss durch die Vermittelung von Bartels Lobatschefskij beeinflusst haben sollte.]

2) Vgl. hierzu und zu dem folgenden Zusatze die Note Wassiljefs in dem Bulletin of the New York mathematical society. Bd. III, 94, S. 231—235.

$$\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2^2} + \cdots$$

verwandeln, wo jedes λ einen der beiden Werthe 0, 1 besitzt. Gelingt es nun, für jedes k eine Zahl μ_k so zu bestimmen, dass

$$f(\mu_k) \geqq 2^{-k}, \qquad f(\mu_k + 1) < 2^{-k},$$

so können höchstens μ_k verschiedene Glieder den Bruch 2^{-k} in ihrer Entwickelung enthalten und in der Summe der Reihe kann 2^{-k} keinen Koefficienten haben, der grösser ist als μ_k. Demnach kann die Summe der Reihe den Werth:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \mu_k \, 2^{-k}$$

nicht übersteigen.

Die Schwierigkeit dieses Verfahrens liegt in der Bestimmung der Zahl μ_k.

Es ist bemerkenswerth, dass Lobatschefskij sein Verfahren zur Bestimmung einer oberen Gränze für die gegebene Reihe auch auf die einfache Exponentialreihe

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{x^i}{i!}$$

anwendet, um die Funktionalgleichung:

$$f(x)\,f(y) = f(x+y)$$

zu beweisen. Wie es scheint, hat er das aus denselben Gründen gethan, die später die Mathematiker veranlasst haben, zwischen gleichmässiger und ungleichmässiger Konvergenz zu unterscheiden.

Zu S. 225, Z. 17 v. u. „Die Integrale müssen immer derart in Intervalle zerlegt werden u. s. w.“

Diese Worte zeigen, dass Lobatschefskij seinen Zeitgenossen auch in der Frage über die Grundlagen der Infinitesimalrechnung voraus war. Mit noch grösserer Schärfe hat er seine Ansichten in der Abhandlung: „Ueber das Verschwinden der trigonometrischen Reihen“ ausgesprochen. Er giebt darin die Definition des Differentialquotienten in folgender Form:

„Es bezeichne $F(k)$ eine Funktion, die sich mit x ändert und von einem bestimmten Werthe von x bis zu $x = a$ zunimmt. Wir theilen $a - x$ in i gleiche Theile und bezeichnen $\frac{a-x}{i}$ mit h. Ferner seien die Werthe $F(x)$, $F(x+h)$, . . . $F(a)$ bekannt für jeden noch so kleinen Werth von h, das ja mit zunehmendem i unbeschränkt abnimmt. Der Quotient

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

wird sich mit h verändern. Für $i' > i$ sei nun $\frac{a-x}{i'}$ gleich h'. Wenn dann die Differenz

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \frac{F(x+h')-F(x)}{h'} = \varepsilon,$$

oder, was dasselbe ist, der Ausdruck:

$$\frac{h' F(x+h) - h F(x+h') + (h-h')F(x)}{hh'} = \varepsilon$$

für jeden Werth von x mit h abnimmt und beliebig klein gemacht werden kann, so soll die Funktion eine ununterbrochene Funktion heissen. Der Quotient

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

hat in diesem Falle eine Gränze und diese Gränze ist

$$\frac{dF}{dx}.\text{“}$$

NACHWORT DES ÜBERSETZERS.

Durch die vorstehende Uebersetzung der Wassiljefschen Rede möchte ich dazu beitragen, dass Lobatschefskij auch in den Kreisen der deutschen Mathematiker etwas mehr als dem Namen nach bekannt werde. Die Rede ist wörtlich übersetzt, nur in der Anmerkung 2 auf S. 213 habe ich mir erlaubt, den Text des Verfassers etwas zu ändern und die Angaben über Lamberts Theorie der Parallellinien zu berichtigen.[1]) Ich bin wohl auch an andern Stellen nicht immer ganz derselben Ansicht, wie der Verfasser, aber ich habe es nicht für nöthig gehalten, etwaige Meinungsverschiedenheiten, die nur Kleinigkeiten betreffen, zum Ausdrucke zu bringen. Die wenigen Zusätze, die ich gemacht habe, sind in eckige Klammern ein-

---

1) Die Abhandlungen Saccheris und Lamberts findet man in dem von Stäckel und mir bearbeiteten Buche: „Die Parallelentheorie von Euklid bis Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1895 bei Teubner.“ Dort sind auch ausführliche geschichtliche Mittheilungen über die Parallelentheorie überhaupt gemacht. Insbesondere sind zwei bisher unbekannte Aeusserungen von Gauss über die Parallelentheorie mitgetheilt, und ausserdem kommen Schweikart und Taurinus (vgl. S. 214, Anm.) hier zum ersten Male zu ihrem Rechte.

geschlossen. Ausserdem habe ich die Seitenzahlen des Originals beigefügt, was eigentlich bei jeder Uebersetzung geschehen sollte.

Ich habe die Wassiljefsche Rede nach dem Original übersetzt, obwohl bereits eine englische Uebersetzung von G. B. Halsted (Austin, Texas 1894) vorlag; es schien mir aber für einen Deutschen nicht passend, eine russische Schrift nach einer englischen Uebersetzung zu übertragen. Selbstverständlich habe ich aber die Halstedsche Uebersetzung überall verglichen und bekenne gern, dass sie mir an manchen Stellen gute Dienste geleistet hat.

Zu besonderem Danke verpflichtet bin ich meinem Leipziger Freunde und Kollegen Professor W. Wollner, der mir über verschiedene sprachliche und sachliche Fragen Klarheit verschafft hat.

Es scheint mir angemessen, die Mittheilungen, die in der Rede über das Leben Lobatschefskijs gemacht sind, in einigen Punkten zu vervollständigen, denn die Rede ist ja keine Lebensbeschreibung Lobatschefskijs, sondern eine Würdigung seiner Leistungen.

Nikoláj Iwánowitsch Lobatschéfskij ist am 22. Oktober (2. Nov.) 1793 im Gouvernement Nishnij-Nowgorod geboren. Sein Vater, ein Architekt, starb 1797 und hinterliess seine Frau mit zwei kleinen Söhnen in sehr bescheidenen Verhältnissen. Die Wittwe zog nach Kasan, und es gelang ihr, ihre Söhne auf dem dortigen Gymnasium auf Staatskosten unterzubringen. Die weitern Lebensumstände Lobatschefskijs sind in der Rede Wassiljefs mitgetheilt. Es ist nur noch zu bemerken, dass Lobatschefskij von 1816 bis 1846 als Professor thätig war und in dem letztgenannten Jahre zum Gehülfen des Kurators des Lehrbezirks Kasan ernannt wurde; ferner dass er gegen Ende seines Lebens das Augenlicht verlor, aber auch blind immer noch seine wissenschaftlichen Arbeiten fortsetzte. Sein letztes Werk „Pangéométrie“ diktirte er seinen Schülern. Er starb am 12. (24.) Februar 1856.

Die geometrischen Werke Lobatschefskijs sind von der Kaiserlichen Universität Kasan in zwei Bänden neu herausgegeben worden. Der erste (bereits vergriffene) Band: „Vollständige Sammlung der geometrischen Arbeiten N. J. Lobatschefskijs“ ist in Kasan 1883 erschienen und enthält die russisch geschriebenen Arbeiten. Es sind das folgende:

1) Ueber die Anfangsgründe der Geometrie. S. 1—70. (Kasaner Bote 1829.) Diese Abhandlung ist ein Auszug aus der auf S. 221 erwähnten, ungedruckten Arbeit vom Jahre 1826: „Exposition succincte de la géometrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles.“ Leider scheint das Manuscript der „Exposition succincte“ verloren zu sein.

2) Imaginäre Geometrie. S. 71—120. (Gelehrte Schriften der Kais. Universität Kasan 1835.)

3) Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. S. 121—218.

4) Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen. S. 219—486. (Gelehrte Schriften u. s. w. 1835—38.)

5) Pangeometrie. S. 487—550. (Gelehrte Schriften 1836.)

Der zweite Band (Kasan 1886) enthält die in deutscher und in französischer Sprache geschriebenen Arbeiten, sowie ein Bild Lobatschefskijs. Man findet darin Folgendes:

6) Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. S. 553—578. (Berlin 1840. In der Finkeschen Buchhandlung.)

7) Géométrie imaginaire. S. 581—613. (Crellesches Journal Bd. 17, 1837.)

8) Pangéométrie, ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. S. 618—680. (Kasan 1855.)

Nr. 7 ist eine Bearbeitung, theilweise eine Uebersetzung von Nr. 2. Nr. 8 ist eine Uebersetzung von Nr. 5. Uebersetzungen von Nr. 4 giebt es meines Wissens leider bis jetzt nicht, sie wären aber höchst erwünscht.

Ich füge noch einige wenige Bemerkungen bei.

S. 209, Z. 15 v. o. Die Laplacesche Aeusserung bezog sich wohl nicht auf Bartels, sondern auf Pfaff.

S. 212, Z. 2, 1 v. u. Diese Schrift ist nicht von Legendre, sondern von Adolf Kircher, s. Stäckel u. Engel, Theorie der Parallellinien S. 304.

S. 213, Z. 4 v. o. Das von Stäckel aufgestellte Verzeichniss weist für die Jahre 1813—1827 nicht weniger als 67 Schriften und Abhandlungen über die Parallelentheorie nach (a. a. O., S. 305—310).

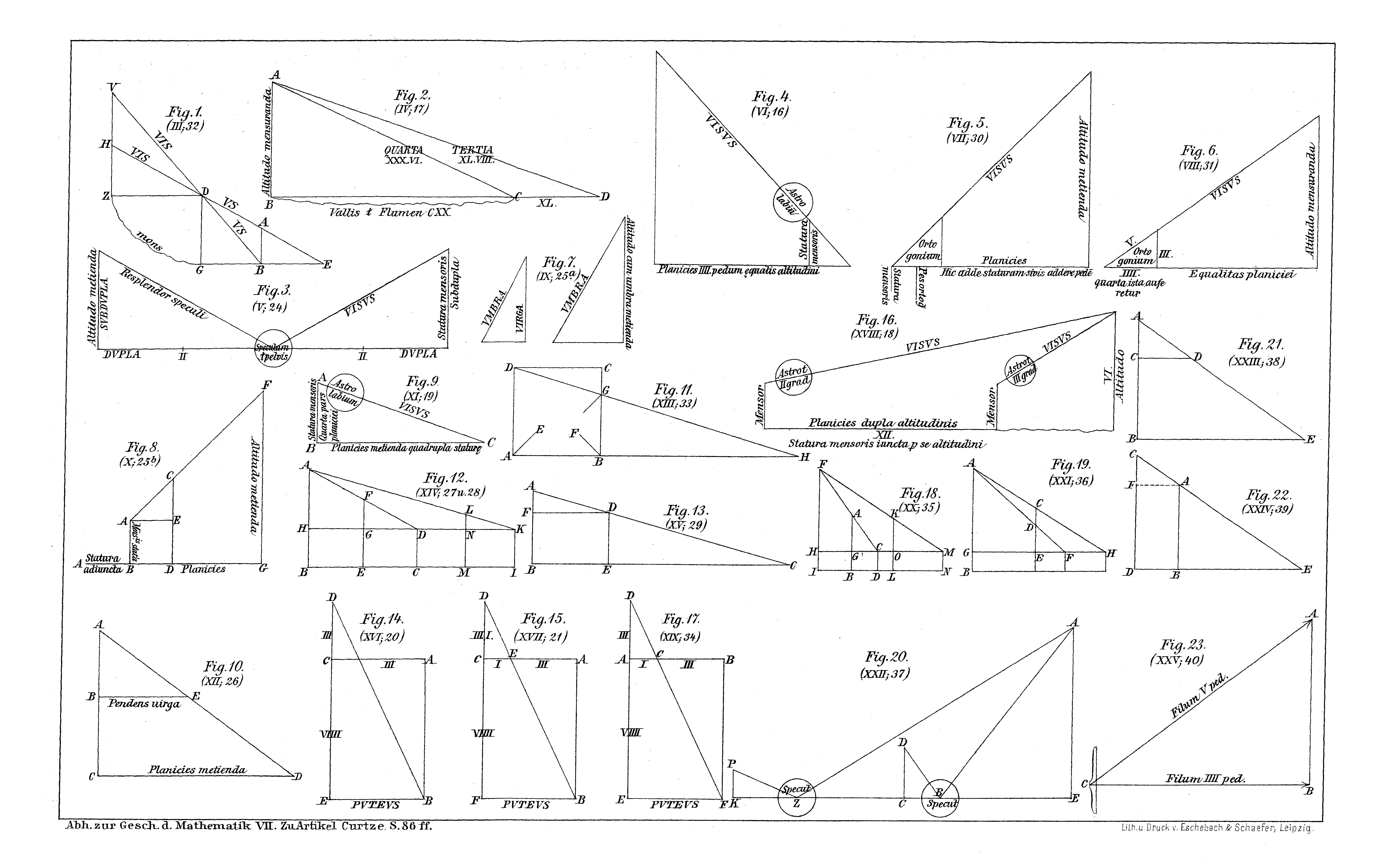
S. 219, Z. 9 v. u. Ueber Magnizkij vergleiche man: Alfred Rambaud, Histoire de la Russie. 3me éd. Paris 1884. — chap. XXXV, p. 624—625 und: (J. Eckardt) Aus der Petersburger Gesellschaft. 5. Aufl. Leipzig 1880. — X. Unsere Unterrichtsminister. S. 257.

S. 233, Z. 5 v. u. Hier hätte Baltzer erwähnt werden sollen, durch den Hoüel erst auf Lobatschefskij und Bolyai aufmerksam gemacht worden war (a. a. O., S. 239).

S. 235, Z. 9—5 v. u. Zöllner hat das doch wohl nur als eine Möglichkeit hingestellt.

Leipzig, im Juli 1895.

Friedrich Engel.



Abh. zur Gesch. d. Mathematik VII. Zu Artikel Curtze. S. 86 ff.

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.